Homogénne sústavy lineárnych rovníc

Riešte sústavu rovníc:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
4x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 4x_4 & - & x_5 & = & 0
\end{array}$$

Sústavy lineárnych rovníc

- homogénne (na pravých stranách rovníc sú iba nuly)
- nehomogénne (na pravých stranách rovníc je aspoň jedna nenulová hodnota)

Pole

Definícia. $(F, \oplus, \odot)$ je **pole** práve vtedy, keď

- $(F, \oplus)$ je Abelova grupa
- $(F - \{0\}, \odot)$ je Abelova grupa, pričom 0 je neutrálny prvok operácie $\oplus$
- $\odot$ je distributívna vzhľadom na $\oplus$

Typické pole: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Matice

- **Definícia.** Nech $I = \{1, 2, \cdots, m\}$, $J = \{1, 2, \cdots, n\}$ a $(F, \oplus, \odot)$ nech je pole. Maticou typu $m \times n$ nad poľom F nazývame zobrazenie $A : I \times J \to F$. Obraz usporiadanej dvojice $[i, j]$ označujeme a_{ij} a hovoríme, že je prvok matice. Schématicky zapisujeme maticu v tvare tabuľky:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Ak $m = n$, hovoríme o štvorcovej matici, ak $m \neq n$, tak sa jedná o obdĺžnikovú maticu.

Matice, základné pojmy

- **vedúci prvok** nenulového riadku-prvý nenulový prvok v riadku
- **nulová matica** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$
- **diagonálna matica** $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$

  pričom $a_i \neq 0$
- **jednotková matica** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
- Zrejme diagonálna aj jednotková matica sú štvorcové.

Homogénne sústavy lineárnych rovníc

Riešte sústavu rovníc:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
4x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 4x_4 & - & x_5 & = & 0
\end{array}$$

Riešte sústavu rovníc:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\
4x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & = & 0 \\
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 4x_4 & - & x_5 & = & 0
\end{array}$$

Riešenie. Sústavu budeme riešiť pomocou matice sústavy-každý riadok odpovedá jednej rovnici sústavy. Budeme využívať **elementárne riadkové operácie (ero):**

- výmena dvoch riadkov
- vynásobenie rovnice nenulovým číslom
- pripočítanie ľubovolného násobku jednej rovnice k inej rovnici

Homogénne sústavy lineárnych rovníc, pokračovanie

- Maticu si pomocou ero upravíme na trojuholníkový tvar (pod hlavnou diagonálou budú nuly). Podrobný postup bol vysvetlený na prednáške.

Homogénne sústavy lineárnych rovníc, pokračovanie

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Posledná matica odpovedá sústave:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & & & = & 0 \end{array}$$

Posledná matica odpovedá sústave:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & & & = & 0 \end{array}$$

Teda máme 5 neznámych a iba tri rovnice, preto si dve neznáme zvolíme a ostatné pomocou nich vyjadríme. Zrejme z poslednej rovnice je $x_4 = 0$ a z druhej rovnice vidíme, že $x_2 = x_3$. Teda zvoľme $x_2 = t$ a $x_5 = s$. Potom $x_3 = t$ a x_1 si vyjadríme z prvej rovnice a dostaneme $x_1 = s - t$. Všimnite si, že $[0, 0, 0, 0, 0]$ je riešením sústavy a neplatí to iba pre túto konkrétnu sústavu, ale pre ľubovoľnú homogénnu sústavu lin. rovníc. Vyskúšajte si, že ak $[a, b, c, d, e]$ je riešením sústavy, tak aj $[p.a, p.b, p.c, p.d, p.e]$, kde $p \in R$ je riešením sústavy. Podobne, ak $[a, b, c, d, e]$ a $[k, l, m, n, o]$ sú riešenia sústavy, tak potom aj $[a + k, b + l, c + m, d + n, e + o]$ je riešením sústavy. Tieto vlastnosti majú všetky homogénne sústavy lin. rovníc.

