

## ZVÄZY

1. Na množine  $M = \{a, b, c, d, e, f\}$  sú dané relácie  $R_i : i \in \{1, 2, \dots, 7\}$  nasledovne:

- (a)  $R_1 = \{(a, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, f), (d, f), (e, f)\}$ ,
- (b)  $R_2 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, f), (c, f), (d, f), (e, f)\}$ ,
- (c)  $R_3 = \{(a, b), (a, c), (c, d), (b, e), (e, f), (d, f)\}$ ,
- (d)  $R_4 = \{(a, b), (a, c), (c, d), (b, e), (b, d), (e, f), (d, f)\}$ ,
- (e)  $R_5 = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, e), (d, e), (e, f)\}$ ,
- (f)  $R_6 = \{(a, b), (a, c), (c, d), (c, e), (b, d), (b, e), (d, f), (e, f)\}$ ,
- (g)  $R_7 = \{(a, b), (b, c), (b, d), (c, e), (d, e), (e, f)\}$ .

Ku každej z nich napíšte najmenšiu (vzhľadom na inklúziu) reláciu  $R_i^*$ , pre ktorú platí:

- $R_i \subseteq R_i^*$ ,
- $R_i^*$  je reflexívna a tranzitívna.

Pre každú reláciu  $R_i^*$  zistite, či  $(M, R_i^*)$  je zväz. V prípade kladnej odpovede zistite, či  $(M, R_i^*)$  je distributívny alebo komplementárny zväz.

2. Vypíšte všetky podzväzy zväzov z predchádzajúcej úlohy.
3. Nájdite všetky neizomorfné zväzy na  $n$ -prvkovej množine, pričom  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .
4. Nájdite všetky neizomorfné distributívne zväzy na 5-prvkovej množine.
5. Nech  $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$  je množina usporiadaná reláciou  $|$ , ktorá je definovaná nasledovne

$$(\forall m, n \in X : m|n) \iff (\exists p \in X : n = p \cdot m).$$

Zistite, či sa jedná o zväz a v prípade kladnej odpovede určte jeho vlastnosti.

6. Na množine  $M = \{a, b, c, 2, 4, 8\}$  je daná relácia  $|$ , ktorá je definovaná nasledovne

$$(\forall m, n \in \mathbb{N} : m|n) \iff (\exists p \in \mathbb{N} : n = p \cdot m).$$

Určte  $a, b, c \in \mathbb{N}$  tak, aby  $(M, |)$  bol zväz. Nájdite aspoň dve rôzne riešenia.

7. Nech  $M = \{a, b, c, d\}$ . Nakreslite hasseovský diagram pre  $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ , zistite, či je to zväz. V prípade kladnej odpovede určte jeho vlastnosti.
8. Na množine  $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  zostrojte zväz, ktorý
  - (a) bude komplementárny, ale nebude distributívny,
  - (b) bude distributívny a komplementárny zároveň.
  - (c) bude distributívny ale nebude komplementárny.
  - (d) nebude distributívny ani komplementárny.
9. V Booleovej algebre  $(X, \vee, \wedge, \bar{\phantom{x}}, 0, 1)$  zjednodušte výrazy:
  - (a)  $\overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$ ,
  - (b)  $(x \vee y) \vee (z \vee x) \vee (y \vee z)$ ,

$$(c) (x \wedge y) \vee (z \wedge x) \vee (\overline{x \wedge y}).$$

10. V Booleovej algebre  $(X, \vee, \wedge, \overline{\phantom{x}}, 0, 1)$  dokážte:

$$(a) x \vee 1 = 1,$$

$$(b) \overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y},$$

$$(c) y \leq \overline{x} \iff x \wedge y = 0.$$