1 Binárne relácie

Medzi základné matematické pojmy patria relácie. Zároveň je to pojem, s ktorým sa veľmi rýchlo stretne každý informatik, najmä pri štúdiu dát a databáz. Sú však aj iné oblasti informatiky, kde sa relácie vyskytujú. Najčastejšie sa budete stretávať s binárnymi reláciami, a preto sa v tomto texte na ne zameriame.

Definícia 1. **Binárnou reláciou** *z množiny A do množiny B nazývame každú podmnožinu R karteziánskeho súčinu $A \times B$. Ak $A = B$, hovoríme o binárnej relácii na množine A. Ak R je relácia, píšeme aRb alebo $[a, b] \in R$, čítame: prvok a je v relácii R s prvkom b.*

Binárna relácia z množiny A do množiny B je teda množina, ktorá obsahuje niekoľko (aj nula) usporiadaných dvojíc, ktorých prvá zložka je z množiny A a druhá zložka je z množiny B. V tomto texte sa budeme venovať iba binárnym reláciám, preto slovo binárna môžeme vynechať a ďalej hovoriť iba o relácii.

Definícia 2. *Nech R je binárna relácia z množiny A do množiny B.* **Definičným oborom** *(prvým oborom) nazývame množinu $D(R)$, ktorá je daná takto:*

$$a \in D(R) \subseteq A \iff \exists b \in B\colon aRb.$$

Obor hodnôt *(druhý obor) relácie R je množina $H(R)$ daná takto:*

$$b \in H(R) \subseteq B \iff \exists a \in A\colon aRb.$$

Oba pojmy si vysvetlíme na jednoduchom príklade.

Príklad 3. *Nech $R = \{[0, 2], [0, 1], [1, 1], [1, 2], [1, 3], [2, 3], [3, 3], [3, 2]\}$ je relácia na množine $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Určte $D(R), H(R)$.*

Riešenie. Aplikovaním predchádzajúcej definície ($D(R)$ je množina, ktorá obsahuje prvé zložky usporiadných dvojíc a $H(R)$ obsahuje druhé zložky týchto usporiadaných dvojíc) dostávame:

$$D(R) = \{0, 1, 2, 3\}, H(R) = \{1, 2, 3\}.$$

Vzhľadom k tomu, že každá relácia je množina, tak podobne ako množiny, aj relácie môžu byť zadávané vymenovaním prvkov (ako v predchádzajúcom príklade), alebo ako obor nejakej výrokovej formy, čo si ukážeme v nasledujúcom príklade.

Príklad 4. *Nech $A = \{m \in \mathbb{N}\colon m \leq 10\}$, $B = \{n \in \mathbb{N}\colon n \leq 12\}$, $R = \{[m, n] \in A \times B\colon m = n\}$, $S = \{[m, n] \in A \times B\colon m = 2n\}$. Zapíšte relácie R, S vymenovaním prvkov. Určte $D(R), D(S), H(R), H(S)$.*

Riešenie. Zrejme pre množiny A, B platí

- $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$,
- $B = \{1, 2, \ldots, 12\}$.

Pri určovaní prvkov relácie R si treba uvedomiť, že $D(R) \subseteq A, H(R) \subseteq B$ a samozrejme treba využiť vedomosti o množinách. Napríklad dvojica $[1, 1] \in R$, lebo $1 \in A \wedge 1 \in B \wedge 1 = 1$. Naopak, dvojica $[11, 11] \notin R$, lebo $11 \notin A$. Podobne treba postupovať aj prípade relácie S. Potom

- $R = \{[1,1], [2,2], [3,3], [4,4], \ldots, [10,10]\}$,
- $S = \{[2,1], [4,2], [6,3], [8,4], [10,5]\}$.

Pre definičné obory a obory hodnôt platí

- $D(R) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,
- $H(R) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,
- $D(S) = \{2,4,6,8,10\}$,
- $H(S) = \{1,2,3,4,5\}$.

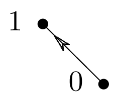
Ďalej každú konečnú reláciu môžeme zadať tabuľkou. Postup si vysvetlíme v nasledujúcom príklade.

Príklad 5. *Nech* $R = \{[0,0], [0,1], [1,1], [1,2], [1,3], [2,3], [3,3], [3,2]\}$ *je relácia na množine* $A = \{0,1,2,3\}$. *Tabuľku relácie* R *vyplníme takto: Do záhlaví (aj do riadku, aj do stĺpca) vypíšeme všetky prvky množiny* A. *Usporiadané dvojice, ktoré do relácie* R *patria, budú mať v tabuľke priradenú hodnotu 1, ostatné dvojice 0. Konkrétne, ak napr. dvojica* $[1,2] \in R$, *tak hodnota v riadku, v ktorom je v záhlaví prvá zložka (prvá zložka je* 1*) a stĺpci, v ktorom je v záhlaví druhá zložka (druhá zložka je* 2*) je* 1 *(v tabuľke je zvýraznená červenou farbou). Napríklad dvojica* $[2,1] \notin R$, *preto hodnota v príslušnom políčku je* 0 *(v tabuľke je zvýraznená modrou farbou). Potom výsledná tabuľka je:*

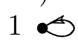
R	*0*	*1*	*2*	*3*
0	*1*	*1*	*0*	*0*
1	*0*	*1*	*1*	*1*
2	*0*	*0*	*0*	*1*
3	*0*	*0*	*1*	*1*

Veľmi peknou metódou zobrazenia relácií je grafová interpretácia. Pre reláciu z predchádzajúceho príkladu zostavíme graf nasledovne.

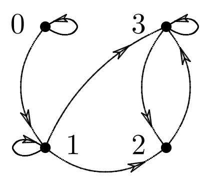
- Vyznačíme prvky množiny A ako body (plné krúžky).
- Ak napr. $[0,1] \in R$, tak nakreslíme orientovanú hranu so začiatkom v bode 0 a koncom v bode 1.



- Pre dvojice s rovnakou prvou a druhou zložkou kreslíme orientované slučky (orientovaná hrana začína aj končí v tom istom bode).



Takto zakresľujeme všetky usporiadané dvojice, výsledný graf relácie R je v nasledujúcom obrázku:



Príklad 6. *Nech*

$$R = \{[1,2],[2,3],[1,3],[2,4]\}, S = \{[2,2],[5,3],[1,5],[3,4],[1,7]\}.$$

Určte $D(R), H(R), D(S), H(S), R \cup S, R \cap S, R \setminus S$.

Riešenie. Znovu aplikujeme definíciu definičného oboru a oboru hodnôt, v posledných troch častiach si stačí uvedomiť, že pracujeme s množinami.

- $D(R) = \{1,2\}$,
- $H(R) = \{2,3,4\}$,
- $D(S) = \{1,2,3,5\}$,
- $H(S) = \{2,3,4,5,7\}$,
- $R \cup S = \{[1,2],[2,3],[1,3],[2,4],[2,2],[5,3],[1,5],[3,4],[1,7]\}$,
- $R \cap S = \emptyset, R \setminus S = \{[1,2],[2,3],[1,3],[2,4]\}$.

Tento príklad názorne ukazuje, že ak R, S sú relácie, tak aj $R \cup S, R \cap S, R \setminus S$ sú relácie, teda množiny, ktorých prvky sú tiež usporiadané dvojice.

Definícia 7. *Nech R je relácia na množine A, tak aj $\overline{R} = A^2 \setminus R$ je relácia na A. Hovoríme, že $\overline{R}$ je* **doplnkovou** *(komplementárnou) reláciou k relácii R na množine A.*

Príklad 8. *Nech $R = \{[0,0],[0,1],[1,1],[1,2],[1,3],[2,3],[3,3],[3,2]\}$ je relácia na množine $A = \{0,1,2,3\}$. Určte $\overline{R}$ a vyplňte tabuľku relácie $\overline{R}$.*

Riešenie. Treba si uvedomiť, že tabuľky pôvodnej a doplnkovej relácie sú duálne. Duálne v tom zmysle, že tam, kde má pôvodná relácia 1, doplnková má 0 a naopak. Preto asi najrýchlejšia cesta k nájdeniu doplnkovej relácie, je práve pomocou tabuľky. Premyslite si postup pri grafovej interpretácii danej relácie.

R	0	1	2	3
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
2	0	0	0	1
3	0	0	1	1

$\overline{R}$	0	1	2	3
0	0	0	1	1
1	1	0	0	0
2	1	1	1	0
3	1	1	0	0

Teda $\overline{R} = \{[0,2],[0,3],[1,0],[2,0],[2,1],[2,2],[3,0],[3,1]\}$.

Definícia 9. Identickou *(diagonálnou) reláciou na množine A nazývame reláciu*

$$\Delta_A = \{[a,a]\colon a \in A\}.$$

Poznámka 10. *Keď si predstavíme tabuľku takejto relácie, tak na diagonále má iba jedničky, v ostatných políčkach tabuľky sú iba nuly. Ako bude vyzerať graf takejto relácie?*

Definícia 11. *Nech R je relácia. Reláciu $R^{-1} = \{[b, a] \colon [a, b] \in R\}$ nazývame* **inverzná** *relácia k R.*

Poznámka 12. *Inverznú reláciu dostaneme jednoduchou výmenou prvej a druhej zložky v usporiadaných dvojiciach pôvodnej relácie.*

Príklad 13. *Nech $R = \{[1, 2], [2, 3], [1, 3], [2, 4]\}$. Určte R^{-1} a $(R^{-1})^{-1}$.*

Riešenie. Zrejme

- $R^{-1} = \{[2, 1], [3, 2], [3, 1], [4, 2]\}$,
- $(R^{-1})^{-1} = \{[1, 2], [2, 3], [1, 3], [2, 4]\} = R$.