Nehomogénne sústavy lineárnych rovníc

Riešte sústavu rovníc:
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 9x_3 & + & 8x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 18x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 12 \end{array}$$

Riešte sústavu rovníc:
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 9x_3 & + & 8x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 18x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 12 \end{array}$$

Riešenie. Sústavu budeme riešiť pomocou matice sústavy-každý riadok odpovedá jednej rovnici sústavy.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & -2 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & -3 \end{array}\right) \sim$$

Nehomogénne sústavy lineárnych rovníc, pokračovanie

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Posledná matica odpovedá sústave:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \\ & & x_2 & - & 7x_3 & + & 5x_4 & = & -1 \end{array}$$

Teda máme 4 neznáme a iba dve rovnice, preto si dve neznáme zvolíme a ostatné pomocou nich vyjadríme. Nech teda $x_3 = s, x_4 = t$, potom z druhej rovnice dostaneme $x_2 = 7s - 5t - 1$ a z prvej rovnice je $x_1 = 17t - 26s + 6$.

V $\mathbb{Z}_3$ riešte sústavu rovníc s parametrom a.

$$\begin{array}{ccccc} x & + & ay & = & 1 \\ ax & + & y & = & 2 \end{array}$$

V $\mathbb{Z}_3$ riešte sústavu rovníc s parametrom a.

$$\begin{array}{ccccc} x & + & ay & = & 1 \\ ax & + & y & = & 2 \end{array}$$

Riešenie. Zrejme a nadobúda iba hodnoty $0, 1, 2$. Preto pre jednotlivé hodnoty vyriešime konkrétne sústavy:

- $a = 0$, potom $x = 1, y = 2$.
- $a = 1$, potom

  $$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2. \end{array}$$

  Táto sústava evidentne nemá riešenie.

Sústavy s parametrom v $\mathbb{Z}_3$, pokračovanie

- $a = 2$, potom

  $$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & 2. \end{array}$$

  Na vyriešenie použijeme maticu:

  $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

  Prvý riadok pričítame k druhému a dostaneme:

  $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Nezabudnite, že pracujeme v poli $\mathbb{Z}_3$ a teda $1 + 2 = 0$.

  K poslednej matici prislúcha rovnica:

  $$x + 2y = 1.$$

Sústavy s parametrom v $\mathbb{Z}_3$, pokračovanie

- Keďže pracujeme v $\mathbb{Z}_3$, tak rovnica nemá nekonečne veľa riešení, ale len tri a dostaneme ich tak, že postupne za x dosadíme prvky zo Z_3 (teda 0,1,2) a dopočítame y (samozrejme postupovať sa dá aj opačne, dosadíme za y a vypočítame x.) Teda rovnici vyhovujú tieto dvojice: $[0, 2], [1, 0], [2, 1]$.

Sústavy s parametrom

V $\mathbb{R}$ *riešte sústavu rovníc s parametrom* a.

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}$$

V $\mathbb{R}$ riešte sústavu rovníc s parametrom a.

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array}$$

Riešenie. Pri riešení využijeme maticu sústavy a budeme ju upravovať na trojuholníkový tvar. Najprv vymeníme riadky tak, aby v prvom riadku na prvom mieste nebol parameter.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-a^2 \end{array}\right) \sim$$

Sústavy s parametrom, pokračovanie

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \\ 0 & 0 & 2-a^2-a & 1-a^3+a-a^2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-a^3 \\ 0 & 0 & (2+a).(1-a) & (1-a).(1+a)^2 \end{array}\right)$$

Z posledného riadku dostávame, že $(a+2).(1-a)\cdot z=(1-a)\cdot(a+1)^2$. Ak $(a+2).(1-a)\neq 0$, tak potom $z=\frac{(1-a)\cdot(a+1)^2}{(a+2).(1-a)}=\frac{(a+1)^2}{a+2}$ a po dosadení do zvyšných rovníc dostaneme: $y=\frac{1}{a+2}, x=-\frac{a+1}{a+2}$. Kedy je $(a+2).(1-a)=0$? Vtedy keď $a=-2$ alebo $a=1$. Preto tieto dva prípady musíme vyriešiť, aby sme dostali úplné riešenie sústavy s parametrom.

