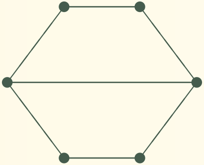
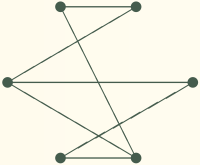
4 Pojem grafu, ve zkratce

Třebaže *grafy* jsou jen jednou z mnoha struktur v matematice a vlastně pouze speciálním případem binárních relací, vydobyly si svou užitečností a názorností důležité místo na slunci.

Neformálně řečeno, graf se skládá z *vrcholů* (představme si je jako nakreslené „puntíky“) a z *hran*, které spojují dvojice vrcholů mezi sebou.

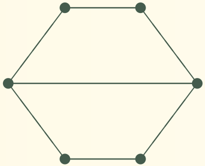


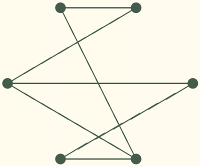


4 Pojem grafu, ve zkratce

Třebaže *grafy* jsou jen jednou z mnoha struktur v matematice a vlastně pouze speciálním případem binárních relací, vydobyly si svou užitečností a názorností důležité místo na slunci.

Neformálně řečeno, graf se skládá z *vrcholů* (představme si je jako nakreslené „puntíky“) a z *hran*, které spojují dvojice vrcholů mezi sebou.



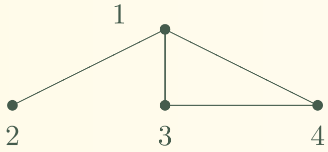


Stručný přehled lekce

* Zavedení a pochopení grafů, jejich základní pojmy.
* Příklady běžných tříd grafů, podgrafy a isomorfismus, souvislost.
* Stromy a jejich speciální vlastnosti.

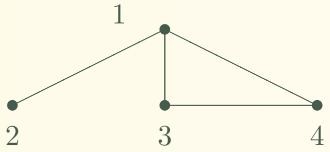
4.1 Definice grafu

Definice 4.1. **Graf** (jednoduchý neorient.) je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je množina *vrcholů* a E je množina *hran* – množina vybraných dvouprvkových podmnožin množiny vrcholů.



4.1 Definice grafu

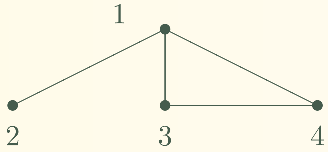
Definice 4.1. **Graf** (jednoduchý neorient.) je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je množina *vrcholů* a E je množina *hran* – množina vybraných dvouprvkových podmnožin množiny vrcholů.



Značení: Hranu mezi vrcholy u a v píšeme jako $\{u, v\}$, nebo zkráceně uv. Vrcholy spojené hranou jsou *sousední* a hrana uv *vychází* z vrcholů u a v. Na množinu vrcholů grafu G odkazujeme jako na $V(G)$, na množinu hran $E(G)$.

4.1 Definice grafu

Definice 4.1. **Graf** (jednoduchý neorient.) je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je množina *vrcholů* a E je množina *hran* – množina vybraných dvouprvkových podmnožin množiny vrcholů.



Značení: Hranu mezi vrcholy u a v píšeme jako $\{u, v\}$, nebo zkráceně uv.
Vrcholy spojené hranou jsou *sousední* a hrana uv *vychází* z vrcholů u a v.
Na množinu vrcholů grafu G odkazujeme jako na $V(G)$, na množinu hran $E(G)$.

Grafy se často zadávají přímo názorným obrázkem, jinak je lze formálně zadat výčtem vrcholů a výčtem hran. Například:

$$V = \{1, 2, 3, 4\}, \quad E = \Big\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}\Big\}$$

Na graf se lze dívat také jako na symetrickou ireflexivní relaci, kde hrany tvoří právě dvojice prvků z této relace.

Stupně vrcholů v grafu

Definice 4.2. **Stupněm vrcholu** v v grafu G rozumíme počet hran vycházejících z v. Stupeň v v grafu G značíme $d_G(v)$.

Stupně vrcholů v grafu

Definice 4.2. **Stupněm vrcholu** v v grafu G rozumíme počet hran vycházejících z v. Stupeň v v grafu G značíme $d_G(v)$.

Slovo „vycházející“ zde nenaznačuje žádný směr; je totiž obecnou konvencí u neorientovaných grafů říkat, že hrana vychází z obou svých konců zároveň.

Stupně vrcholů v grafu

Definice 4.2. Stupněm vrcholu v v grafu G rozumíme počet hran vycházejících z v. Stupeň v v grafu G značíme $d_G(v)$.

Slovo „vycházející“ zde nenaznačuje žádný směr; je totiž obecnou konvencí u neorientovaných grafů říkat, že hrana vychází z obou svých konců zároveň.

Definice: Graf je d-*regulární*, pokud všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň d.

Stupně vrcholů v grafu

Definice 4.2. **Stupněm vrcholu** v v grafu G
rozumíme počet hran vycházejících z v. Stupeň v v grafu G značíme $d_G(v)$.

Slovo „vycházející“ zde nenaznačuje žádný směr; je totiž obecnou konvencí u neorientovaných grafů říkat, že hrana vychází z obou svých konců zároveň.

Definice: Graf je *d-regulární*, pokud všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň d.

Značení: *Nejvyšší* stupeň v grafu G značíme $\Delta(G)$ a *nejnižší* $\delta(G)$.

Stupně vrcholů v grafu

Definice 4.2. **Stupněm vrcholu** v v grafu G rozumíme počet hran vycházejících z v. Stupeň v v grafu G značíme $d_G(v)$.

Slovo „vycházející“ zde nenaznačuje žádný směr; je totiž obecnou konvencí u neorientovaných grafů říkat, že hrana vychází z obou svých konců zároveň.

Definice: Graf je d-*regulární*, pokud všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň d.

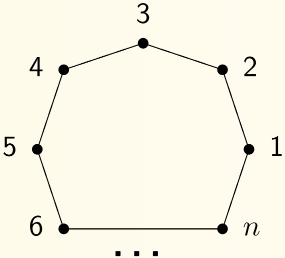
Značení: *Nejvyšší* stupeň v grafu G značíme $\Delta(G)$ a *nejnižší* $\delta(G)$.