Všimnime si, že $(R^{-1})^{-1} = R$. Toto nie je náhoda.

Veta 14. *Pre ľubovolnú reláciu platí $(R^{-1})^{-1} = R$.*

Dôkaz. Nakoľko sa jedná o rovnosť dvoch množín, bude mať dôkaz dve časti. Potrebujeme dokázať, že $(R^{-1})^{-1} \subseteq R$, aj $R \subseteq (R^{-1})^{-1}$. Treba myslieť na to, že prvkami relácií sú usporiadané dvojice.
Nech $[x, y] \in R$, potom $[y, x] \in R^{-1}$, ale potom $[x, y] \in (R^{-1})^{-1}$. Formálne zapisujeme takto:

$$[x, y] \in R \Rightarrow [y, x] \in R^{-1} \Rightarrow [x, y] \in (R^{-1})^{-1}.$$

Naopak, nech $[x, y] \in (R^{-1})^{-1}$, potom $[y, x] \in R^{-1}$ a potom $[x, y] \in R$. Formálne zapisujeme takto:

$$[x, y] \in (R^{-1})^{-1} \Rightarrow [y, x] \in R^{-1} \Rightarrow [x, y] \in R.$$

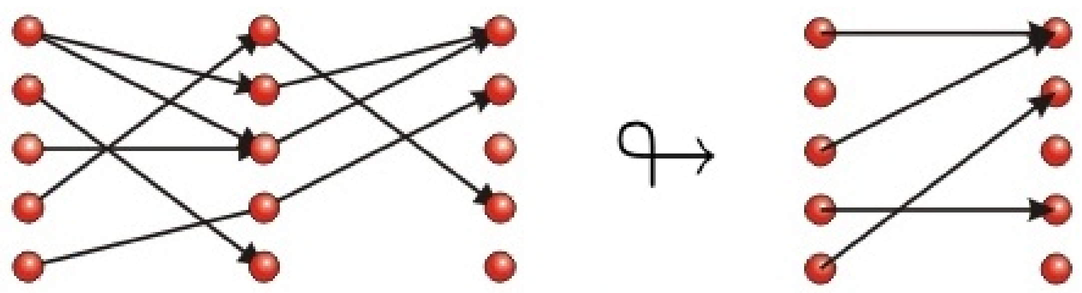
Poznámka 15. *Tento dôkaz nebolo nutné robiť v dvoch krokoch, nakoľko všetky implikácie v prvej (a samozrejme aj v druhej) časti sa dajú prepísať na ekvivalencie.*

Definícia 16. *Nech R, S sú relácie. Reláciu*

$$R \circ S = \{[a, c] \big| \exists b \colon \big([a, b] \in S \wedge [b, c] \in R\big)\}$$

nazývame **zloženou** *reláciou z relácie R a S, čítame R po S.*

Poznámka 17. *Všimnite si, že relácie budeme skladať „odzadu", teda v relácii $R \circ S$ budú prvé zložky usporiadaných dvojíc z relácie S a druhé zložky z relácie R. V literatúre sa môžete stretnúť aj s opačným poradím skladania (teda prvé zložky usporiadaných dvojíc budú z R a druhé z S.)*



Príklad 18. *Nech $R = \{[*, \Delta], [*, \circ]\}$, $S = \{[\Delta, \heartsuit], [\circ, \spadesuit]\}$. Určte relácie $S \circ R, R \circ S$.*

Riešenie. Pri skladaní $S \circ R$ sledujeme najskôr reláciu R (skladáme odzadu). Zoberieme si prvú dvojicu z relácie R, teda $[*, \Delta]$. Jej druhá zložka je Δ, preto hľadáme v relácii S také dvojice, ktorých prvá zložka je tiež Δ. Taká dvojica je v S len jedna a je to dvojica $[\Delta, \heartsuit]$. Teda $[*, \Delta] \in R$ a $[\Delta, \heartsuit] \in S$, preto $[*, \heartsuit] \in S \circ R$. Teraz si všimneme ďalšiu dvojicu v relácii R, teda $[*, \circ]$ a budeme v relácii S hľadať všetky dvojice, ktoré majú prvú zložku $\circ$. Taká je znovu len jedna a to je $[\circ, \spadesuit]$, preto do výslednej relácie pridáme dvojicu $[*, \spadesuit]$. Žiadnu ďalšiu dvojicu už nevyrobíme. Podobne postupujeme pri skladaní $R \circ S$, avšak žiadna druhá zložka relácie S nie je prvou zložkou relácie R, teda nevytvoríme žiadne dvojice. Potom:

$$S \circ R = \{[*, \heartsuit], [*, \spadesuit]\}, \quad R \circ S = \emptyset.$$

Príklad 19. *Nech $A = \{0, 1, 2\}, B = \{a, b\}$ a nech R je relácia z A do B a S relácia z B do A, pričom: $R = \{[0, a], [0, b], [1, a], [2, b]\}$ a $S = \{[a, 0], [a, 2], [b, 1]\}$. Určte $R \circ S$ a $S \circ R$ vymenovaním prkov.*

Riešenie. Postupujeme ako v predchádzajúcom príklade. Výsledkom skladania je:

$$R \circ S = \{[a, a], [a, b], [b, a]\},$$

$$S \circ R = \{[0, 0], [0, 2], [0, 1], [1, 0], [1, 2], [2, 1]\}.$$

Všimnite si, že $R \circ S \subseteq B \times B$ a $S \circ R \subseteq A \times A$.

Príklad 20. *Nech $A = \{n \in N : n < 10\}$, $B = \{m \in N : m \leq 12\}$, $R = \{[n, m] \in A \times B : n + 1 = m\}$, $S = \{[m, n] \in B \times A : m = n^2\}$. Určte relácie $R \circ S, S \circ R$.*

Riešenie. Zrejme

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\},$$

$$R = \{[1, 2], [2, 3], [3, 4], \ldots, [8, 9], [9, 10]\}, \quad S = \{[1, 1], [4, 2], [9, 3]\}.$$

Pri skladaní postupujeme ako v predchádzajúcich príkladoch. Potom:

$$R \circ S = \{[1, 2], [4, 3], [9, 4]\}, \quad S \circ R = \{[3, 2], [8, 3]\}.$$

Poznámka 21. *Premyslite si, ako by ste v predchádzajúcom príklade definovali $R \circ S, S \circ R$ pomocou výrokovej formy (bez použitia usporiadaných dvojíc).*

Vzhľadom k predchádzajúcim príkladom je zrejmé, že skladanie relácií nie je komutatívne, ale dá sa (pomerne jednoducho) ukázať, že je asociatívne.

Veta 22. *Pre ľubovoľné relácie R, S, T platí*

1. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$,
2. $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.

Dôkaz. V dôkaze prvej rovnosti budeme postupovať presne tak, ako pri dokazovaní rovnosti množín. Teda

- „$\Rightarrow$“
  Nech $[x, y] \in (R \circ S)^{-1} \Rightarrow [y, x] \in R \circ S \Rightarrow \exists z : [y, z] \in S \wedge [z, x] \in R \Rightarrow$
  $\Rightarrow \exists z : [z, y] \in S^{-1} \wedge [x, z] \in R^{-1} \Rightarrow \exists z : [x, z] \in R^{-1} \wedge [z, y] \in S^{-1} \Rightarrow [x, y] \in S^{-1} \circ R^{-1}$.

- „$\Leftarrow$“
  Nech $[x,y] \in S^{-1} \circ R^{-1} \Rightarrow \exists z\colon [x,z] \in R^{-1} \wedge [z,y] \in S^{-1} \Rightarrow \exists z\colon [z,x] \in R \wedge [y,z] \in S \Rightarrow$
  $\Rightarrow \exists z\colon [y,z] \in S \wedge [z,x] \in R \Rightarrow [y,x] \in R \circ S \Rightarrow [x,y] \in (R \circ S)^{-1}$.

Časť 2. prenechávam študentom ako jednoduché cvičenie.

Otázky na premyslenie:

- Aká bude inverzná relácia k diagonálnej relácii?
- Je vždy relácia $R \circ R^{-1}$ diagonálna?
- Aká bude relácia $\Delta \circ \Delta^{-1}$?
- Ako vyzerá tabuľka relácie, pre ktorú platí $R = R^{-1}$?

1.1 Špecálne typy relácií

V tejto časti si budeme všímať niektoré zaujímavé vlastnosti relácií.

Definícia 23. *Nech R je relácia na množine A. Hovoríme, že relácia R je*

- **reflexívna** *na množine A, ak $\forall a \in A\colon aRa$,*
- **symetrická** *na množine A, ak $\forall a, b \in A\colon aRb \Rightarrow bRa$,*
- **tranzitívna** *na množine A, ak $\forall a, b, c \in A\colon (aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$,*
- **antisymetrická** *na množine A, ak $\forall a, b \in A\colon (aRb \wedge bRa) \Rightarrow a = b$,*
- **ireflexívna** *na množine A, ak $\forall a \in A\colon a\overline{R}a$,*
- **súvislá** *na množine A, ak $\forall a, b \in A\colon a \neq b \Rightarrow (aRb \vee bRa)$,*
- **trichotomická** *na množine A, ak pre každé dva prvky $a, b \in A$ platí práve jeden zo vzťahov: $a = b, aRb, bRa$.*

Najskôr si tieto vlastnosti postupne na príkladoch vysvetlíme.