- $a = -2$, potom sústava má takúto maticu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

- Maticu upravíme na trojuholníkový tvar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right) \sim$$

Sústavy s parametrom, pokračovanie

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sústava prislúchajúca takejto matici nemá riešenie -poslednému riadku prislúcha rovnica: $0.x + 0.y + 0.z = 1$ a taká trojica, ktorá by vyhovovala neexistuje.

- $a = 1$, potom sústava má takúto maticu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Maticu upravíme:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Sústava prislúchajúca takejto matici je: $x + y + z = 1$ a má nekonečne veľa riešení. Napr. si y a z zvolím a x dopočítam, teda vyhovuje trojica $[1 - p - q, p, q]$, kde $p, q \in \mathbb{R}$.

Súčet matíc

- **súčet matíc:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & a_{14} + b_{14} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & a_{24} + b_{24} \end{pmatrix}$$

Súčet matíc

- **súčet matíc:**
  $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}$$
  $$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & a_{14}+b_{14} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & a_{24}+b_{24} \end{pmatrix}$$
- Zrejme $A + B = B + A$

Súčet matíc

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2-1 & -1+3 & 0+0 & 3-2 \\ -2+2 & 0+1 & 2+1 & -3+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Súčin matice a prvku poľa

- **súčin matice a prvku poľa**
$$c \cdot A = \begin{pmatrix} c.a_{11} & c.a_{12} & c.a_{13} & c.a_{14} \\ c.a_{21} & c.a_{22} & c.a_{23} & c.a_{24} \end{pmatrix}$$

Súčin matice a prvku poľa

$$3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3.2 & 3.(-1) & 3.0 & 3.3 \\ 3.(-2) & 3.0 & 3.2 & 3.(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 & 9 \\ -6 & 0 & 6 & -9 \end{pmatrix}$$

Transponovaná matica

- **transponovaná matica**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Transponovaná matica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Súčin matíc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1.0 + 2.1 + 0.1 & 1.1 + 2.0 + 0.1 \\ 0.0 + 1.1 + 0.1 & 0.1 + 1.0 + 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ a}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0.1 + 1.0 & 0.2 + 1.1 & 0.0 + 1.0 \\ 1.1 + 0.0 & 1.2 + 0.1 & 1.0 + 0.0 \\ 1.1 + 1.0 & 1.2 + 1.1 & 1.0 + 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Súčin matíc

- **Definícia.** Súčinom matíc $A = (a_{ij})_{m,n}, B = (b_{ij})_{n,r}$ nazývame maticu $C = (c_{ij})_{m,r}$, kde

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Súčin matíc

- **Definícia.** Súčinom matíc $A = (a_{ij})_{m,n}, B = (b_{ij})_{n,r}$ nazývame maticu $C = (c_{ij})_{m,r}$, kde

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

- Násobenie matíc **nie je** komutatívne

Súčin matíc

- **Definícia.** Súčinom matíc $A = (a_{ij})_{m,n}$, $B = (b_{ij})_{n,r}$ nazývame maticu $C = (c_{ij})_{m,r}$, kde

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

- Násobenie matíc **nie je** komutatívne
- Násobenie matíc je distributívne vzhľadom na sčítanie $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Súčin matíc

- **Definícia.** Súčinom matíc $A = (a_{ij})_{m,n}, B = (b_{ij})_{n,r}$ nazývame maticu $C = (c_{ij})_{m,r}$, kde

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

- Násobenie matíc **nie je** komutatívne
- Násobenie matíc je distributívne vzhľadom na sčítanie $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- Neutrálny prvok vzhľadom na násobenie štvorcových matíc je jednotková matica

Súčin matíc

- **Definícia.** Súčinom matíc $A = (a_{ij})_{m,n}, B = (b_{ij})_{n,r}$ nazývame maticu $C = (c_{ij})_{m,r}$, kde