Věta 4.3. *Součet stupňů v grafu je vždy sudý, roven dvojnásobku počtu hran.*

Běžné typy grafů

Kružnice délky n má $n \geq 3$ různých vrcholů spojených „do jednoho cyklu“ n hranami:

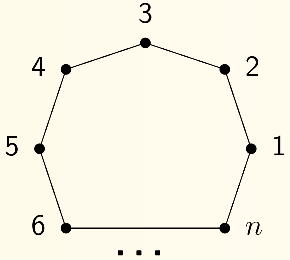
$\boldsymbol{C_n}$



Běžné typy grafů

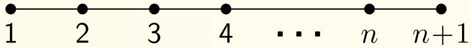
Kružnice délky n má $n \geq 3$ různých vrcholů spojených „do jednoho cyklu“ n hranami:

C_n



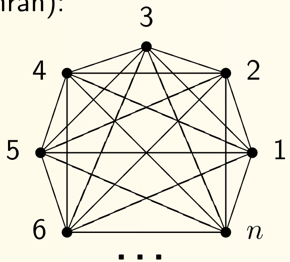
Cesta délky $n \geq 0$ má $n+1$ různých vrcholů spojených „za sebou“ n hranami:

P_n



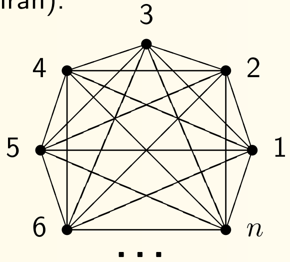
Úplný graf na $n \geq 1$ vrcholech má n různých vrcholů spojených po všech dvojicích (tj. celkem $\binom{n}{2}$ hran):

K_n



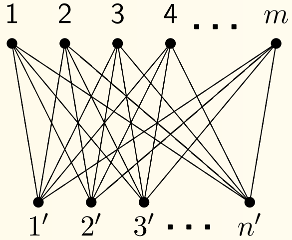
Úplný graf na $n \geq 1$ vrcholech má n různých vrcholů spojených po všech dvojicích (tj. celkem $\binom{n}{2}$ hran):

K_n



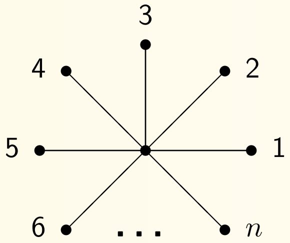
Úplný bipartitní graf na $m \geq 1$ a $n \geq 1$ vrcholech má $m + n$ vrcholů ve dvou skupinách (partitách), přičemž hranami jsou spojeny všechny $m \cdot n$ dvojice z různých skupin:

$K_{m,n}$



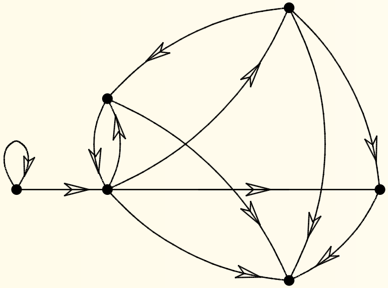
Hvězda s $n \geq 1$ rameny je zvláštní název pro úplný bipartitní graf $K_{1,n}$:

$\boldsymbol{S_n}$



Zmínka o orientovaných grafech

V Lekci 9 si zavedeme také takzvané *orientované grafy*, které každé hraně přiřazují jistý směr. Formálně orientované grafy budou mít množinu orientovaných hran $A \subseteq V(G) \times V(G)$ a zobrazíme je takto...



4.2 Podgrafy a Isomorfismus

Definice: *Podgrafem* grafu G rozumíme libovolný graf H na podmnožině vrcholů $V(H) \subseteq V(G)$, který má za hrany libovolnou podmnožinu hran grafu G majících oba vrcholy ve $V(H)$.

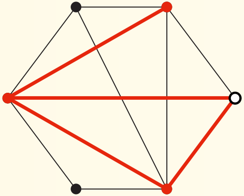
Píšeme $H \subseteq G$, tj. stejně jako množinová inkluze (ale význam je trochu jiný).

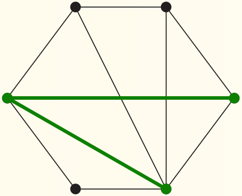
4.2 Podgrafy a Isomorfismus

Definice: *Podgrafem* grafu G rozumíme libovolný graf H na podmnožině vrcholů $V(H) \subseteq V(G)$, který má za hrany libovolnou podmnožinu hran grafu G majících oba vrcholy ve $V(H)$.

Píšeme $H \subseteq G$, tj. stejně jako množinová inkluze (ale význam je trochu jiný).

Na následujícím obrázku vidíme zvýrazněné podmnožiny vrcholů hran. Proč se vlevo nejedná o podgraf? Obrázek vpravo už podgrafem je.



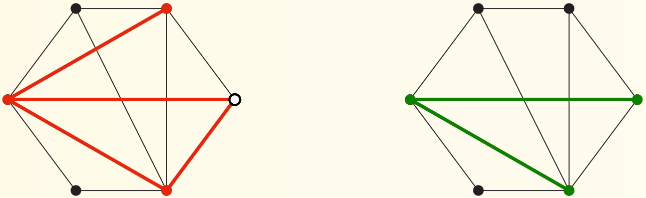


4.2 Podgrafy a Isomorfismus

Definice: *Podgrafem* grafu G rozumíme libovolný graf H na podmnožině vrcholů $V(H) \subseteq V(G)$, který má za hrany libovolnou podmnožinu hran grafu G majících oba vrcholy ve $V(H)$.

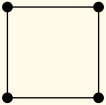
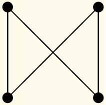
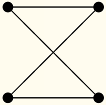
Píšeme $H \subseteq G$, tj. stejně jako množinová inkluze (ale význam je trochu jiný).

Na následujícím obrázku vidíme zvýrazněné podmnožiny vrcholů hran. Proč se vlevo nejedná o podgraf? Obrázek vpravo už podgrafem je.

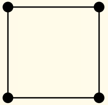
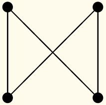
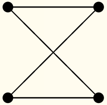


Definice: *Indukovaným podgrafem* je podgraf $H \subseteq G$ takový, který obsahuje všechny hrany grafu G mezi dvojicemi vrcholů z $V(H)$.

„Stejnost“ grafů


$\stackrel{?}{=}$

$\stackrel{?}{=}$


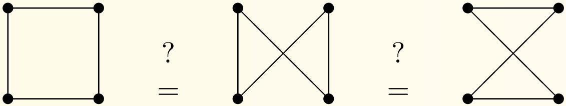
„Stejnost“ grafů

Definice 4.4. **Isomorfismus** $\simeq$ grafů G a H
je bijektivní zobrazení $f : V(G) \to V(H)$, pro které každá dvojice $u, v \in V(G)$ je spojená hranou v G právě, když je dvojice $f(u), f(v)$ spojená hranou v H.

Grafy G a H jsou *isomorfní*, $G \simeq H$, pokud mezi nimi existuje isomorfismus.

„Stejnost“ grafů



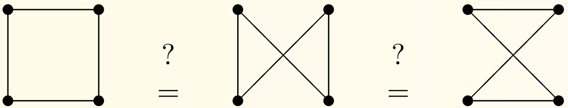
Definice 4.4. **Isomorfismus** $\simeq$ grafů G a H
je bijektivní zobrazení $f : V(G) \to V(H)$, pro které každá dvojice $u, v \in V(G)$ je spojená hranou v G právě, když je dvojice $f(u), f(v)$ spojená hranou v H.

Grafy G a H jsou *isomorfní*, $G \simeq H$, pokud mezi nimi existuje isomorfismus.

Fakt: Mějme isomorfismus f grafů G a H. Pak platí následující

* G a H mají stejný počet hran,
* f zobrazuje na sebe vrcholy stejných stupňů, tj. $d_G(v) = d_H(f(v))$.