Príklad 24. *Na množine $M = \{1, 2, 3\}$ určte reláciu (tabuľkou), ktorá je*

- *reflexívna,*
- *symetrická,*
- *tranzitívna,*
- *antisymetrická,*
- *ireflexívna.*

Riešenie. Relácie sú v nasledujúcich tabuľkách. Relácia R je reflexívna (na hlavnej diagonále sú samé jedničky), S symetrická (tabuľka je symetrická podľa hlavnej diagonály), T tranzitívna (túto vlastnosť z tabuľky nie je tak ľahko vidieť, je potrebné si overiť platnosť definície pre všetky trojice prvkov z množiny M), A antisymetrická (v tabuľke nesmú byť žiadne dve jedničky symetrické cez hlavnú diagonálu, výnimky tvoria jedničky na hlavnej diagonále, pozor, nuly symetrické byť môžu). A I je ireflexívna (na hlavnej diagonále musia byť samé nuly). Samozrejme, je viac možností ako takéto relácie vytvoriť. Premyslite si, aké vlastnosti majú relácie, ktoré majú v tabuľke napr. samé nuly, alebo samé jednotky, prípadne na diagonále samé jednotky a v ostatných políčkach samé nuly.

R	1	2	3
1	**1**	0	0
2	1	**1**	1
3	1	1	**1**

S	1	2	3
1	1	**1**	**1**
2	**1**	0	0
3	**1**	0	1

T	1	2	3
1	1	1	1
2	0	0	1
3	0	0	0

A	1	2	3
1	0	**0**	0
2	**1**	1	0
3	0	0	0

I	1	2	3
1	**0**	0	0
2	1	**0**	1
3	1	1	**0**

Príklad 25. *Nech $A = \{0, 1, 2, 3\}$ a nech R je relácia na A daná takto:*

$$R = \{[0,0], [0,1], [1,0], [1,1], [2,2], [2,3], [3,2]\}.$$

Zistite, aké má R vlastnosti.

Riešenie.

- Relácia R nie je reflexívna, lebo $3 \in A \wedge [3,3] \notin R$.
- Symetrická je, lebo pre každú dvojicu platí, že ak $[a,b] \in R$, tak aj $[b,a] \in R$, toto si preverte a všimnite si, že $R = R^{-1}$. Platí uvedená rovnosť pre každú symetrickú reláciu?
- Relácia R nie je tranzitívna, lebo napr. $[3,2] \in R \wedge [2,3] \in R$, ale $[3,3] \notin R$, čo je porušenie tranzitivity.
- Antisymetrická nie je, lebo napr. $[1,0] \in R \wedge [0,1] \in R$, ale $1 \neq 0$.
- Ireflexívna nie je, lebo napr. $[0,0] \in R$.

Príklad 26. *Nech* $R = \{[x,y] \in \mathbb{Z}^2 \colon x^2 = y\}, S = \{[x,y] \in \mathbb{Z}^2 \colon |x-y| \geq 3\}$. *Aké vlastnosti majú relácie* R, S*?*

Riešenie. Skôr ako sa začneme venovať vlastnostiam, je potrebne si vypísať aspoň pár dvojíc, ktoré do relácií R, S patria.

- Pre reláciu R dostaneme:

  $$R = \{[0,0],[1,1],[-1,1],[2,4],[-2,4],\dots\},$$

  teda druhá zložka je vždy druhou mocninou prvej zložky. Relácia R nie je reflexívna (chýba napr. dvojica $[2,2]$). Nie je symetrická (napr. $[2,4] \in R$, ale $[4,2] \notin R$). Nie je tranzitívna (napr. $[2,4] \in R, [4,16] \in R$ ale $[2,16] \notin R$.). Je antisymetrická (ak xRy a yRx, tak $x^2 = y \wedge y^2 = x$, čo je splnené iba pre dvojice $[0,0],[1,1]$.) Nie je ireflexívna (napr. $[1,1] \in R$).

- Pre reláciu S dostaneme:

  $$S = \{[0,3],[3,0],[0,4],[4,0],[0,5],[1,4],[4,1],\dots\},$$

  v tomto prípade je vzdialenosť na číselnej osi prvej a druhej zložky aspoň 3. S nie je reflexívna (nepatrí tam ani jedna dvojica typu $[x,x]$, lebo $|x-x| = 0 < 3$). Je symetrická (vyplýva z vlastnosti absolútnej hodnoty: $|x-y| = |y-x|$). Nie je tranzitívna (napr. $[1,4] \in R, [4,1] \in R$, ale $[1,1] \notin R$). Nie je antisymetrická (prečo?). Je ireflexívna (nepatrí tam ani jedna dvojica typu $[x,x]$ – pozri reflexívnosť).

Otázky na premyslenie:

- Zrejme platí, že každá diagonálna relácia je reflexívna. Platí to aj naopak?
- Ak je relácia symetrická, môže byť zároveň aj antisymetrická?
- Nech R je symetrická a tranzitívna relácia na množine A. Je potom nutne táto relácia R reflexívna na množine A?

1.2 Uzávery binárnych relácií

Príklad 27. *(Motivačný.) Na množine $M = \{1, 2, 3\}$ je daná relácia $R = \{[1, 1], [1, 2], [2, 3]\}$. Určte najmenšiu (vzhľadom na inklúziu) reláciu na M, o ktorej platí*

- $R \subseteq S_1$ *a* S_1 *je reflexívna a symetrická,*
- $R \subseteq S_2$ *a* S_2 *je tranzitívna.*

Riešenie. Zo zadania je zrejmé, že do S_1 a S_2 patria všetky usporiadané dvojice, ktoré obsahuje relácia R. V prvej časti teda pridávame do S_1 dvojice $[2, 2]$ a $[3, 3]$, aby sme zabezpečili reflexivitu. Pre splnenie symetrie je potrebné pridať dvojice $[2, 1], [3, 2]$. Potom:

$$S_1 = \{[1, 1], [1, 2], [2, 3], [2, 2], [3, 3], [2, 1], [3, 2]\}.$$

V druhej časti musíme pridať dvojicu $[1, 3]$, lebo $[1, 2] \in S_2$ a $[2, 3] \in S_2$, teda aj $[1, 3] \in S_2$.

$$S_2 = \{[1, 1], [1, 2], [2, 3], [1, 3]\}.$$

Tento jednoduchý príklad nás priviedol k myšlienke istého „vylepšenia“ danej relácie tak, aby spĺňala nejakú peknú vlastnosť pridaním minimálneho počtu dvojíc.

Definícia 28. *Nech R je binárna relácia na M.*

- **Reflexívny uzáver** R **na množine** M *je relácia*

$$R \cup \{(x, x) \colon x \in M\}.$$

- **Symetrický uzáver** R *je relácia*

$$\overset{\leftrightarrow}{R} = \{(x, y) \colon (x, y) \in R \text{ alebo } (y, x) \in R\}.$$

- **Tranzitívny uzáver** R *je relácia $R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}^i(R)$, kde $\mathcal{T}$ je funkcia, ktorá pre každú binárnu reláciu S vráti reláciu*

$$\mathcal{T}(R) = R \cup \{(x, z) \colon \text{ existuje } y \text{ také, že } (x, y), (y, z) \in R\} = R \cup (R \circ R)$$

$\mathcal{T}^i = \underbrace{\mathcal{T} \circ \cdots \circ \mathcal{T}}_{i}$ *je i-krát iterovaná aplikácia funkcie $\mathcal{T}$.*

Poznámka 29. *Pravdepodobne definícia tranzitívneho uzáveru mnohých prvákov vystraší. Tranzitívny uzáver relácie R je relácia R^+, ktorá obsahuje všetky usporiadané dvojice relácie R, ďalej sú do nej pridané usporiadané dvojice tak, aby R^+ bola tranzitívna a zároveň zo všetkých takých relácií najmenšia vzhľadom na inklúziu. Vo formálnej definícii je aj návod, ako pomocou iterácií reláciu R^+ hľadať. My si ho objasníme v nasledujúcom príklade. Doporučujem na konci semestra (teda po zmúdrení) sa k formálnej definícii vrátiť, určite už bude pôsobiť vľúdnejšie.*

Príklad 30. *Na množine $A = \{a, b, c, d\}$ je daná relácia*

$$R = \{[a, b], [b, c], [c, d]\}.$$

Určte R^+.

Riešenie. Najskôr urobíme prvú iteráciu (označíme si ju T_1), teda

$$T_1 = \mathcal{T}^1(R) = \{[a,b],[b,c],[c,d]\} \cup \{[a,c],[b,d]\}.$$

K pôvodnej relácii sme pridali všetky nové dvojice, ktoré vznikli skladaním $R \circ R$. Toto si treba dobre premyslieť. Teraz máme novú reláciu, a ak by už bola tranzitívna, tak by $T_1 = R^+$. Ako zistíme, či je tranzitívna? Jednoducho. Urobíme $\mathcal{T}^2(R)$ (teda zložíme $T_1 \circ T_1$) a ak nám už nič nové nevznikne, tak bola tranzitívna. To ale nie je náš prípad, lebo nám ešte pribudne dvojica $[a,d]$. Teda

$$T_2 = \mathcal{T}^2(R) = T_1 \cup \{[a,d]\}.$$

A relácia T_2 už tranzitívna je (overte si to), a preto

$$T_2 = R^+ = \{[a,b],[b,c],[c,d],[a,c],[b,d],[a,d]\}.$$

Tranzitívny uzáver a tranzitívnosť. Všimnime si, že výsledkom prvej iterácie, pri hľadaní tranzitívneho uzáveru relácie R je $R \cup (R \circ R)$. Ak je relácia R tranzitívna, tak potom $R = R^+$, čo znamená, že pri prvej iterácii nám nepribudla žiadna nová usporiadaná dvojica, teda $R \circ R \subseteq R$. Preto platí, že relácia R je tranzitívna práve vtedy, keď $R \circ R \subseteq R$.