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

- Násobenie matíc **nie je** komutatívne
- Násobenie matíc je distributívne vzhľadom na sčítanie $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- Neutrálny prvok vzhľadom na násobenie štvorcových matíc je jednotková matica
- K niektorým štvorcovým maticiam existujú inverzné matice, teda:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzná matica

Nájdite inverznú maticu k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Inverzná matica

Nájdite inverznú maticu k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie. Zrejme má platiť:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Úloha by sa dala riešiť tak, že zostavíme sústavu deviatich rovníc s deviatimi neznámymi, pri zostavení rovníc vychádzame z definície súčinu matíc, postup bol naznačený na prednáške. My však inverznú maticu budeme hľadať inak.

Inverzná matica, pokračovanie

- Zatiaľ budeme postupovať bez zdôvodnenia-naučíme sa iba postup, zdôvodnenie neskôr bude. Zapíšeme si maticu a hneď vedľa nej jednotkovú rovnakého typu:

  $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

  Teraz ich budeme upravovať tak, aby ľavá časť bola jednotková. Keď sa nám to podarí, tak pravá bude inverzná. Pozor, vo všeobecnosti sa nám to nemusí podariť, lebo nie každá matica má aj inverznú maticu.

Inverzná matica, pokračovanie

- Tak upravujeme:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

- Teda

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

je hľadaná inverzná matica. Overte si to!

- Máme danú sústavu lin. rovníc:

$$\begin{array}{lcrcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & c_2 \end{array}$$

Z prvej rovnice si vyjadríme x_1

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} \cdot (c_1 - a_{12} \cdot x_2)$$

dosadíme do druhej rovnice a vyjadríme si x_2

$$x_2 = \frac{c_2 \cdot a_{11} - c_1 \cdot a_{21}}{a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21}}.$$

Podobne si vyjadríme aj x_1

$$x_1 = \frac{c_1 \cdot a_{22} - c_2 \cdot a_{12}}{a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21}}.$$

Sústavy rovníc a determinanty

- Všimnite si, že menovatele sú v oboch prípadoch rovnaké a na ich zapamätanie nám poslúži táto schéma:

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & & a_{12} \\ & \pm & \\ a_{21} & & a_{22} \end{array}$$

Výsledok si označíme $|A|$.

- Podobne si schematicky vieme zapísať aj čitatele:

$$\text{pre} \quad x_1 : \quad \begin{array}{ccc} c_1 & & a_{12} \\ & \pm & \\ c_2 & & a_{22} \end{array}$$

Výsledok si označíme $|A_1|$.

$$\text{pre} \quad x_2 : \quad \begin{array}{ccc} a_{11} & & c_1 \\ & \pm & \\ a_{21} & & c_2 \end{array}$$

Výsledok si označíme $|A_2|$.

Sústavy rovníc a determinanty

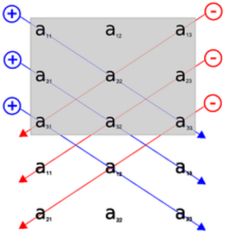
- Teda ak $|A| \neq 0$, tak riešenie sústavy dvoch lin. rovníc vieme zapísať ako
$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}.$$
- Všimnite si teraz takúto sústavu:
$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & c_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & c_3 \end{array}$$
- Keby sme zopakovali postup na vyjadrenie x_1, tak dostaneme:

$$x_1 = \frac{c_1(a_{22}a_{33} - a_{23}.a_{32}) - c_2(a_{12}.a_{33} - a_{13}.a_{32}) + c_3(a_{12.23} - a_{13}.a_{22})}{a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{13}.a_{21}.a_{32} + a_{12}.a_{23}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31}}$$

- Keby sme vyjadrili x_2, x_3 menovatele by boli rovnaké.