„Stejnost“ grafů



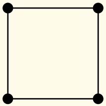
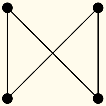
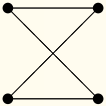
Definice 4.4. **Isomorfismus** $\simeq$ grafů G a H
je bijektivní zobrazení $f : V(G) \to V(H)$, pro které každá dvojice $u, v \in V(G)$ je spojená hranou v G právě, když je dvojice $f(u), f(v)$ spojená hranou v H.

Grafy G a H jsou *isomorfní*, $G \simeq H$, pokud mezi nimi existuje isomorfismus.

Fakt: Mějme isomorfismus f grafů G a H. Pak platí následující

* G a H mají stejný počet hran,
* f zobrazuje na sebe vrcholy stejných stupňů, tj. $d_G(v) = d_H(f(v))$.

„Stejnost“ grafů

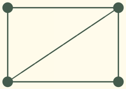
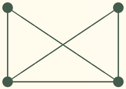
 $\overset{?}{=}$  $\overset{?}{=}$ 

Definice 4.4. **Isomorfismus** $\simeq$ grafů G a H
je bijektivní zobrazení $f : V(G) \to V(H)$, pro které každá dvojice $u, v \in V(G)$ je spojená hranou v G právě, když je dvojice $f(u), f(v)$ spojená hranou v H.

Grafy G a H jsou *isomorfní*, $G \simeq H$, pokud mezi nimi existuje isomorfismus.

Fakt: Mějme isomorfismus f grafů G a H. Pak platí následující

* G a H mají stejný počet hran,
* f zobrazuje na sebe vrcholy stejných stupňů, tj. $d_G(v) = d_H(f(v))$.

U nakreslených dvou grafů objevíme isomorfismus velmi snadno – podíváme se, jak si odpovídají vrcholy stejných stupňů.

Příklad 4.5. *Jsou následující dva grafy isomorfní?*

Pokud mezi nakreslenými dvěma grafy hledáme isomorfismus, nejprve se podíváme, zda mají stejný počet vrcholů a hran.

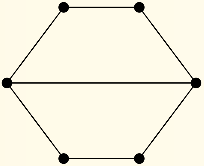
Příklad 4.5. *Jsou následující dva grafy isomorfní?*

Pokud mezi nakreslenými dvěma grafy hledáme isomorfismus, nejprve se podíváme, zda mají stejný počet vrcholů a hran. Mají. Pak se podíváme na stupně vrcholů a zjistíme, že oba mají stejnou posloupnost stupňů $2, 2, 2, 2, 3, 3$.

Příklad 4.5. *Jsou následující dva grafy isomorfní?*

Pokud mezi nakreslenými dvěma grafy hledáme isomorfismus, nejprve se podíváme, zda mají stejný počet vrcholů a hran. Mají. Pak se podíváme na stupně vrcholů a zjistíme, že oba mají stejnou posloupnost stupňů $2, 2, 2, 2, 3, 3$. Takže ani takto jsme mezi nimi nerozlišili a mohou (nemusejí!) být isomorfní. Dále tedy nezbývá, než zkoušet všechny přípustné možnosti zobrazení isomorfismu z levého grafu do pravého.

Příklad 4.5. *Jsou následující dva grafy isomorfní?*



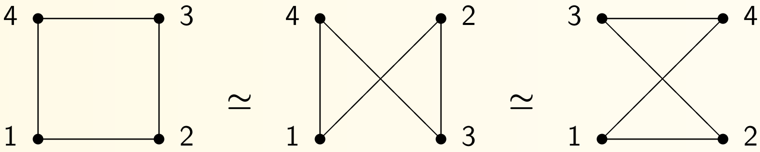
Pokud mezi nakreslenými dvěma grafy hledáme isomorfismus, nejprve se podíváme, zda mají stejný počet vrcholů a hran. Mají. Pak se podíváme na stupně vrcholů a zjistíme, že oba mají stejnou posloupnost stupňů $2, 2, 2, 2, 3, 3$. Takže ani takto jsme mezi nimi nerozlišili a mohou (nemusejí!) být isomorfní. Dále tedy nezbývá, než zkoušet všechny přípustné možnosti zobrazení isomorfismu z levého grafu do pravého.

Na levém grafu si pro ulehčení všimněme, že oba vrcholy stupně tři jsou si symetrické, proto si bez újmy na obecnosti můžeme vybrat, že vrchol označený 1 se zobrazí na $1'$. Druhý vrchol stupně tři, označený 4, se musí zobrazit na analogický vrchol druhého grafu $4'$. A zbytek již plyne snadno:

□

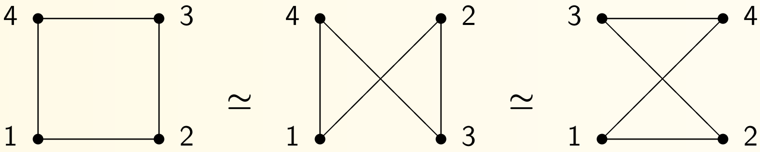
Důsledek: Stejnost grafů jako isomorfismus!

Graf G $\longleftrightarrow$ Celá *třída isomorfismu* grafu G



Důsledek: Stejnost grafů jako isomorfismus!

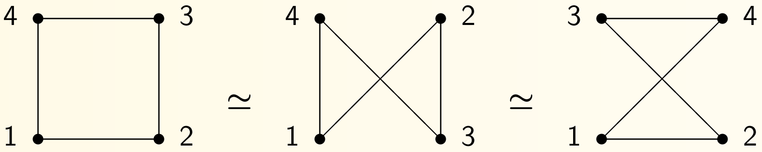
Graf G $\longleftrightarrow$ Celá *třída isomorfismu* grafu G



Je uvedený přístup, tj. zaměňování konkrétního grafu za celou jeho třídu isomorfismu, v matematice neobvyklý?

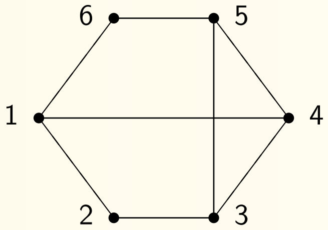
Důsledek: Stejnost grafů jako isomorfismus!

Graf G $\longleftrightarrow$ Celá *třída isomorfismu* grafu G



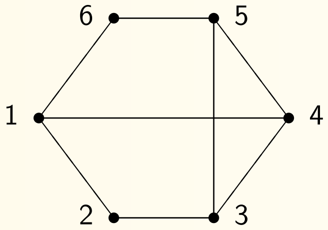
Je uvedený přístup, tj. zaměňování konkrétního grafu za celou jeho třídu isomorfismu, v matematice neobvyklý? Ne, například už v geometrii jste říkali „čtverec o straně 2“ či „jednotkový kruh“ a podobně, aniž jste měli na mysli konkrétní obrázek, nýbrž celou třídu všech těchto shodných objektů.

Další grafové pojmy



Definice: Mějme libovolný graf G.

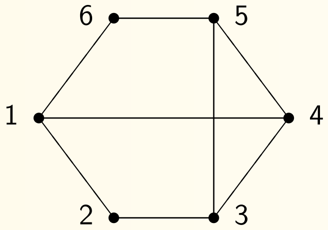
Další grafové pojmy



Definice: Mějme libovolný graf G.

* Podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějaké kružnici, říkáme *kružnice v* G.
* Speciálně říkáme *trojúhelník* kružnici délky 3.

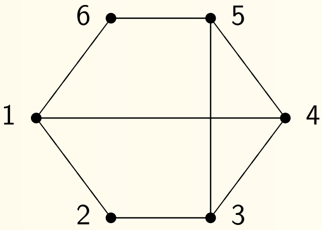
Další grafové pojmy



Definice: Mějme libovolný graf G.

* Podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějaké kružnici, říkáme *kružnice v* G.
* Speciálně říkáme *trojúhelník* kružnici délky 3.
* Podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějaké cestě, říkáme *cesta v* G.

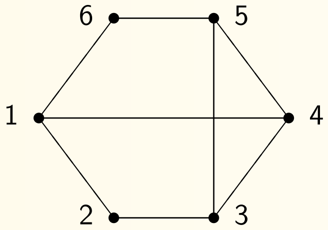
Další grafové pojmy



Definice: Mějme libovolný graf G.

- ∗ Podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějaké kružnici, říkáme *kružnice v* G.
- ∗ Speciálně říkáme *trojúhelník* kružnici délky 3.
- ∗ Podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějaké cestě, říkáme *cesta v* G.
- ∗ Podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějakému úplnému grafu, říkáme *klika v* G.
- ∗ Podmnožině vrcholů $X \subseteq V(G)$, mezi kterými nevedou v G vůbec žádné hrany, říkáme *nezávislá množina* X *v* G.

Další grafové pojmy



Definice: Mějme libovolný graf G.

- Podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějaké kružnici, říkáme *kružnice v* G.
- Speciálně říkáme *trojúhelník* kružnici délky 3.
- Podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějaké cestě, říkáme *cesta v* G.
- Podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějakému úplnému grafu, říkáme *klika v* G.
- Podmnožině vrcholů $X \subseteq V(G)$, mezi kterými nevedou v G vůbec žádné hrany, říkáme *nezávislá množina* X *v* G.
- Indukovanému podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějaké kružnici, říkáme *indukovaná kružnice v* G.

4.3 Souvislost grafů, komponenty

Důležitou globální vlastností grafů je souvislost, tedy možnost se v nich pohybovat odkudkoliv kamkoliv podél jeho hran, neboli po cestách v grafu.

4.3 Souvislost grafů, komponenty

Důležitou globální vlastností grafů je souvislost, tedy možnost se v nich pohybovat odkudkoliv kamkoliv podél jeho hran, neboli po cestách v grafu.

Lema 4.6. *Mějme relaci $\sim$ na množině vrcholů $V(G)$ libovolného grafu G takovou, že pro dva vrcholy $x \sim y$ právě když existuje v G cesta začínající v x a končící v y. Pak $\sim$ je relací ekvivalence.*

4.3 Souvislost grafů, komponenty

Důležitou globální vlastností grafů je souvislost, tedy možnost se v nich pohybovat odkudkoliv kamkoliv podél jeho hran, neboli po cestách v grafu.

Lema 4.6. *Mějme relaci $\sim$ na množině vrcholů $V(G)$ libovolného grafu G takovou, že pro dva vrcholy $x \sim y$ právě když existuje v G cesta začínající v x a končící v y. Pak $\sim$ je relací ekvivalence.*

Důkaz.

- Relace $\sim$ je reflexivní, neboť každý vrchol je spojený sám se sebou cestou délky 0.

4.3 Souvislost grafů, komponenty

Důležitou globální vlastností grafů je souvislost, tedy možnost se v nich pohybovat odkudkoliv kamkoliv podél jeho hran, neboli po cestách v grafu.

Lema 4.6. *Mějme relaci $\sim$ na množině vrcholů $V(G)$ libovolného grafu G takovou, že pro dva vrcholy $x \sim y$ právě když existuje v G cesta začínající v x a končící v y. Pak $\sim$ je relací ekvivalence.*

Důkaz.

- Relace $\sim$ je reflexivní, neboť každý vrchol je spojený sám se sebou cestou délky 0.
- Symetrická je také, protože cestu z x do y snadno v neorientovaném grafu obrátíme na cestu z y do x.

4.3 Souvislost grafů, komponenty

Důležitou globální vlastností grafů je souvislost, tedy možnost se v nich pohybovat odkudkoliv kamkoliv podél jeho hran, neboli po cestách v grafu.

Lema 4.6. *Mějme relaci $\sim$ na množině vrcholů $V(G)$ libovolného grafu G takovou, že pro dva vrcholy $x \sim y$ právě když existuje v G cesta začínající v x a končící v y. Pak $\sim$ je relací ekvivalence.*

Důkaz.

- Relace $\sim$ je reflexivní, neboť každý vrchol je spojený sám se sebou cestou délky 0.
- Symetrická je také, protože cestu z x do y snadno v neorientovaném grafu obrátíme na cestu z y do x.
- Pro důkaz tranzitivity si označme P cestu z x do y a Q cestu z y do z. Pak $P \cup Q$ nemusí být cesta; mohou se navzájem protínat.

4.3 Souvislost grafů, komponenty

Důležitou globální vlastností grafů je souvislost, tedy možnost se v nich pohybovat odkudkoliv kamkoliv podél jeho hran, neboli po cestách v grafu.

Lema 4.6. *Mějme relaci $\sim$ na množině vrcholů $V(G)$ libovolného grafu G takovou, že pro dva vrcholy $x \sim y$ právě když existuje v G cesta začínající v x a končící v y. Pak $\sim$ je relací ekvivalence.*

Důkaz.

- Relace $\sim$ je reflexivní, neboť každý vrchol je spojený sám se sebou cestou délky 0.
- Symetrická je také, protože cestu z x do y snadno v neorientovaném grafu obrátíme na cestu z y do x.
- Pro důkaz tranzitivity si označme P cestu z x do y a Q cestu z y do z. Pak $P \cup Q$ nemusí být cesta; mohou se navzájem protínat. Avšak pokud označíme $P' \subseteq P$ část cesty z x do prvního vrcholu z v průniku s Q a $Q' \subseteq Q$ zbytek druhé cesty od z, tak $P' \cup Q'$ už je cesta z x do z.

$\square$

Definice 4.7. **Komponentami souvislosti** grafu G nazveme třídy ekvivalence výše popsané (Lema 7.6) relace $\sim$ na $V(G)$.

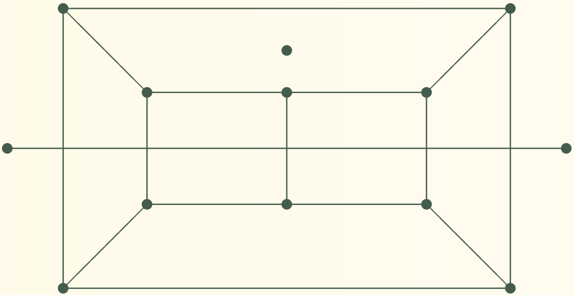
Definice 4.7. **Komponentami souvislosti** grafu G nazveme třídy ekvivalence výše popsané (Lema 7.6) relace $\sim$ na $V(G)$.