Príklad 31. *Nech $\varrho(R)$ je reflexívny uzáver relácie R. Zistite, či platí:*

$$\varrho(R_1 \cap R_2) = \varrho(R_1) \cap \varrho(R_2).$$

Riešenie. Vzhľadom k tomu, ako postupujeme pri „výrobe“ reflexívneho uzáveru (pridávame len dvojice, ktoré majú prvú a druhú zložku rovnaké), predpokladáme, že daná rovnosť platí, skúsime ju teda dokázať.

$$\text{Nech } [x,y] \in \varrho(R_1 \cap R_2) \Rightarrow [x,y] \in R_1 \cap R_2 \vee x = y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ([x,y] \in R_1 \wedge [x,y] \in R_2) \vee x = y \Rightarrow ([x,y] \in R_1 \vee x = y) \wedge ([x,y] \in R_2 \vee x = y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [x,y] \in \varrho(R_1) \wedge [x,y] \in \varrho(R_2) \Rightarrow [x,y] \in \varrho(R_1) \cap \varrho(R_2).$$

Opačnú inklúziu už zvládne dokázať každý sám.

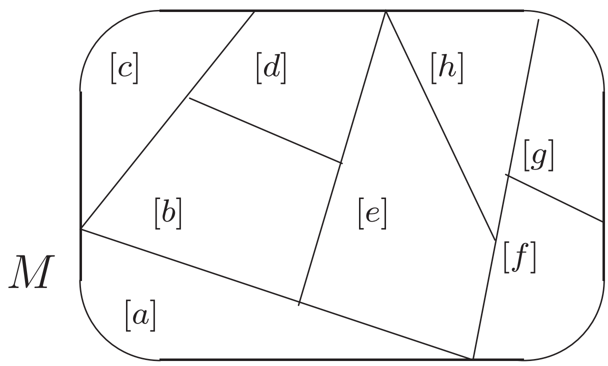
2 Rozklad množiny a relácia ekvivalencie

Každú neprázdnu množinu môžeme vhodným spôsobom rozdeliť na systém disjunktných podmnožín. Stretli sme sa s tým už na základnej škole, keď sme napr. množinu prirodzených čísel rozdelili na množinu párnych a množinu nepárnych čísel. Takýchto príkladov máme v matematike veľa, preto nás neprekvapí, že takéto „rozdelenie“ má aj svoj názov.

Definícia 32. *Nech A je neprázdna množina. Systém S podmnožín množiny A sa nazýva* **rozklad** *množiny A, ak*

- $\emptyset \notin S$,
- $\forall B, C \in S \colon B \neq C \Rightarrow B \cap C = \emptyset$,
- $\bigcup\limits_{X \in S} X = A$.

Poznámka 33. *Posledný bod definície treba chápať tak, že zjednotením všetkých množín patriacich do systému S je množina A.*



Príklad 34. *Určte vymenovaním všetky rozklady množiny:*

1. $\{1{,}2\}$,
2. $\{1{,}2{,}3\}$.

Riešenie. Teda našou úlohou je nájsť všetky možnosti, ako rozdeliť prvky uvedených množín. Pri takto malých množinách je to jednoduchá úloha.

1.
   - $S_1 = \{\{1\}, \{2\}\}$,
   - $S_2 = \{\{1, 2\}\}$.
2.
   - $S_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$,
   - $S_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$,
   - $S_3 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$,
   - $S_4 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$,
   - $S_5 = \{\{1, 2, 3\}\}$.

Poznámka 35. *Premyslite si, koľko má rozkladov $n-$ prvková množina. Táto úloha je veľmi ťažká, aj keď na prvý pohľad nevyzerá.*

Teraz sa znovu vrátime k reláciám a zameriame sa na také, ktoré sú na množine A, teda také, pre ktoré platí $R \subseteq A \times A$.

Definícia 36. *Nech R je relácia na množine A. Hovoríme, že R je relácia* **ekvivalencie** *na A, ak R je reflexívna, symetrická a tranzitívna na A.*

S vlastnosťami, ktoré musí relácia ekvivalencie spĺňať sme sa už zoznámili v predchádzajúcich kapitolách, teraz uvedieme jednoduchý príklad, keď relácia spĺňa všetky tri vlastnosti naraz.

Príklad 37. *Nech $A = \{0, 1, 2, 3\}$ a nech R je relácia na množine A daná takto:*

$$R = \{[0, 0], [1, 1], [2, 2], [3, 3], [1, 2], [2, 1], [0, 3], [3, 0]\}.$$

Zistite, či R je reláciou ekvivalencie.

Vzhľadom k tomu, že pre každý prvok $a \in A$ platí, že $[a, a] \in R$, relácia R je reflexívna. Keďže $R = R^+$ (toto si overte), je relácia R aj tranzitívna. Symetriu vieme tiež jednoducho skontrolovať (stačí kontrolovať len dvojice, ktoré nemajú rovnakú prvú a druhú zložku). Všimnite si, že množinu A by sme pomocou relácie R mohli rozdeliť do dvoch disjunktných množín, pričom v každej z nich budú iba prvky, ktoré sú v relácii R. Sú to množiny $A_0 = \{0, 3\}, A_1 = \{1, 2\}$. Toto nie je náhoda, takto pekne to funguje pre každú reláciu ekvivalencie.

Súvislosť medzi reláciami ekvivalencie a rozkladmi na danej množine popisuje nasledujúca veta.

Veta 38. *Nech R je relácia ekvivalencie na množine A. Pre ľubovoľný prvok $a \in A$ označíme $\overline{a} = \{x \in A\colon\ xRa\}$, potom $S = \{\overline{a}\colon a \in A\}$ je rozklad množiny A.*

Teda prvky v jednotlivých množinách $\bar{a}$ sú spolu v relácii, čo znamená, že sú z pohľadu danej relácie ekvivalencie zameniteľné (podobné, rovnaké, ekvivalentné atď.). Preto často vyberáme z každej množiny $\bar{a}$ po jednom prvku a pôvodná množina sa nám (aj práca s ňou) zredukuje na množinu týchto vybraných prvkov.

Definícia 39. *Nech R je ekvivalencia na množine A. Množinu $\overline{a} = \{x \in A\colon xRa\}$ nazývame trieda rozkladu množiny A podľa ekvivalencie R daná prvkom a. Systém $\{\overline{a}\colon a \in A\}$ budeme označovať $A/_R$ a nazývať faktorová množina množiny A podľa R.*

Tieto dôležité pojmy a súvislosti medzi nimi si vysvetlíme na nasledujúcich príkladoch.

Príklad 40. *Nech $A = \{0, 1, 2\}$ a nech R_1, R_2, R_3 sú relácie na množine A dané takto:*

- $R_1 = \{[0, 0], [1, 1], [2, 2]\}$,
- $R_2 = \{[0, 0], [1, 1], [2, 2], [1, 2], [2, 1]\}$,
- $R_3 = \{[0, 0], [1, 1], [2, 2], [1, 2], [2, 1], [0, 1], [1, 0]\}$.

Zistite, či uvedené relácie sú relácie ekvivalencie na množine A, a ak áno, nájdite ich rozklady.

Riešenie.

- Relácia R_1 je relácia ekvivalencie, lebo $\forall a \in A\colon [a, a] \in R_1$, teda je reflexívna. Ďalej je aj symetrická, vzhľadom k tomu, že obsahuje iba dvojice, ktoré majú rovnakú prvú aj druhú zložku, tak sa symetria a aj tranzitivita overí jednoducho a hlavne rýchlo. Rozklad daný R_1 je $S = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$. V každej triede rozkladu sú tie prvky, ktoré sú spolu v relácii, tu je každý prvok v relácii len sám so sebou, preto musia byť tri triedy rozkladu a v každej je práve jeden prvok. Faktorová množina je $A/_{R_1} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$.

- Relácia R_2 je relácia ekvivalencie, lebo $\forall a \in A\colon [a,a] \in R_2$, teda je reflexívna. Ďalej je aj symetrická, okrem dvojíc, ktoré majú rovnakú prvú aj druhú zložku, obsahuje navzájom symetrické dvojice $[1,2],[2,1]$. Pre tranzitivitu treba overiť len dvojice $[1,2],[2,1]$ a tie nám vygenerujú iba dvojice $[1,1],[2,2]$. Teda R_2 je aj tranzitívna. Rozklad daný R_2 je $S = \{\{0\},\{1,2\}\}$. Triedy sú dve, lebo prvky 1 2 sú spolu v relácii, teda sú spolu v jednej triede, prvok 0 je v relácii len sá so sebou, preto potrebuje svoju vlastnú triedu. Faktorová množina je $A/_{R_2} = \{\overline{0},\overline{1}\}$.

- Relácia R_3 nie je relácia ekvivalencie, lebo síce $\forall a \in A\colon [a,a] \in R_3$, teda je reflexívna. Ďalej je aj symetrická, okrem dvojíc, ktoré majú rovnakú prvú aj druhú zložku, obsahuje navzájom symetrické dvojice $[1,2],[2,1],[1,0],[0,1]$. Ale nie je tranzitívna, lebo $[2,1] \in R_3 \wedge [1,0] \in R_3$ ale $[2,0] \notin R_3$. Rozklad pre R_3 neexistuje. Prečo?