Sústavy rovníc a determinanty

- Na výpočet menovateľa nám pomôže schéma-tzv. Sarrusovo pravidlo:



- Ak nahradíme prvý stĺpec pravými stranami rovníc, tak dostaneme čitateľ pre x_1, ak takto nahradíme druhý stĺpec, dostaneme čitateľ pre x_2 a nakoniec, ak takto nahradíme tretí stĺpec, tak dostaneme čitateľ pre x_3. Ak si znovu označíme menovateľ ako $|A|$, čitateľ pre x_i ako $|A_i|$ a $|A| \neq 0$, tak potom

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}.$$

Riešte sústavu:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -9x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

Riešte sústavu:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -9x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

Riešenie. Pomocou Sarrusovho pravidla vypočítame postupne

$$|A| = 1 \neq 0; |A_1| = 1; |A_2| = 7; |A_3| = -5.$$

Potom

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 1, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = 7, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = -5.$$

- **Definícia.** Nech $A = (a_{ij})$ je štvorcová matica stupňa n nad poľom F. Determinantom matice A nazývame $|A|$ poľa F definovaný rovnosťou:

$$|A| = \sum_{h_1, h_2, \cdots, h_n} (-1)^{J(h_1, h_2, \cdots, h_n)} a_{1h_1}.a_{2h_2} \cdots a_{nh_n},$$

kde $(h_1, h_2, \cdots, h_n)$ je permutácia množiny $\{1, 2, \cdots, n\}$, $J(h_1, h_2, \cdots, h_n)$ je počet inverzií v danej permutácii a na pravej strane rovnosti je pre každé poradie $(h_1, h_2, \cdots, h_n)$ práve jeden sčítanec $(-1)^{J(h_1, h_2, \cdots, h_n)} a_{1h_1}.a_{2h_2} \cdots a_{nh_n}$.

- Počet všetkých permutácií množiny $\{1, 2, \cdots, n\}$ je $n!$.
- Ak o usporiadanej dvojici $[h_i, h_j]$ platí $i < j$ ale $h_i > h_j$, tak hovoríme, že h_i, h_j je inverzia v danej permutácii.

Determinant

Vypočítajte determinat matice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Vypočítajte determinat matice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Riešenie. Počet permutácií množiny $\{1,2,3\}$ je $3! = 6$. Určíme počet inverzií pre jednotlivé permutácie. $J(1,2,3) = 0, J(1,3,2) = 1, J(2,1,3) = 1, J(2,3,1) = 2, J(3,1,2) = 2, J(3,2,1) = 3$. Preto $|A| = (-1)^0.a_{11}.a_{22}.a_{33} + (-1)^1.a_{11}.a_{23}.a_{32} + (-1)^1.a_{12}.a_{21}.a_{33} + (-1)^2.a_{12}.a_{23}.a_{31} + (-1)^2.a_{13}.a_{21}.a_{32} + (-1)^3.a_{13}.a_{22}.a_{31} =$
$= a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{13}.a_{22}.a_{31}$.
Pre matice stupňa 2 a 3 máme jednoduché schémy na výpočet determinantu, pre matice vyššieho stupňa si nejaké postupy ukážeme, počítať determinant podľa definície neodporúčam.

Veta. Nech je daná sústava rovníc:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & c_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & c_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & +\cdots+ & a_{nn}x_n & = & c_n
\end{array}$$

Označme A sústavu matice. Ak determinant matice A je nenulový, tak sústava má jediné riešenie: $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \dots x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$, kde A_i je matica, ktorá vznikne z matice A tak, že v nej nahradíme prvky $i-$teho stĺpca prvkami $c_1, c_2, \dots c_n$.

Laplaceov rozvoj

- Nech $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Determinant $|A_{ij}|$ nazývame **subdeterminant** matice A prislúchajúci prvku a_{ij}. Prvok

  $$\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$$

  nazývame **algebraický doplnok** prislúchajúci k prvku a_{ij}.
- **Veta.**(Laplaceov rozvoj) Pre determinant štvorcovej matice stupňa n platí:
  - $|A| = a_{i1}\mathcal{A}_{i1} + a_{i2}\mathcal{A}_{i2} + \cdots + a_{in}\mathcal{A}_{in}$
  - $|A| = a_{1j}\mathcal{A}_{1j} + a_{2j}\mathcal{A}_{2j} + \cdots + a_{nj}\mathcal{A}_{nj}$

Pomocou Laplaceovho rozvoja vypočítajte determinant matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- *rozvoj urobte podľa 2. riadku*
- *rozvoj urobte podľa 3. stĺpca*

Pomocou Laplaceovho rozvoja vypočítajte determinant matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- *rozvoj urobte podľa 2. riadku*
- *rozvoj urobte podľa 3. stĺpca*

Riešenie.