Jinak se také komponentami souvislosti myslí podgrafy indukované na těchto třídách ekvivalence.

Definice 4.7. **Komponentami souvislosti** grafu G nazveme třídy ekvivalence výše popsané (Lema 7.6) relace $\sim$ na $V(G)$.

Jinak se také komponentami souvislosti myslí podgrafy indukované na těchto třídách ekvivalence.

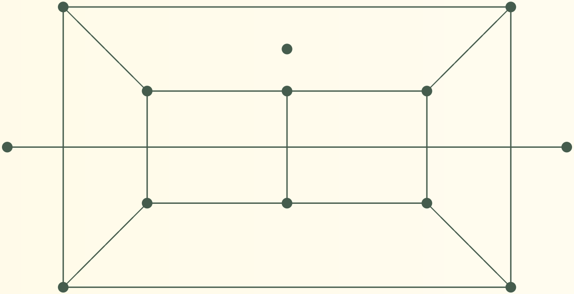
Podívejte se, kolik komponent souvislosti má tento graf:



Definice 4.7. Komponentami souvislosti grafu G nazveme třídy ekvivalence výše popsané (Lema 7.6) relace $\sim$ na $V(G)$.

Jinak se také komponentami souvislosti myslí podgrafy indukované na těchto třídách ekvivalence.

Podívejte se, kolik komponent souvislosti má tento graf:



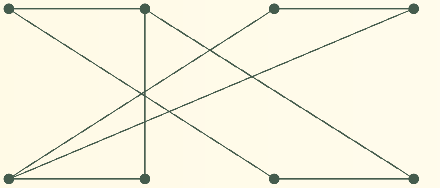
Vidíte v obrázku všechny tři komponenty? Jedna z nich je izolovaným vrcholem, druhá hranou (tj. grafem isomorfním K_2) a třetí je to zbývající.

Definice 4.8. Graf G je souvislý

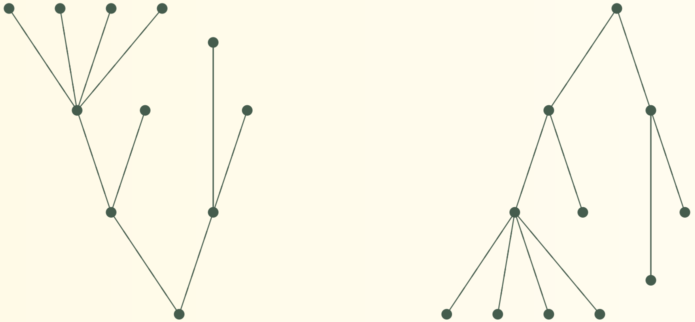
pokud je G tvořený nejvýše jednou komponentou souvislosti, tj. pokud každé dva vrcholy G jsou spojené cestou.

Definice 4.8. **Graf G je souvislý**
pokud je G tvořený nejvýše jednou komponentou souvislosti, tj. pokud každé dva vrcholy G jsou spojené cestou.

Který z těchto dvou grafů je souvislý?

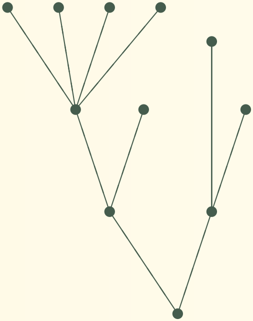


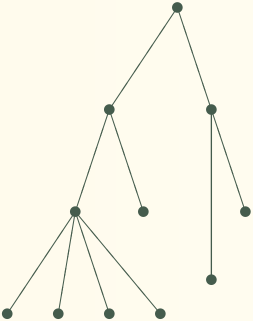
4.4 Stromy – grafy bez kružnic



Charakteristickými znaky stromů je absence kružnic a souvislost...

4.4 Stromy – grafy bez kružnic

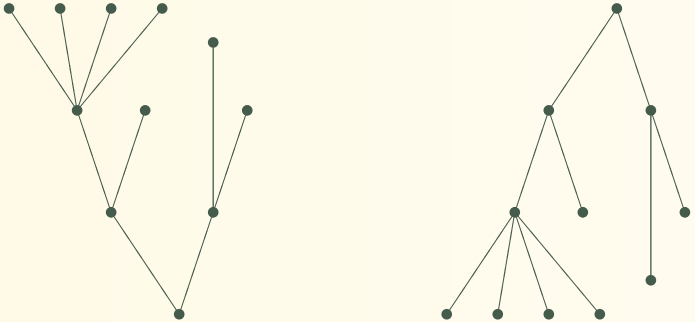




Charakteristickými znaky stromů je absence kružnic a souvislost...

Definice 4.9. **Strom** je jednoduchý souvislý graf T bez kružnic.

4.4 Stromy – grafy bez kružnic



Charakteristickými znaky stromů je absence kružnic a souvislost…

Definice 4.9. **Strom** je jednoduchý souvislý graf T bez kružnic.

Les je jednoduchý graf bez kružnic (nemusí být souvislý). Komponenty souvislosti lesa jsou stromy. Jeden vrchol bez hran a prázdný graf jsou také stromy.

Grafy bez kružnic také obecně nazýváme *acyklické*.

Vlastnosti stromů

Lema 4.10. *Strom s více než jedním vrcholem obsahuje vrchol stupně* 1.

Vlastnosti stromů

Lema 4.10. *Strom s více než jedním vrcholem obsahuje vrchol stupně 1.*

Důkaz: Souvislý graf s více než jedním vrcholem nemůže mít vrchol stupně 0. Proto vezmeme strom T a v něm libovolný vrchol v.

Vlastnosti stromů

Lema 4.10. *Strom s více než jedním vrcholem obsahuje vrchol stupně* 1.

Důkaz: Souvislý graf s více než jedním vrcholem nemůže mít vrchol stupně 0. Proto vezmeme strom T a v něm libovolný vrchol v. Sestrojíme nyní co nejdelší cestu S v T začínající ve v:

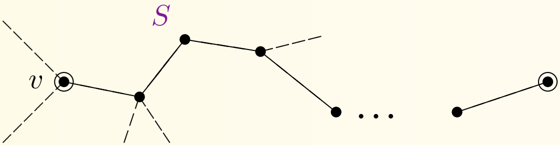
* S začne libovolnou hranou vycházející z v;

Vlastnosti stromů

Lema 4.10. *Strom s více než jedním vrcholem obsahuje vrchol stupně 1.*

Důkaz: Souvislý graf s více než jedním vrcholem nemůže mít vrchol stupně 0. Proto vezmeme strom T a v něm libovolný vrchol v. Sestrojíme nyní co nejdelší cestu S v T začínající ve v:

* S začne libovolnou hranou vycházející z v;
* v každém dalším vrcholu u, do kterého se dostaneme a má stupeň větší než 1, lze pak pokračovat cestu S další novou hranou.

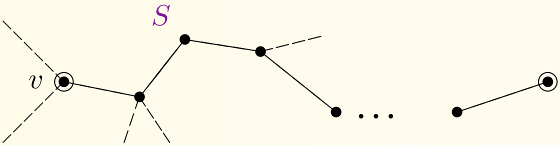


Vlastnosti stromů

Lema 4.10. *Strom s více než jedním vrcholem obsahuje vrchol stupně* 1.