Poznámka 41. *Z predchádzajúceho príkladu je zrejmé, ako môžeme z relácie ekvivalencie vyrobiť rozklad množiny. Ak naopak máme daný rozklad množiny A, tak vieme jednoznačne k nemu skonštruovať reláciu ekvivalencie. Stačí si uvedomiť, že v jednej triede rozkladu sú tie prvky, ktoré sú spolu v relácii. Teda ak máme nejakú triedu rozkladu napr. A_1, tak jej prvky sú navzájom v relácii a teda všetky dvojice z kartézskeho súčinu $A_1 \times A_1$ budú patriť do relácie ekvivalencie. To znamená, že výsledná relácia je zjednotením týchto kartézskych súčinov jednotlivých tried rozkladu.*

Príklad 42. *Na množine $\mathbb{Z}$ je daná relácia $\equiv$ nasledovne:*

$$a \equiv b \iff 6|(a-b).$$

Je $\equiv$ relácia ekvivalencie na $\mathbb{Z}$?

Riešenie. Skôr, ako budeme dokazovať jednotlivé vlastnosti, je vhodné zistiť, aké dvojice do tejto relácie patria. Napríklad dvojica $[3,9]$ do relácie patrí, lebo $6|(3-9)$, ale dvojica $[3,8]$ do relácie nepatrí, lebo $6 \not|(3-8)$. Skúste sa najskôr zamyslieť nad tým, čo musí platiť pre dvojice z tejto relácie, až potom pokračujte v čítaní.

- Zrejme pre každé celé číslo platí: $(a - a = 0 \wedge 6|0) \Rightarrow a \equiv a$, preto $\equiv$ je reflexívna relácia.

- Nech $a \equiv b$, potom $6|(a-b)$, ale potom $6|[-(a-b)]$, a teda $6|(b-a)$, z čoho plynie $b \equiv a$, teda $\equiv$ je symetrická relácia.

- Nech $a \equiv b$ a $b \equiv c$. Potom $6|(a-b) \wedge 6|(b-c)$. Ale potom $6|[(a-b)+(b-c)]$. Po úprave $6|(a-c)$, a preto $a \equiv c$, teda $\equiv$ je tranzitívna.

- Relácia $\equiv$ spĺňa všetky tri vlastnosti, a preto je reláciou ekvivalencie. Táto relácia rozdelí množinu celých čísel do šiestich tried a to podľa zvyšku po delení šestimi. Napríklad v triede $\overline{0}$ budú celé čísla, ktoré sú deliteľné šestimi bezo zvyšku (dajú sa napísať v tvare $6.k+0; k \in \mathbb{Z}$). Teda $\overline{0} = \{,\dots -18,-12,-6,0,6,12,18,\dots\}$. Do triedy $\overline{1}$ patria celé čísla, ktoré po delení šestimi dávajú zvyšok 1 (dajú sa napísať v tvare $6.k+1; k \in \mathbb{Z}$), teda $\overline{1} = \{,\dots -17,-11,-5,1,7,13,19,\dots\}$. Treba si uvedomiť, že napr. $-11 = 6.(-2)+1$. Takto môžeme pokračovať až po $\overline{5}$ (lebo zvyšky po delení šestimi sú $0,1,\dots,5$). Faktorová množina je $\mathbb{Z}/_{\equiv} = \{\overline{0},\overline{1},\dots,\overline{5}\}$.

Príklad 43. *Na množine prirodzených čísel (v tejto úlohe budeme aj 0 považovať za prirodzené číslo) je daná relácia $\sim$ takto*

$$m \sim n \iff m,n \textit{ majú rovnakú cifru na mieste jednotiek.}$$

Dokážte, že $\sim$ je relácia ekvivalencie, nájdite rozklad na $\mathbb{N}$ a príslušnú faktorovú množinu.

Riešenie. Postupne dokážeme, že $\sim$ je relácia ekvivalencie.

- $\sim$ je reflexívna, lebo každé prirodzené číslo má jednoznačný dekadický zápis, a teda má samé so sebou rovnakú cifru na mieste jednotiek.
- $\sim$ je symetrická, lebo ak $m \sim n$, tak m a n majú rovnakú cifru na mieste jednotiek, ale aj n a m majú rovnakú cifru na mieste jednotiek, teda aj $n \sim m$.
- $\sim$ je tranzitívna, lebo ak $m \sim n$ a $n \sim k$, tak m a n majú rovnakú cifru na mieste jednotiek, ale aj n a k majú rovnakú cifru na mieste jednotiek, z toho však vyplýva, že aj m a k majú rovnakú cifru na mieste jednotiek, teda $m \sim k$.

K relácii $\sim$ prislúcha rozklad množiny, daný nasledovne: do tej istej triedy patria tie prirodzené čísla, ktoré majú rovnakú cifru na mieste jednotiek (končia tou istou cifrou), teda rozklad má 10 tried a $N/_{\sim} = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{9}\}$.

Príklad 44. *Zistite, ktoré z nasledujúcich relácií sú ekvivalencie na množine* $\mathbb{R}$.

- $R_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x}{y} = 0\}$,
- $R_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon |x - y| \geq 0\}$,
- $R_3 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon x = y\}$.

Riešenie.

- R_1 nie je reláciou ekvivalencie, nie je reflexívna, v R_1 nie je napr. dvojica $[1, 1]$, dokonca žiadna dvojica typu $[x, x] \colon x \in \mathbb{R}$. Toto síce stačí, aby to nebola relácia ekvivalencie, ale skúste si zistiť, či aj niektorú inú vlastnosť ešte nespĺňa.
- R_2 je reláciou ekvivalencie. Je reflexívna, lebo pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí, že $|x - x| = 0 \geq 0$, teda $\forall x \in \mathbb{R} \colon [x, x] \in R_2$. Z vlastnosti absolútnej hodnoty vyplýva, že $|x - y| = |y - x|$, a teda ak $[x, y] \in R_2$, tak aj $[y, x] \in R_2$, teda R_2 je symetrická. Kto si doteraz nevšimol, tak $|x-y| \geq 0$ platí pre ľuboľnú dvojicu $x, y \in \mathbb{R}$ (prečo?), a preto ak $|x-y| \geq 0$ a $|y-z| \geq 0$, tak aj $|x - z| \geq 0$, a teda relácia je aj tranzitívna, a teda je reláciou ekvivalencie. Aký rozklad má relácia R_2?
- R_3 je reláciou ekvivalencie. Všimnime si, aké dvojice patria do R_3. Sú to dvojice typu $[x, x] \colon \forall x \in \mathbb{R}$. Hneď vidíme, že relácia je reflexívna. Nech $[x, y] \in R_3$, tak $x = y$. Ale aj $y = x$, a preto $[y, x] \in R_3$, čo znamená, že R_3 je symetrická, šikovnejší to videli aj bez dôkazu. Podobne ukážeme aj tranzitívnosť. Nech $[x, y] \in R_3$ a $[y, z] \in R_3$, potom $x = y, y = z$, potom $x = z$, a teda $[x, z] \in R_3$. Aký rozklad má relácia R_3?

3 Relácie usporiadania

V tejto časti si budeme všímať ďalší špeciálny typ relácií. Najskôr si uvedieme jeden príklad.

Príklad 45. *Nech M je množina všetkých študentov 1. ročníka FIT. Uvažujme postupne relácie $R_i \subseteq M \times M, i \in \{1, 2, 3\}$ definované nasledovne:*

- $(x, y) \in R_1$, *práve keď x má aspoň takú výšku ako y*,

- $(x, y) \in R_2$, *práve keď y má aspoň takú výšku ako x,*
- $(x, y) \in R_3$, *práve keď x a y majú rovnaké rodné číslo.*

Výšku uvažujeme v reálnych číslach, teda každý študent ju má jedinečnú. Aké vlastnosti majú tieto relácie?

Riešenie. Zrejme sú všetky tri reflexívne a tranzitívne. Prvé dve sú antisymetrické, posledná je symetrická a antisymetrická zároveň (toto si dobre premyslite).

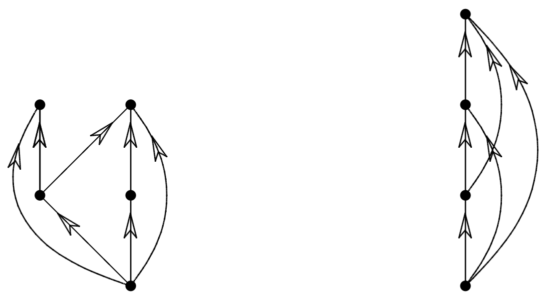
Definícia 46. *Relácia $R \subseteq M \times M$ je* **(čiastočné) usporiadanie** *práve vtedy, keď R je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna.*

Tieto tri vlastnosti musia byť splnené a overené k dôkazu toho, že daná relácia R je usporiadaním.

S usporiadanými množinami sa stretávame nielen v matematike. Slová slovenského jazyka spolu s lexikografickým usporiadaním tvoria usporiadanú množinu. Podľa tohoto usporiadania sú zoradené napríklad v slovníku slovenského pravopisu. A samozrejme stretli sme sa s usporiadaním aj v matematike na základnej škole. Množina reálnych čísel a všetky jej podmnožiny sú usporiadané reláciou „menší alebo rovný“. V tomto prípade sú ľubovoľné dva prvky porovnateľné. Takéto usporiadanie sa nazýva **lineárne**, resp. **úplné.** Množina prirodzených čísel sa dá usporiadať reláciou deliteľnosti. Toto usporiadanie má komplikovanejšiu štruktúru, nakoľko v ňom existujú aj neporovnateľné prvky. Príklad takéhoto usporiadania na podmnožine prirodzených čísel je v závere tejto kapitoly.