- rozvoj podľa 2. riadku:
  $|A| =$
  $(-1).(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$
  $(-1).(-1).(2.3 - 1.0) + 2.1.(1.3 - 0.0) = 12.$

- rozvoj podľa 3. stĺpca:

$$|A| = 0.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0.(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$3.(-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3.(1.2 - (-2)) = 12.$$

Vlastnosti determinantov

- Ak A obsahuje nulový riadok, potom $|A| = 0$.
- Ak B vznikne z A výmenou dvoch riadkov, potom $|B| = -|A|$.
- Ak A má dva rovnaké riadky, potom $|A| = 0$.
- Ak B vznikne z A vynásobením jedného riadku číslom λ, potom $|B| = \lambda|A|$.
- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{j1} + b_{j1} & a_{j2} + b_{j2} & \cdot & a_{1n} + b_{jn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdot & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Vlastnosti determinantov

- Determinant sa nezmení, ak k ľub. riadku pripočítame násobok iného riadku.
- Determinant trojuholníkovej matice je rovný súčinu prvkov na hlavnej diagonále.
- Determinant jednotkovej matice je rovný 1.
- $|A.B| = |A|.|B|$
- $|A| = |A^T|$.
- Teda pri výpočte determinantu je vhodné upraviť maticu na trojuholníkový tvar pomocou elementárnych riadkových operácií (treba si pamätať počet výmen riadkov) a na záver stačí vynásobiť prvky na diagonále.

Vypočítajte determinant matice:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Vypočítajte determinant matice:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Riešenie. Na prvý pohľad by sa zdalo, že najvýhodnejšie je urobiť rozvoj podľa druhého stĺpca. Ak však pripočítame dvojnásobok druhého riadku k prvému, tak dostaneme maticu:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Na základe vlastností determinantov vieme, že $|A| = |A'|$.

Determinanty, pokračovanie

- Preto urobíme rozvoj podľa prvého riadku:

$$|A| = |A'| = 7.(-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -7.\left((-2).3.(-1) + 1.1.1 + 2.0.(-4) - (-1).3.2 - (-4).1.(-2) - (-1).0.1\right) =$$

$$= (-7).(-7) = 49.$$

Vlastnosti determinantov

Bez priameho výpočtu dokážte:

$$= \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

- $|A_{ij}|$-subdeterminant prislúchajúci k prvku a_{ij}-vynechať $i-$ ty riadok, $j-$ty stĺpec
- $\mathcal{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$-algebraický doplnok prvku a_{ij}
- $A^* = \mathcal{A}_{ij}^T$-adjungovaná matica
- ak $|A| \neq 0$, tak $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$

Vypočítajte $|A|$, *nájdite* A^*, A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vypočítajte $|A|$, *nájdite* A^*, A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie. Použitím Sarrusovho pravidla vypočítame determinant:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Po diagonálach dostaneme

$|A| = 1.1.0 + 1.1.1 + 2.0.2 - 1.1.2 - (-2).1.1. - 0.0.1 = 1$

Determinanty a inverzné matice, pokračovanie

- $A^* = \mathcal{A}_{ij}^T$ Postupne si vypočítame $\mathcal{A}_{ij}$:

$$\mathcal{A}_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad \mathcal{A}_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4;$$

$$\mathcal{A}_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad \mathcal{A}_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\mathcal{A}_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2; \quad \mathcal{A}_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$\mathcal{A}_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1;$$

$$\mathcal{A}_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3; \quad \mathcal{A}_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Determinanty a inverzné matice, pokračovanie

- Potom

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- A keďže $|A| = 1$, potom $A^* = A^{-1}$.