Důkaz: Souvislý graf s více než jedním vrcholem nemůže mít vrchol stupně 0. Proto vezmeme strom T a v něm libovolný vrchol v. Sestrojíme nyní co nejdelší cestu S v T začínající ve v:

* S začne libovolnou hranou vycházející z v;
* v každém dalším vrcholu u, do kterého se dostaneme a má stupeň větší než 1, lze pak pokračovat cestu S další novou hranou.



Pokud by se v S poprvé zopakoval některý vrchol, získali bychom kružnici. Proto cesta S musí jednou skončit v nějakém vrcholu stupně 1 v T. □

Věta 4.11. *Strom na n vrcholech má přesně $n-1$ hran pro $n \geq 1$.*

Věta 4.11. *Strom na n vrcholech má přesně $n-1$ hran pro $n \geq 1$.*

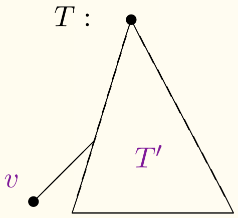
Důkaz: Toto tvrzení dokážeme indukcí podle n.

* Strom s jedním vrcholem má $n-1=0$ hran.

Věta 4.11. *Strom na n vrcholech má přesně $n-1$ hran pro $n \geq 1$.*

Důkaz: Toto tvrzení dokážeme indukcí podle n.

* Strom s jedním vrcholem má $n-1=0$ hran.



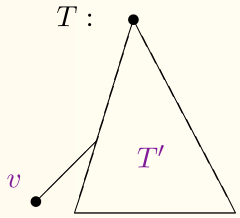
* Nechť T je strom na $n>1$ vrcholech.

  Podle Lematu 7.10 má T vrchol v stupně 1. Označme $T' = T - v$ graf vzniklý z T odebráním vrcholu v.

Věta 4.11. *Strom na n vrcholech má přesně $n-1$ hran pro $n \geq 1$.*

Důkaz: Toto tvrzení dokážeme indukcí podle n.

- $*$ Strom s jedním vrcholem má $n-1=0$ hran.



- $*$ Nechť T je strom na $n>1$ vrcholech.

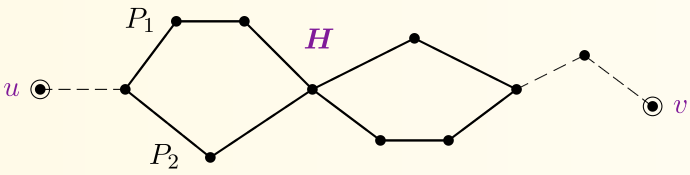
  Podle Lematu 7.10 má T vrchol v stupně 1. Označme $T' = T - v$ graf vzniklý z T odebráním vrcholu v. Pak T' je také souvislý bez kružnic, tudíž strom na $n-1$ vrcholech. Dle indukčního předpokladu T' má $n-1-1$ hran, a proto T má $n-1-1+1=n-1$ hran. $\square$

Věta 4.12. *Mezi každými dvěma vrcholy stromu vede právě jediná cesta.*

Věta 4.12. *Mezi každými dvěma vrcholy stromu vede právě jediná cesta.*

Důkaz: Jelikož strom T je souvislý dle definice, mezi libovolnými dvěma vrcholy u, v vede nějaká cesta.

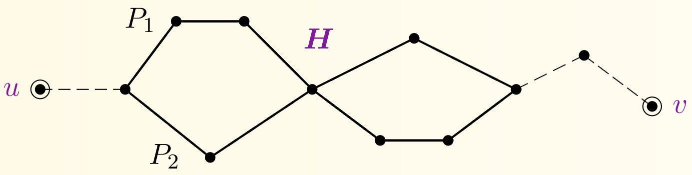
Věta 4.12. *Mezi každými dvěma vrcholy stromu vede právě jediná cesta.*



Důkaz: Jelikož strom T je souvislý dle definice, mezi libovolnými dvěma vrcholy u, v vede nějaká cesta.

Pokud by existovaly dvě různé cesty P_1, P_2 mezi u, v, tak bychom vzali jejich symetrický rozdíl, podgraf $H = P_1 \Delta P_2$ s neprázdnou množinou hran, kde H zřejmě má všechny stupně sudé.

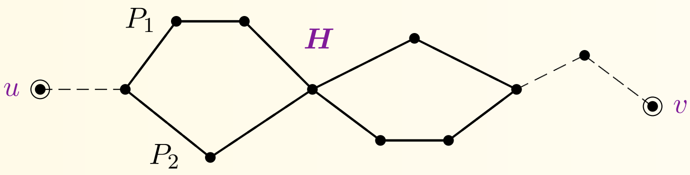
Věta 4.12. *Mezi každými dvěma vrcholy stromu vede právě jediná cesta.*



Důkaz: Jelikož strom T je souvislý dle definice, mezi libovolnými dvěma vrcholy u, v vede nějaká cesta.

Pokud by existovaly dvě různé cesty P_1, P_2 mezi u, v, tak bychom vzali jejich symetrický rozdíl, podgraf $H = P_1 \Delta P_2$ s neprázdnou množinou hran, kde H zřejmě má všechny stupně sudé. Na druhou stranu se však podgraf stromu musí opět skládat z komponent stromů, a tudíž obsahovat vrchol stupně 1 podle Lematu 7.10, spor.

Věta 4.12. *Mezi každými dvěma vrcholy stromu vede právě jediná cesta.*



Důkaz: Jelikož strom T je souvislý dle definice, mezi libovolnými dvěma vrcholy u, v vede nějaká cesta.

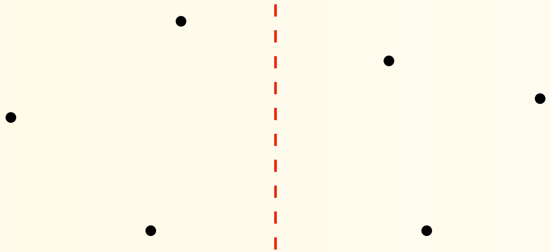
Pokud by existovaly dvě různé cesty P_1, P_2 mezi u, v, tak bychom vzali jejich symetrický rozdíl, podgraf $H = P_1 \Delta P_2$ s neprázdnou množinou hran, kde H zřejmě má všechny stupně sudé. Na druhou stranu se však podgraf stromu musí opět skládat z komponent stromů, a tudíž obsahovat vrchol stupně 1 podle Lematu 7.10, spor. $\square$

Důsledek 4.13. *Přidáním jedné hrany do stromu vznikne právě jedna kružnice.*

Alternativní charakterizace stromů

Na dané množině vrcholů je (vzhledem k inkluzi množin hran) *strom*

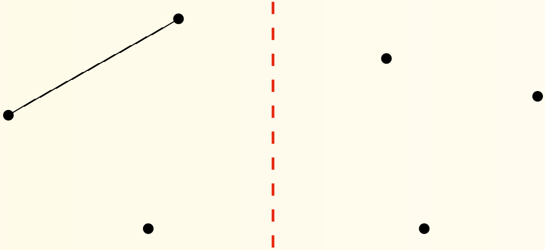
- minimální souvislý graf (plyne z Věty 7.12)
- a zároveň maximální acyklický graf (plyne z Důsledku 7.13).



