Úlohy na precvičenie

Hľadanie zákonitostí

1. Päť závodníkov (Adam, Boris, Cyril, Dušan, Emil) bežalo 100 metrov. Koľko je takých poradí v cieli, kde Adam dobehne pred Borisom?

2. Nech $S_{n,0}, S_{n,1}, S_{n,2}$ označuje súčet, ktorý dostaneme, ak sčítame každý tretí prvok v $n-$tom riadku Pascalovho trojuholníka (pri $S_{n,0}$ začneme prvým prvkom zľava, pri $S_{n,1}$ začneme druhým a pri $S_{n,2}$ tretím zľava). Vyslovte hypotézu o hodnote čísla $S_{100,1}$.

3. Určte:
$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i}.$$

4. Určte:
$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \cdots + \binom{n}{r}.$$

5. Určte:
$$1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}.$$

6. V postupnosti $1, 9, 8, 9, 7, 3, 7, 6, 3, 9$ sa každý nasledujúci člen začínajúc piatym členom rovná poslednej cifre súčtu předošlých štyroch členov. Zistite, či sa vyskytnú ešte raz číslice $1, 9, 8, 9$ bezprostredne za sebou.

7. V postupnosti $1, 9, 8, 9, 7, 3, 7, 6, 3, 9$ sa každý nasledujúci člen začínajúc piatym členom rovná poslednej cifre súčtu předošlých štyroch členov. Zistite, či sa vyskytnú ešte raz číslice $3, 0, 7, 1$ bezprostredne za sebou.

8. Univerzálna postupnosť čísel $1, 2, \ldots, n$ je konečná postupnosť týchto čísel, pre ktorú platí, že vyškrtnutím niektorých členov dostaneme ľubovolnú permutáciu čísel $1, 2, \ldots, n$. Např. $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1$ je univerzálna postupnosť čísel $1, 2, 3$. Zistite aká je minimálna dĺžka univ. postupnosti čísel $1, 2, 3, 4$.

9. Dokážte, že ak $|M| = n$, potom $|P(M)| = 2^n$.

Hilbertov hotel

Predstavte si hotel, ktorý má nekonečne veľa izieb, pričom všetky tieto izby sú obsadené hosťami. Ak do hotela príde nový hosť, je možné ho v tomto hoteli ubytovať bez toho, aby sme vysťahovali nejakého hosťa z hotela? (hostí môžeme v rámci hotela presúvať z ich izby na nejakú inú).
Úloha sa dá skomlikovať, ak príde autobus s n novými hosťami. **Ďalšia komplikácia bude, ak nových hostí bude nekonečne veľa, prípadne ak príde nekonečne veľa autobusov s nekonečne veľkými posádkami. Skúste pomôcť pánovi Hilbertovi ubytovať hostí.**

Matematická indukcia a Dirichletov princíp

1. Pomocou matematickej indukcie dokážte binomickú vetu.
2. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 2$ platí:
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq \frac{2n}{n+1}.$$
3. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 2$ platí:
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n+1}.$$
4. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $n \geq 3$ platí:
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n.$$
5. Dokážte, že pre každé reálne číslo $a \geq -1$ a pre každé nenulové prirodzené číslo n platí:
$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$
Potom skúste túto nerovnosť využiť v dôkaze nerovnosti
$$\forall \in N; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

6. Dokážte, že pre rôzne kladné reálne čísla a, b a pre prirodzené číslo $n > 1$ platí:

$$2^{n-1}\left(a^n + b^n\right) > (a+b)^n.$$

7. Dokážte, že pre prirodzené $n \geq 1$ platí:

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}.$$

8. Nech F_i označuje $i-$tý člen Fibonacciho postupnosti. Dokážte, že

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}.$$

9. Daná je množina obsahujúca 10 prirodzených čísel medzi 1 a 99 (vrátane). Dokážte, že existujú dve disjunktné neprázdne podmnožiny tejto množiny s rovnakým súčtom svojich prvkov.

10. Dokážte, že každá 55 prvková podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$ obsahuje dve čísla, ktorých rozdiel je 9.

11. Dokážte, že každá množina n celých čísel obsahuje podmnožinu čísel, ktorých súčet je deliteľný čislom n.

12. Máme 10 bielych, 10 červených a 10 zelených ponožiek, okrem farby sú úplne identické. Koľko najmenej ich musíme vytiahnuť, aby sme si boli istí, že budeme schopní zložiť aspoň jeden homogénny pár?

13. Dokážte, že v Českej republike žije niekoľko osôb, ktoré majú rovnaký, nenulový počet vlasov na hlave.

14. Dokážte, že na každom mnohostene sa nájdu aspoň dve steny, ktoré majú rovnaký počet hrán.

15. Nech A je množina 19 navzájom rôznych prirodzených čísel, vybraných z aritmetickej postupnosti $1, 4, 7, \ldots, 100$. Dokážte, že A musí obsahovať dve rôzne čísla, ktorých súčet je 104.