Definícia 47. **Usporiadaná množina** *je dvojica $(M, \preceq)$, kde M je množina a $\preceq$ je (čiastočné) usporiadanie na M.*

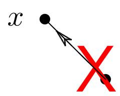
Definícia 48. *Usporiadanie $\preceq$ na M je* **lineárne (úplné)**, *ak každé dva prvky M sú v $\preceq$ porovnateľné.*



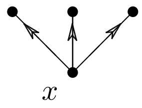
Na obrázku vpravo je úplné usporiadanie, na obrázku vľavo sú aj neporovnateľné dvojice, teda nie je úplné.

Definícia 49. *Nech $(M, \preceq)$ je usporiadaná množina. Prvok $x \in M$ je*

- **minimálny**, *práve keď pre každé $y \in M$ platí, že ak $y \preceq x$, tak $x \preceq y$ (z antisymetrie relácie $\preceq$ platí, že pre každé $y \preceq x$ je $y = x$, teda x je prvok, pod ktorým nie je žiaden prvok);*



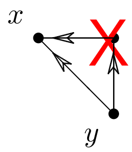
- **maximálny**, *práve keď pre každé* $y \in M$ *platí, že ak* $x \preceq y$*, tak* $y \preceq x$ *(z antisymetrie relácie* $\preceq$ *platí, že pre každé* $y \preceq x$ *je* $y = x$*, teda* x *je prvok, nad ktorým nie je žiaden prvok);*
- **najmenší**, *práve keď pre každé* $y \in M$ *platí, že* $x \preceq y$ *(je to prvok, nad ktorým sú všetky ostatné prvky);*



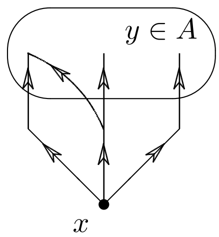
- **najväčší**, *práve keď pre každé* $y \in M$ *platí, že* $y \preceq x$ *(je to prvok, pod ktorým sú všetky ostatné prvky).*

Nech $(M, \preceq)$ *je usporiadaná množina. Prvok* $x \in M$

- **pokrýva** $y \in M$*, práve keď* $x \neq y$*,* $y \preceq x$ *a neexistuje žiadne* $z \in M$ *také, že* $x \neq z \neq y$ *a* $y \preceq z \preceq x$*;*



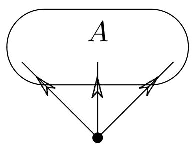
- *je* **dolné ohraničenie (dolní závora, mez)** *množiny* $A \subseteq M$*, práve keď* $x \preceq y$ *pre každé* $y \in A$*;*



- *je* **horné ohraničenie (horní závora, mez)** *množiny* $A \subseteq M$*, práve keď* $y \preceq x$ *pre každé* $y \in A$.

Nech $(M, \preceq)$ *je usporiadaná množina. Prvok* $x \in M$

- *je* **infimum** *množiny* $A \subseteq M$*, práve keď* x *je najväčšie dolné ohraničenie (dolní závora) množiny* A*;*



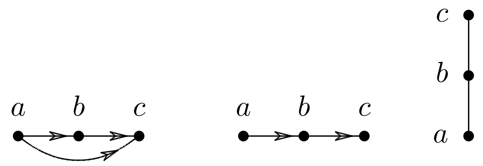
- *je* **supremum** *množiny* $A \subseteq M$*, práve keď* x *je najmenšie horné ohraničenie (horní závora) množiny* A.

Premyslite si v akom vzťahu je najmenší a minimálny prvok, podobne aj najväčší a maximálny prvok.

Definícia 50. *Hovoríme, že* $(X, \preceq)$ *je* **dobre usporiadaná množina**, *ak* X *je lineárne usporiadaná reláciou* $\preceq$ *a každá neprázdna množina* $A \subseteq X$ *má v tomto usporiadaní najmenší prvok.*

Zrejme každá konečná lineárne usporiadaná množina je dobre usporiadaná, rovnako aj každá podmnožina dobre usporiadanej množiny je v tomto usporiadaní sama dobre usporiadaná. Tento pojem je zaujímavejší pri nekonečných množinách. Príkladom nekonečnej dobre usporiadanej množiny je množina prirodzených čísel usporiadaná reláciou $\leq$. Premyslite si, ako je to s množinou reálnych čísel.

Reláciu usporiadania by sme tiež mohli zakresliť pomocou klasických grafov, ako všetky relácie doteraz. Ale vzhľadom k tomu, že každé usporiadanie je reflexívne, tak môžeme všetky slučky vynechať a tým graf zjednodušit a sprehľadniť. Navyše sú všetky usporiadania tranzitívne a to nás vedie tiež k vynechaniu niektorých hrán, presnejšie ak napr. $[a, b] \in R, [b, c] \in R$, tak vďaka tranzitívnosti je aj $[a, c] \in R$. My však môžeme hranu, ktorá reprezentuje dvojicu $[a, c]$ vynechať a zakresliť len hrany prislúchajúce dvojiciam $[a, b], [b, c]$. A pokiaľ všetky šipky povedú smerom hore (teda ak dvojicu $[a, b] \in R$ nakreslíme tak, že b bude vyššie ako a), tak šipky tiež nemusíme zakresľovať. Postup tohto zjednodušenia vidíme na nasledujúcom obrázku:

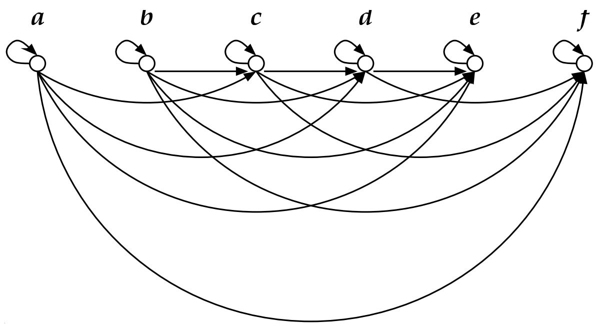


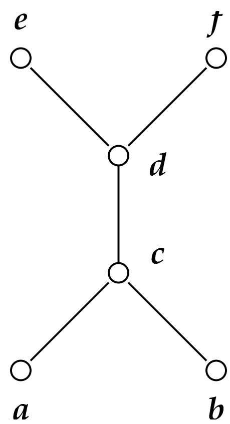
Prehľadnejšie obrázky boli motiváciou zavedenia tzv. **Hasseovských diagramov** usporiadaných množín. Teraz uvedieme aj formálnu definíciu konštrukcie týchto diagramov.

Definícia 51. *Hasseovský diagram konečnej usporiadanej množiny* $(M, \preceq)$ *je (jednoznačné) grafické znázornenie, ktoré vznikne takto:*

- *Do prvej „horizontálnej vrstvy“ zakreslíme body odpovedajúce minimálnym prvkom* $(M, \preceq)$.
- *Ak už máme „vrstvu“* i*, tak do „vrstvy“* $i+1$ *(ktorá je „nad“ vrstvou* i*) zakreslíme všetky nezakreslené prvky, ktoré pokrývajú iba prvky „vrstiev“* $\leq i$*. Ak prvok* x *„vrstvy“* $i+1$ *pokrýva prvok* y *„vrstvy“* $\leq i$*, spojíme* x *a* y *neorientovanou hranou (tj. „čiarou“).*

Nasledujúce dva obrázky sú názornou ukážkou sprehľadnenia:





Pekným príkladom usporiadania na množine je usporiadanie potenčnej množiny k vopred danej množine pomocou inklúzie. Reláciu inklúzie na potenčnej množine štvorprvkovej množiny

$\{a, b, c, d\}$ zakreslíme Hasseovským diagramom takto:

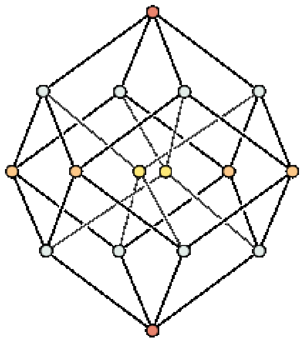
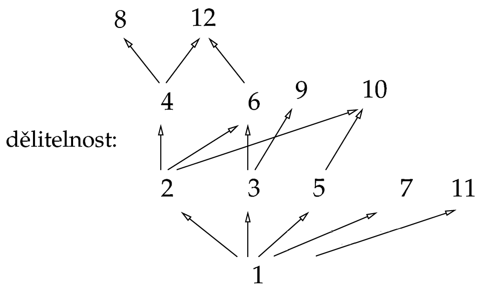


Diagram má 5 „poschodí". Najnižšie je prázdna množina, lebo je podmnožinou každej množiny. Hneď nad ňou sú všetky jednoprvkové množiny $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$. Na ďalšom „poschodí" sú všetky dvojprvkové podmnožiny (premyslite si, ako zistíte ich počet). Napr. množina $\{a, b\}$ je nad množinami $\{a\}, \{b\}$, lebo to sú jej podmnožiny (samozrejme aj prázdna množina je jej podmnožinou, ale tá už je priamo pod uvedenými jednoprvkovými množinami). Takto postupujeme o „poschodie" vyššie, kde sú všetky trojprvkové podmnožiny, a náš výstup ukončíme na piatom „poschodí", kde už bude len jediná množina $\{a, b, c, d\}$.

Príklad 52. *Na množine $M = \{1, 2, \ldots, 12\}$ je daná relácia usporiadania takto: $[a, b] \in R \iff a|b$. Znázornite Hasseovský diagram tohto usporiadania. To, že je daná relácia usporiadaním, si premyslite.*

Riešenie. Pri kreslení Hasseovského diagramu myslíme na to, že na „najnižšom poschodí" bude číslo, ktoré je deliteľom všetkých čísel z množiny M, teda číslo 1. Na ďalšom „poschodí" budú všetky prvočísla z množiny M a takto postupujeme stále vyššie.