Alternativní charakterizace stromů

Na dané množině vrcholů je (vzhledem k inkluzi množin hran) *strom*

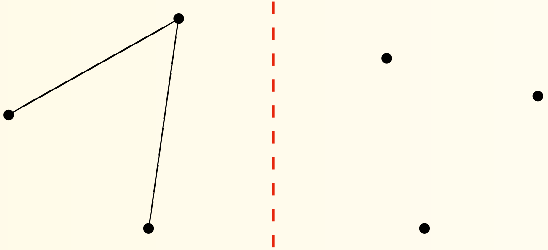
- minimální souvislý graf (plyne z Věty 7.12)
- a zároveň maximální acyklický graf (plyne z Důsledku 7.13).



Alternativní charakterizace stromů

Na dané množině vrcholů je (vzhledem k inkluzi množin hran) *strom*

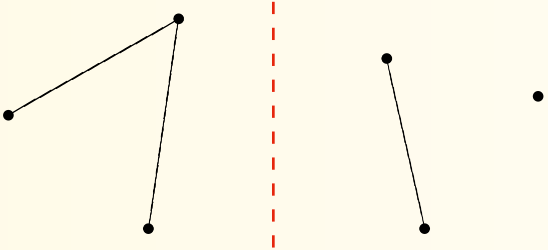
- minimální souvislý graf (plyne z Věty 7.12)
- a zároveň maximální acyklický graf (plyne z Důsledku 7.13).



Alternativní charakterizace stromů

Na dané množině vrcholů je (vzhledem k inkluzi množin hran) *strom*

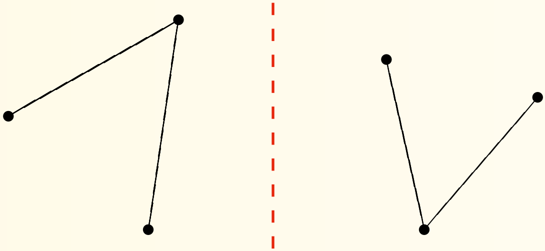
- minimální souvislý graf (plyne z Věty 7.12)
- a zároveň maximální acyklický graf (plyne z Důsledku 7.13).



Alternativní charakterizace stromů

Na dané množině vrcholů je (vzhledem k inkluzi množin hran) *strom*

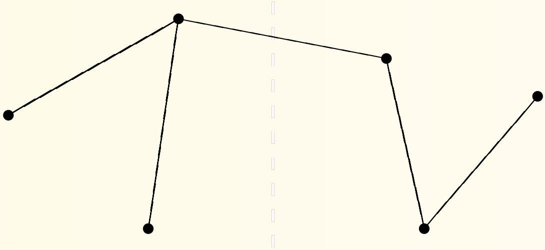
- minimální souvislý graf (plyne z Věty 7.12)
- a zároveň maximální acyklický graf (plyne z Důsledku 7.13).



Alternativní charakterizace stromů

Na dané množině vrcholů je (vzhledem k inkluzi množin hran) *strom*

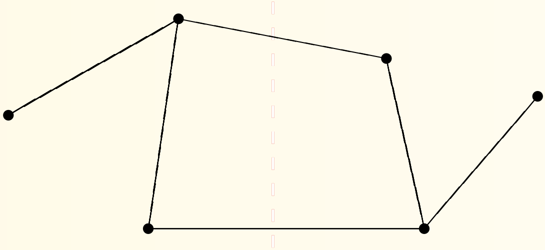
- minimální souvislý graf (plyne z Věty 7.12)
- a zároveň maximální acyklický graf (plyne z Důsledku 7.13).



Alternativní charakterizace stromů

Na dané množině vrcholů je (vzhledem k inkluzi množin hran) *strom*

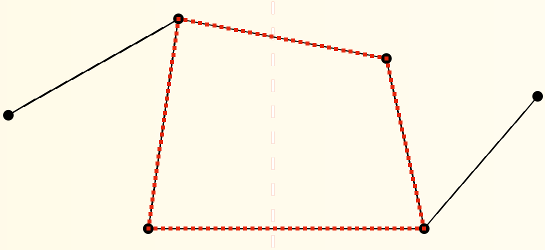
- minimální souvislý graf (plyne z Věty 7.12)
- a zároveň maximální acyklický graf (plyne z Důsledku 7.13).



Alternativní charakterizace stromů

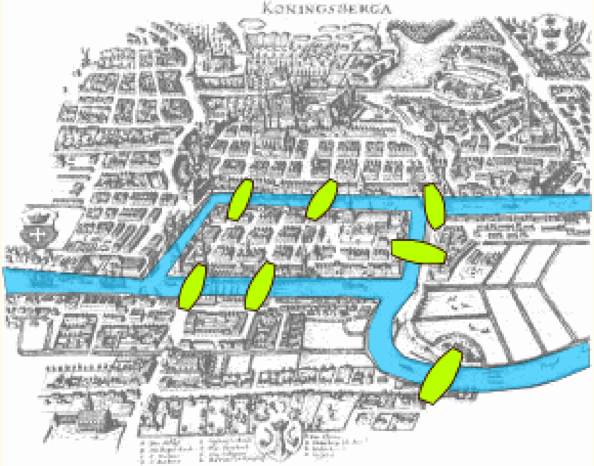
Na dané množině vrcholů je (vzhledem k inkluzi množin hran) *strom*

- minimální souvislý graf (plyne z Věty 7.12)
- a zároveň maximální acyklický graf (plyne z Důsledku 7.13).



4.5 Jedním tahem – Eulerovské grafy

Pravd. *nejstarší zaznamenaný výsledek teorie grafů* pochází od L. Eulera – jedná se o slavných 7 mostů v Královci / Königsbergu / dnešním Kaliningradě.



O jaký problém se tehdy jednalo? Městští radní chtěli vědět, zda mohou suchou nohou přejít po každém ze sedmi vyznačených mostů právě jednou.

Sled a tah v grafu

Definice: *Sledem* délky n v grafu G rozumíme posloupnost vrcholů a hran

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)$$

Sled a tah v grafu

Definice: *Sledem* délky n v grafu G rozumíme posloupnost vrcholů a hran

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n),$$

ve které vždy hrana e_i má koncové vrcholy v_{i-1}, v_i.

Sled je vlastně procházka po hranách grafu z u do v. Příkladem sledu může být průchod IP paketu internetem (včetně cyklení).

Sled a tah v grafu

Definice: *Sledem* délky n v grafu G rozumíme posloupnost vrcholů a hran

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)\,,$$

ve které vždy hrana e_i má koncové vrcholy v_{i-1}, v_i.

Sled je vlastně procházka po hranách grafu z u do v. Příkladem sledu může být průchod IP paketu internetem (včetně cyklení).

Definice: *Tah* je sled v grafu bez opakování hran.