16. Na večierku je n ľudí. Dokážte, že dvaja z nich poznajú rovnaký počet ľudí (spomedzi prítomných hostí).

17. Pán Ján Hypoch tak dlho otravoval lekára, až mu lekár predpísal lieky. Balenie obsahuje 48 tabletiek, ktoré má Ján spotrebovať v priebehu 30 dní. Ich konzumáciu si môže navrhnúť sám, ale musí dodržať pravidlo: každý deň musí zjesť aspoň jednu tabletku a posledná mu musí vyjsť

na 30. deň. V príbalovom letáku sa Ján dočital, že ak v priebehu nejakej postupnosti po sebe idúcich dní spotrebuje pacient práve 18 tabletiek, vypadajú mu zuby. A pokiaľ v priebehu nejakej postupnosti po sebe idúcich dní spotrebuje práve 11 tabletiek, odpadnú mu palce na nohách. Bude sa môcť Ján po skončení terapie uhryznúť do palca na nohe?

18. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ obsahuje akákoľvek permutácia čísel $1, 2, \ldots, n^2 + 1$ monotónnu podpostupnosť dĺžky aspoň $n + 1$.

19. Z každých 52 celých čísel vieme vybrať dve také, že ich rozdiel alebo súčet je deliteľný 100. Dokážte.

Dôkazy v teórii množín a princíp inklúzie a exklúzie

1. Dokážte, že ľubovoľná nekonečná množina M obsahuje spočítateľnú podmnožinu.
2. Dokážte, že ľubovoľná podmnožina spočítateľnej množiny je nanajvýš spočítateľná množina.
3. Dokážte, že zjednotenie nanajvýš spočítateľného systému nanajvýš spočítateľných množín je nanajvýš spočítateľná množina.
4. Dokážte, že interval $\langle a, b\rangle$ reálnej osi je ekvivalentný s ľubovoľným intervalom $\langle c, d\rangle$ reálnej osi.
5. Dokážte, že každá nekonečná množina M je ekvivalentná s niektorou svojou vlastnou podmnožinou.
6. Nech je M ľubovoľná množina a $P(M)$ jej potenčná množina. Dokážte, že $|M| < |P(M)|$.
7. Dokážte, že zobrazenie $f : A \to B$ je prosté práve vtedy keď pre všetky $C, D \subseteq A$ je
$$f(C \cap D) = f(C) \cap f(D).$$

8. Koľkými spôsobmi sa dajú zoradiť písmená A, D, E, K, L, N, P, O, R, S, V tak, že po vynechaní niektorých písmen nevznikne ani jedno zo slov PRASE, LES, SLON.
9. Koľkými spôsobmi sa dajú zoradiť písmená A, D, E, K, L, N, P, O, R, S, T, V tak, že po vynechaní niektorých písmen nevznikne ani jedno zo slov PAT, MAT, DRAK.
10. Koľkými spôsobmi sa dajú zoradiť písmená A, D, E, K, L, N, P, O, R, S, V tak, že po vynechaní niektorých písmen nevznikne ani jedno zo slov DEKA, ROPA, VODA.
11. Na večierku bolo 7 manželských párov. Kolkými spôsobmi je môžeme rozdeliť na 7 tanečných párov tak, aby ani jeden muž netancoval s svojou manželkou?
12. Množiny A, B, C sú podmnožiny množiny prirozených čísel. Vieme, že $|A| = 13, |B| = 17, |C| = 19, |A \cap B| < 10, |A \cap C| < 10, |B \cap C| < 10$. Koľko minimálne prvkov má množina $A \cup B \cup C$? Urobte čo najlepší odhad.
13. Máme 1985 množín, každá ma 45 prvkov a zjednotenie každých dvoch množín obsahuje práve 89 prvkov. Koľko prvkov obsahuje zjednotenie všetkých týchto 1985 množín?

Prvočísla

1. Nájdite také celé čísla x a y, že
$$754x + 221y = \text{nsd}(754, 221).$$

2. Dokážte, že pre každé prirodzené n je zlomok $\frac{21n+4}{14n+3}$ v základnom tvare.

3. Dokážte, že výrazy $2x + 3y, 9x + 5y$ sú děliteľné číslom 17 pre tie isté dvojice prirodzených čísel x, y.

4. Dokážte, že výrazy $23x + y, 19x + 3y$ sú děliteľné číslom 50 pre tie isté dvojice prirodzených čísel x, y.

5. Nech x, y sú kladné celé čísla také, že obe čísla $3x + 5y$ a $5x + 2y$ sú deliteľné číslom 60. Zdôvodnite, prečo číslo 60 delí aj súčet $2x + 3y$.