Príklad 53. *Predstavme si takú praktickú úlohu, budeme kupovať práčku. Úlohu zjednodušíme tak, že budeme do úvahy brať len dva atribúty a to cenu a spotrebu. Budeme uvažovať množinu n práčiek, pričom každé dve práčky sa líšia aspoň v jednom z atribútov. Ako vymyslieť reláciu usporiadania na množine práčiek tak, aby sme ich usporiadali od najlepšej (najvhodnejšej na kúpu) po najhoršiu. Ak si označíme cenu $i-$tej práčky ako C_{p_i} a spotrebu $i-$tej práčky ako S_{p_i}, tak potom relácia usporiadania môže byť daná nasledovne:*

$$p_i \preceq p_j \iff C_{p_i} \leq C_{p_j} \text{ a } S_{p_i} \leq S_{p_j}.$$

Premyslite si, že sú naozaj splnené všetky tri potrebné vlastnosti tejto relácie, aby to mohlo byť usporiadanie. Sú všetky práčky porovnateľné? Bude $\preceq$ reláciou usporiadania aj vtedy, keď v množine práčiek aspoň jedna dvojica rôznych práčiek s rovnakou cenou a spotrebou?

Odpoveď na poslednú otázku je záporná, lebo vlastnosť antisymetrie by bola porušená, teda by sa nejednalo o čiastočné usporiadanie. V takomto prípade by sme hovorili o tzv. **kvázi-usporiadaní** *na množine A, teda o relácii, ktorá je reflexívna a tranzitívna na množine A.*

4 Zobrazenia

Posledným typom relácií, ktorému sa budeme venovať, budú zobrazenia. So zobrazeniami na množine reálnych čísel ste sa stretli už na strednej škole.

Definícia 54. *Binárnu reláciu $f \subseteq A \times B$ nazývame* **zobrazením** *z množiny A do množiny B vtedy, keď o nej platí:*
$$[a,b] \in f \wedge [a,c] \in f \Rightarrow b = c.$$

Podobne ako pri reláciách má zmysel hovoriť o definičnom obore $D(f)$ a obore hodnôt $H(f)$, ktoré sú dané nasledovne:

$$a \in D(f) \subseteq A \iff \exists b \in B\colon f(a) = b,$$

$$b \in H(f) \subseteq B \iff \exists a \in A\colon f(a) = b.$$

Často namiesto zápisov $f \subseteq A \times B$ a $[a,b] \in f$, používame takéto zápisy $f\colon A \to B$ a $f(a) = b$, potom zápis $f\colon A \to B$ znamená, že $A = D(f)$.

Príklad 55. *Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich relácií sú zobrazenia:*

- $P = \{[1,2],[2,3],[3,1],[3,2]\}$,
- $R = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon |x| + |y| = 1\}$,
- $S = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon x + |y| = 1\}$,
- $T = \{[x,y] \in \mathbb{Z}^2\colon |x| + y = 1\}$.

Riešenie. Budeme overovať, či je splnená implikácia z definície zobrazenia.

- P nie je zobrazenie, lebo $[3,1] \in P \wedge [3,2] \in P$, ale $1 \neq 2$.
- R nie je zobrazenie, lebo $[0,1] \in R \wedge [0,-1] \in R$, ale $1 \neq -1$.
- S nie je zobrazenie, lebo $[0,1] \in S \wedge [0,-1] \in S$, ale $1 \neq -1$.
- Zrejme T je zobrazenie, to znamená, že potrebujeme dokázať (presne podľa definície zobrazenia), že ak $[x,y] \in T \wedge [x,z] \in T$, tak $y = z$. Nech $[x,y] \in T \wedge [x,z] \in T$, potom $|x| + y = 1 \wedge |x| + z = 1$, potom $y = 1 - |x| \wedge z = 1 - |x|$, a teda $y = 1 - |x| = z \Rightarrow y = z$.

Príklad 56. *Ak binárne relácie f, g sú zobrazenia, tak aj $f \circ g$ je zobrazenie. Dokážte.*

Riešenie. Potrebujeme ukázať pre ľubovolné tri prvky a, b, c, že ak $[a,b] \in f \circ g$ a $[a,c] \in f \circ g$, tak $b = c$. Nezabúdame, že skladáme „odzadu“. Predpokladajme teda, že $[a,b] \in f \circ g$ a $[a,c] \in f \circ g$. Potom $\exists d\colon [a,d] \in g \wedge [d,b] \in f$ a $\exists e\colon [a,e] \in g \wedge [e,c] \in f$. Keďže g je zobrazenie, tak z $[a,d] \in g$ a $[a,e] \in g$ vyplýva, že $d = e$. Dosadíme za $e-$čko $d-$čko a dostaneme: $[d,b] \in f$ a $[d,c] \in f$. Vzhľadom k tomu, že aj f je zobrazenie, tak $b = c$, čo sme mali dokázať.

Príklad 57. *Zistite, či platí: Ak binárne relácie f, g sú zobrazenia, tak aj $f \cup g$ je zobrazenie.*

Riešenie. Vždy je dobré najskôr vyskúšať niekoľko konkrétnych príkladov. Ak nadobudneme podozrenie, že tvrdenie neplatí, hľadáme vhodný protipríklad, v opačnom prípade skúsime tvrdenie dokázať. V tomto prípade stačí použiť zobrazenia $f(x) = |x|, g(x) = 1 - |x|$ (alebo aj úplne nejaké iné vhodné dve rôzne zobrazenia). Zrejme $[0,1] \in g, [0,0] \in f$, preto $[0,1] \in f \cup g \wedge [0,0] \in f \cup g$, ale $0 \neq 1$, čo znamená, že sme našli vhodný protipríklad, lebo $f \cup g$ nie je zobrazenie.

Príklad 58. *Zistite, či platí: Ak binárne relácie f, g sú zobrazenia, tak aj $f \cap g$ je zobrazenie.*

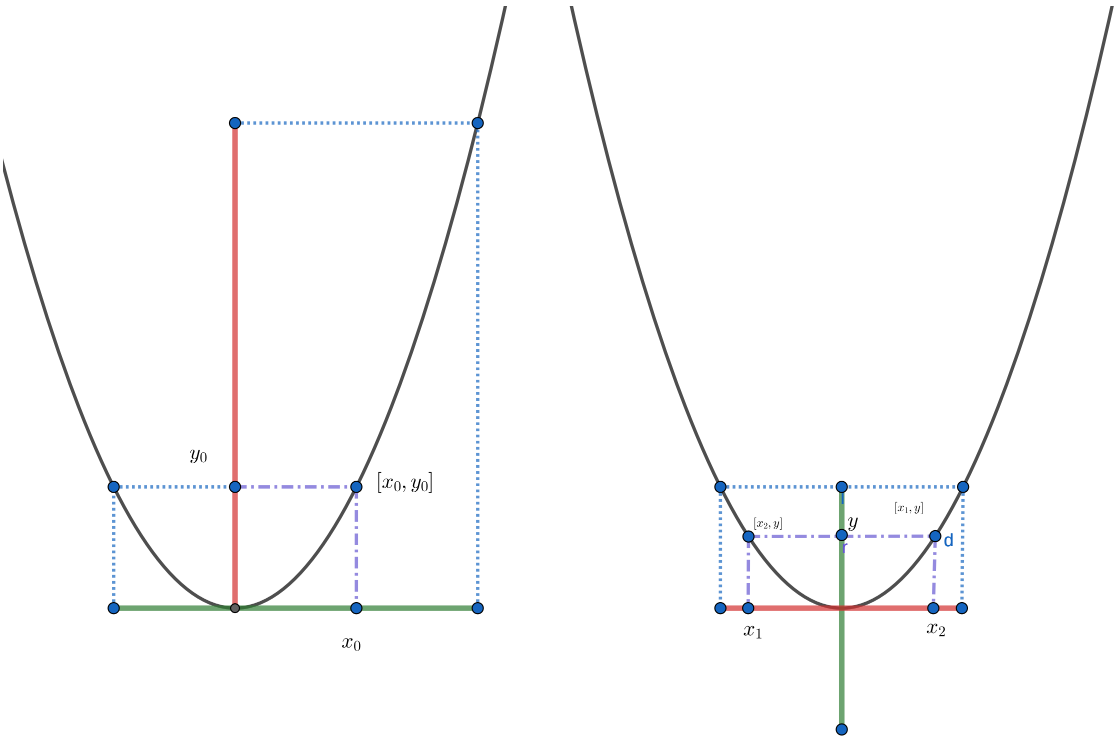
Riešenie. Potrebujeme ukázať, že ak $[a,b] \in f \cap g$ a $[a,c] \in f \cap g$, tak $b = c$. Zrejme tvrdenie platí, tak sa pustíme do jeho dokazovania. Nech $[a,b] \in f \cap g$ a $[a,c] \in f \cap g$. Potom $[a,b] \in f \wedge [a,b] \in g$ a $[a,c] \in f \wedge [a,c] \in g$. Keďže f, g sú zobrazenia, tak z $[a,b] \in g$ a $[a,c] \in g$ vyplýva, že $b = c$ (to isté platí aj pre dvojice $[a,b], [a,c]$ a zobrazenie f). Preto $f \cap g$ musí byť tiež zobrazenie.