Sled a tah v grafu

Definice: *Sledem* délky n v grafu G rozumíme posloupnost vrcholů a hran

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)\,,$$

ve které vždy hrana e_i má koncové vrcholy v_{i-1}, v_i.

Sled je vlastně procházka po hranách grafu z u do v. Příkladem sledu může být průchod IP paketu internetem (včetně cyklení).

Definice: *Tah* je sled v grafu bez opakování hran.
Uzavřený tah je tahem, který končí ve vrcholu, ve kterém začal. *Otevřený tah* je tahem, který končí v jiném vrcholu, než ve kterém začal.

Znáte dětské „kreslení jedním tahem“? Ano, to je v podstatě i náš *tah* (v nakresl. grafu).

Sled a tah v grafu

Definice: *Sledem* délky n v grafu G rozumíme posloupnost vrcholů a hran

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)\,,$$

ve které vždy hrana e_i má koncové vrcholy v_{i-1}, v_i.

Sled je vlastně procházka po hranách grafu z u do v. Příkladem sledu může být průchod IP paketu internetem (včetně cyklení).

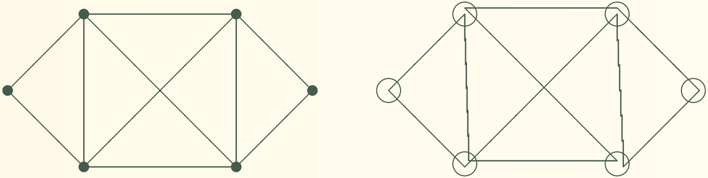
Definice: *Tah* je sled v grafu bez opakování hran.
Uzavřený tah je tahem, který končí ve vrcholu, ve kterém začal. *Otevřený tah* je tahem, který končí v jiném vrcholu, než ve kterém začal.

Znáte dětské „kreslení jedním tahem“? Ano, to je v podstatě i náš *tah* (v nakresl. grafu).

Fakt: Cesta je právě otevřený tah bez opakování vrcholů.
Kružnice je právě uzavřený tah bez opakování vrcholů.

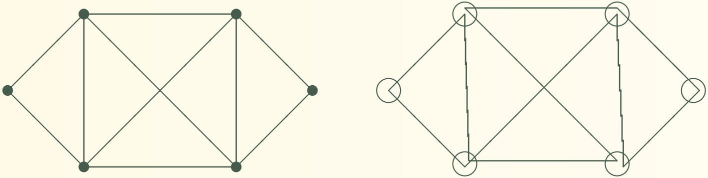
Eulerova charakterizace

Onen slavný výsledek teorie grafů od Leonharda Eulera poté zní následovně.



Eulerova charakterizace

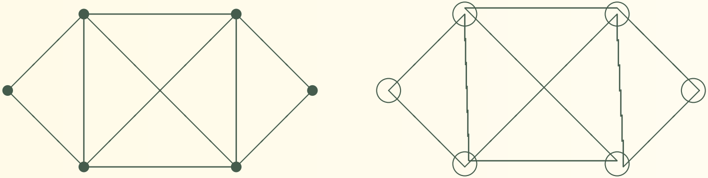
Onen slavný výsledek teorie grafů od Leonharda Eulera poté zní následovně.



Věta 4.14. *Graf G lze nakreslit jedním uzavřeným tahem právě když G je souvislý a všechny vrcholy v G jsou sudého stupně.*

Eulerova charakterizace

Onen slavný výsledek teorie grafů od Leonharda Eulera poté zní následovně.



Věta 4.14. *Graf G lze nakreslit jedním uzavřeným tahem právě když G je souvislý a všechny vrcholy v G jsou sudého stupně.*

Důsledek 4.15. *Graf G lze nakreslit jedním otevřeným tahem právě když G je souvislý a všechny vrcholy v G až na dva jsou sudého stupně.*

Důkaz: Dokazujeme oba směry ekvivalence. Pokud lze G nakreslit jedním uzavřeným tahem, tak je zřejmě souvislý a navíc má každý stupeň sudý, neboť uzavřený tah každým průchodem vrcholem „ubere“ dvě hrany.

Důkaz: Dokazujeme oba směry ekvivalence. Pokud lze G nakreslit jedním uzavřeným tahem, tak je zřejmě souvislý a navíc má každý stupeň sudý, neboť uzavřený tah každým průchodem vrcholem „ubere“ dvě hrany.

Naopak zvolíme mezi všemi uzavřenými tahy T v G ten (jeden z) nejdelší. Tvrdíme, že T obsahuje všechny hrany grafu G.

- Pro spor vezměme graf $G' = G - E(T)$, o kterém předpokládejme, že je neprázdný. Jelikož G' má taktéž všechny stupně sudé, je (z indukčního předpokladu) libovolná jeho komponenta $C \subseteq G'$ nakreslená jedním uzavřeným tahem T_C.

Důkaz: Dokazujeme oba směry ekvivalence. Pokud lze G nakreslit jedním uzavřeným tahem, tak je zřejmě souvislý a navíc má každý stupeň sudý, neboť uzavřený tah každým průchodem vrcholem „ubere" dvě hrany.

Naopak zvolíme mezi všemi uzavřenými tahy T v G ten (jeden z) nejdelší. Tvrdíme, že T obsahuje všechny hrany grafu G.

- Pro spor vezměme graf $G' = G - E(T)$, o kterém předpokládejme, že je neprázdný. Jelikož G' má taktéž všechny stupně sudé, je (z indukčního předpokladu) libovolná jeho komponenta $C \subseteq G'$ nakreslená jedním uzavřeným tahem T_C.
- Vzhledem k souvislosti grafu G každá komponenta $C \subseteq G'$ protíná náš tah T v některém vrchole w, a tudíž lze oba tahy T_C a T „propojit přes w". To je spor s naším předpokladem nejdelšího možného T.

Důkaz: Dokazujeme oba směry ekvivalence. Pokud lze G nakreslit jedním uzavřeným tahem, tak je zřejmě souvislý a navíc má každý stupeň sudý, neboť uzavřený tah každým průchodem vrcholem „ubere“ dvě hrany.

Naopak zvolíme mezi všemi uzavřenými tahy T v G ten (jeden z) nejdelší. Tvrdíme, že T obsahuje všechny hrany grafu G.

– Pro spor vezměme graf $G' = G - E(T)$, o kterém předpokládejme, že je neprázdný. Jelikož G' má taktéž všechny stupně sudé, je (z indukčního předpokladu) libovolná jeho komponenta $C \subseteq G'$ nakreslená jedním uzavřeným tahem T_C.

– Vzhledem k souvislosti grafu G každá komponenta $C \subseteq G'$ protíná náš tah T v některém vrchole w, a tudíž lze oba tahy T_C a T „propojit přes w“. To je spor s naším předpokladem nejdelšího možného T.

$\square$

Důkaz důsledku: Nechť u, v jsou dva vrcholy grafu G mající lichý stupeň, neboli dva (předpokládané) konce otevřeného tahu pro G. Do G nyní přidáme nový vrchol w spojený hranami s u a v. Tím jsme náš případ převedli na předchozí případ grafu se všemi sudými stupni. $\square$