6. Päť prvočísel tvorí päť po sebe idúcich členov aritmetickej postupnosti s diferenciou $d = 6$. Určte tieto čísla.

7. Ukážte, že je možné nájsť 1000 po sebe idúcich prirodzených čísel, ktoré sú zložené.

8. Existuje 1 000 000 za sebou idúcich prirodzených čísel, z ktorých každé je deliteľné druhou mocninou nejakého prvočísla?

9. Dokážte, že ak má byť $P = 2^p - 1$ prvočíslo, je nutné, aby aj p bolo prvočíslo.

10. Nech p, q sú prvočísla väčšie ako 3. Potom číslo $p^2 + 7q^2 - 23$ nie je prvočíslo. Dokážte.

11. Dokážte, že súčin ľubovolného počtu prirodzených čísel tvaru $4n + 1$ je opäť číslo toho tvaru.

12. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel tvaru $4n + 1$.

13. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel tvaru $6n - 1$.

14. Nech $n > 2$. Potom aspoň jedno z čísel $2^n - 1, 2^n + 1$ je zložené. Dokážte.

15. Dokážte, že z ľubovoľne zvolených, navzájom rôznych 50 prvočísel možno vždy vybrať 13 čísel tak, že rozdiel každých dvoch z nich je deliteľný piatimi.

16. Nech p je prvočíslo. Dokážte, že každé z kombinačných čísel

$$\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \binom{p}{3}, \dots, \binom{p}{p-1}$$

je deliteľné číslom p.

17. Nech p je nepárne prvočíslo. Zistite počet takých podmnožín A množiny $\{1, 2, \cdots, 2p\}$, že

    - A obsahuje práve p prvkov
    - súčet všetkých prvkov množiny A je deliteľný číslom p.

18. Ak n je zložené číslo, tak vieme vždy nájsť prvočíslo $p \leq \sqrt{n}$, ktoré delí číslo n. Dokážte.

Deliteľnosť, Pozičný zápis, kongruencie

1. Ukážte, že číslo $2^{100} + 10$ je deliteľné trinástimi.
2. Ak n je prirodzené číslo, tak $n^5 - n$ je deliteľné piatimi. Dokážte.
3. Nech $2n+1$ a $3n+1$ sú úplné druhé mocniny. Dokážte, že potom číslo n je deliteľné číslom 40.
4. Dokážte, že každé dve po sebe idúce Fibonacciho čísla sú nesúdeliteľné.
5. Aké je posledné dvojčíslie čísla 3^{1234}?
6. Dokážte, že číslo 1000! končí 249 nulami.
7. Číslo 4444^{4444} zapísané v desiatkovej sústave má ciferný súčet A. Nech B je ciferný súčet čísla A. Nájdite ciferný súčet čísla B.
8. Dokážte, že každá podmnožina 55 čísel vybraných z množiny $\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$ musí obsahovať čísla, ktorých rozdiel je 10, 12, 13, ale nemusí obsahovať dvojicu čísel s rozdielom 11.
9. Dokážte, že 12 delí $n^4 - 4n^3 + 5n^2 - 2n, n > 0$.
10. Dokážte, že 13 delí $2^{70} + 3^{70}$.
11. Dokážte, že ak n delí nejaké Fibonacciho číslo, tak delí nekonečne veľa Fibonacciho čísel.
12. Dokážte, že neexistuje žiadne celé číslo $n > 1$, pre ktoré platí $n|(2^n-1)$.

13. Dokážte, že pre každé $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ platí $19 \left| \left(2^{2^{6k+2}} + 3 \right) \right.$.

14. Riešte rovnicu: $26x \equiv 4 \pmod 9$.

15. Nájdite všetky $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré platí $7 | (n \cdot 2^n + 1)$.

16. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré má číslo $2^n + n^2$ na mieste jednotiek číslicu 7. Svoju hypotézu potvrďte dôkazom.

17. Zistite, pre ktoré $n \in \mathbb{N}$ je číslo $2^{2^n} - 2^{n^2}$ deliteľné siedmimi.

18. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $127 | (2^{2^{2^{2n-1}}} + 111)$.

19. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $25 | (4^{2n+1} - 10n - 4)$.

20. Dokážte, že pre každé $k \in \mathbb{N}$ platí $37 \left| \left(2^{2^{6k+2}} - 16 \right) \right.$.

21. Nájdite všetky $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré platí $10 | (n^{10} + 1)$.

22. Dokážte, že $22 | (2^{15} + 3^{14} + 5^{13} + 2^{12})$.

23. Dokážte, že $13 | (16^{15} + 29^{14} + 42^{13})$.

24. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $3 | (2^{2n+1} + 1)$.

25. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $7 | (4^{3n+1} + 2^{3n+1} + 1)$.

26. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $12 | (n^4 - 4n^3 + 5n^2 - 2n)$.

27. Zistite, či platí $9 | (13^{12} + 12^{11} + 11^{10})$.

28. Dokážte, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $1897 | (2903^n - 803^n - 464^n + 261^n)$.