Definícia 59. *Nech $f\colon A \to B$ je zobrazenie a $M \subseteq A, P \subseteq B$.*

- **Obraz množiny** *M je množina $f(M) \subseteq B$ daná takto:*
$$f(M) = \{b \big|\ \exists a \in M\colon f(a) = b\}.$$
- **Úplný vzor množiny** *P: je množina $f^{-1}(P) \subseteq A$ daná takto:*
$$f^{-1}(P) = \{a \big|\ \exists b \in P\colon f(a) = b\}.$$

Príklad 60. *Nech f je zobrazenie na množine $\mathbb{R}$ dané predpisom $y = x^2$. Určte $f(\langle -1, 2\rangle), f(\langle -1, 1\rangle), f(\mathbb{R}), f^{-1}(\langle -1, 1\rangle), f^{-1}(\langle 0, 2\rangle), f^{-1}(\{1\})$.*

Riešenie. Nakreslíme si obrázok (graf funkcie $y = x^2$) a sledujeme, aké majú obrazy prvky z množiny na $x-$ovej osi (v prípade obrazu množín), a naopak sledujeme, kde majú svoje vzory prvky množín z $y-$ovej osi (v prípade úplného vzoru).



Obrázok vľavo je pomôcka k hľadaniu $f(\langle -1, 2\rangle)$. Keďže určujeme obraz množiny, tak množina $\langle -1, 2\rangle$ je na osi x (vyznačená zelenou), výsledok bude na osi y. Vyberieme ľubovolný bod z tejto množiny, napr. x_0 a nájdeme jeho obraz. Teda vedieme týmto bodom rovnobežku s osou y, nájdeme jej priesečník s grafom funkcie ($[x_0, y_0]$) a potom nájdeme $y-$ovú súradnicu tohto bodu (y_0) a to je obraz x_0. Koľko obrazov môžeme nájsť k jednému vzoru? Podobne by sme našli obrazy ostatných prvov množiny $\langle -1, 2\rangle$. A zistíme, že výsledok je množina $\langle 0, 4\rangle$ (červená úsečka). Ako budeme postupovať pri hľadaní úplného vzoru v úlohe $f^{-1}(\langle -1, 1\rangle)$? Musíme si uvedomiť, že hľadáme vzor, a teda zadaná množina bude na osi y a výsledok na osi x. Vyznačíme si množinu $\langle -1, 1\rangle$ na os y (zelená úsečka na obrázku vpravo) a vyberieme si na nej ľubovolný bod, napr. y. A teraz budeme hľadať jeho vzor. Pozor, vzory budú dva (x_1, x_2). Treba si uvedomiť, že k jednému obrazu môžeme nájsť až nekonečne veľa vzorov (alebo aj žiadny). Takto postupne prejdeme celú množinu $\langle -1, 1\rangle$ a zistíme, že $f^{-1}(\langle -1, 1\rangle) = \langle -1, 1\rangle$. Všimnite si, že $f^{-1}(\langle -1, 0)) = \emptyset$.

- $f(\langle -1, 2\rangle) = \langle 0, 4\rangle$,
- $f(\langle -1, 1\rangle) = \langle 0, 1\rangle$,
- $f(\mathbb{R}) = \langle 0, \infty)$ (*čo je $f(\mathbb{R})$?*),
- $f^{-1}(\langle -1, 1\rangle) = \langle -1, 1\rangle$,
- $f^{-1}(\langle 0, 2\rangle) = \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle$,
- $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$.

Poslednú úlohu, teda $f^{-1}(\{1\})$ si dobre premyslite. Študenti si často zamieňajú zmysel zápisov $f^{-1}(x)$ a $f^{-1}(\{x\})$. Zrejme $f^{-1}(\{x\})$ je zápis pre vzor jednoprvkovej množiny $\{x\}$, a $f^{-1}(x)$ je zápis pre funkčnú hodnotu v bode x inverznej funkcie k funkcii f. Vzor jednoprvkovej množiny existuje aj napriek tomu, že k funkcii inverzná funkcia neexistuje. Zámenu týchto zápisov budeme trestať bodovými stratami.

Príklad 61. *Nech f je zobrazenie A do B a $A_1, A_2 \subseteq A$. Dokážte, že platí*

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2).$$

Dokážte, že v uvedenom vzťahu nie je možné nahradiť inklúziu rovnosťou.

Riešenie. Skôr ako začnete tvrdenie dokazovať, doporučujem vyskúšať pre konkrétnu funkciu a intervaly, napr. $f(x) = x^2, A_1 = \langle 0, 1\rangle, A_1 = \langle -1, 0\rangle$, prípadne vyskúšať iné intervaly a funkcie. A treba si zopakovať definíciu obrazu množiny, teda ak platí, že $y \in f(A)$, potom existuje také $x \in A$, že $f(x) = y$.

- Dokážeme, že $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. Nech $y \in f(A_1 \cap A_2) \Rightarrow \exists x \in A_1 \cap A_2 \colon f(x) = y \Rightarrow \exists x \colon x \in A_1 \wedge x \in A_2 \colon f(x) = y \Rightarrow y \in f(A_1) \wedge y \in f(A_2) \Rightarrow y \in f(A_1) \cap f(A_2)$.
- Príklad, kde uvedená rovnosť neplatí, ste už isto našli (aspoň tí, ktorí si vyskúšali príklad z úvodného doporučenia). Nech $f(x) = x^2, A_1 = \langle 0, 1\rangle, A_2 = \langle -1, 0\rangle$. Potom $A_1 \cap A_2 = \{0\}, A_1 = \langle 0, 1\rangle, A_2 = \langle 0, 1\rangle$, $f(A_1 \cap A_2) = \{0\}, f(A_1) \cap f(A_2) = \langle 0, 1\rangle$, teda $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$, ale $f(A_1) \cap f(A_2) \not\subseteq f(A_1 \cap A_2)$.

Príklad 62. *Nech f je zobrazenie A do B a $A_1 \subseteq A$. Dokážte, že platí*

$$A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1)).$$

Dokážte, že v uvedenom vzťahu nie je možné nahradiť inklúziu rovnosťou.

Riešenie. Aj v tomto prípade doporučujem vyskúšať pre konkrétnu funkciu a interval, napr. $f(x) = |x|, A_1 = \langle 0, 1\rangle$, prípadne vyskúšať iné intervaly a funkcie. Najskôr dokážeme inklúziu $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$. Nech $x \in A_1 \Rightarrow \exists y \in f(A_1)\colon f(x) = y \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A_1))$. Príklad, kde opačná inklúzia neplatí, sme už našli v úvode, teda $f(x) = |x|, A_1 = \langle 0, 1\rangle$. Zrejme $f(A_1) = \langle 0, 1\rangle, f^{-1}(f(A_1)) = \langle -1, 1\rangle$. Teda $f^{-1}(f(A_1)) \nsubseteq A_1$.
Skúste si premyslieť, aká vlastnosť zobrazenia (v oboch predošlých príkladoch) by nám zaručila rovnosť množín. Možno vám pomôže nasledujúca definícia.

Definícia 63. *Ak o zobrazení f platí*

$$\forall a, b \in D(f)\colon a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b),$$

hovoríme, že je **prosté**, *alebo* **injekcia**.
Nech $f \subseteq A \times B$. Ak platí, že $H(f) = B$ hovoríme, že f je zobrazenie **na** *množinu B, alebo, že f je* **surjekcia**.
Prosté zobrazenie množiny A **na** *množinu B nazývame* **vzájomne jednoznačným zobrazením** *A* **na** *B alebo* **bijekciou** *A* **na** *B.*

Poznámka 64. *Inými slovami, bijekcia A na B je také zobrazenie, ktoré je injekciou a surjekciou zároveň. Premyslite si, že každé prosté zobrazenie je bijekciou svojho definičného oboru na svoj obor hodnôt.*

Príklad 65. *Dokážte, že ak binárna relácia f z A do B je prosté zobrazenie, tak inverzná relácia f^{-1} je tiež zobrazenie (z B do A).*

Riešenie. Potrebujeme dokázať, že ak $f^{-1}(c) = a$ a $f^{-1}(c) = b$, tak $a = b$, samozrejme pre ľubovolnú trojicu a, b, c a za predpokladu, že f je prosté zobrazenie. Teda nech $f^{-1}(c) = a$ a $f^{-1}(c) = b$. To ale znamená, že $f(a) = c$ a $f(b) = c$, teda $f(a) = f(b)$. Všimnime si teraz definíciu prostého zobrazenia:

$$\forall a, b \in D(f)\colon a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b).$$

Jedná sa o implikáciu, vieme, že jej obmenená implikácia je s ňou ekvivalentná, teda platí aj

$$\forall a, b \in D(f)\colon f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$$

Keď toto priamo použijeme v našom dôkaze, tak automaticky dostaneme to želané $a = b$.

Pomocou zobrazení sme schopní porovnávať množiny, samozrejme nie pomocou ľubovolných zobrazení, ale pomocou takých, ktoré majú pekné vlastnosti.

Definícia 66. *Ak existuje bijekcia množiny A na množinu B hovoríme, že množina A je ekvivalentná s množinou B a píšeme $A \sim B$.*

Asi nikoho neprekvapí nasledujúce tvrdenie.

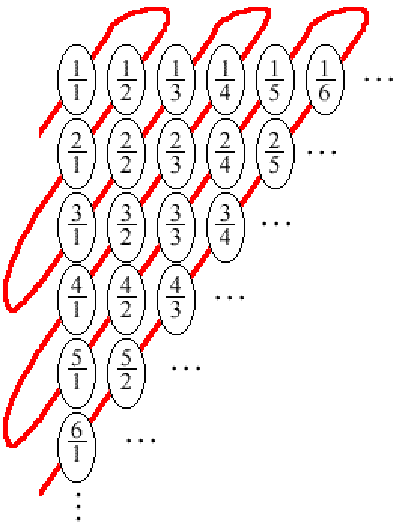
Veta 67. *Pre ľubovoľné množiny A, B, C platí*

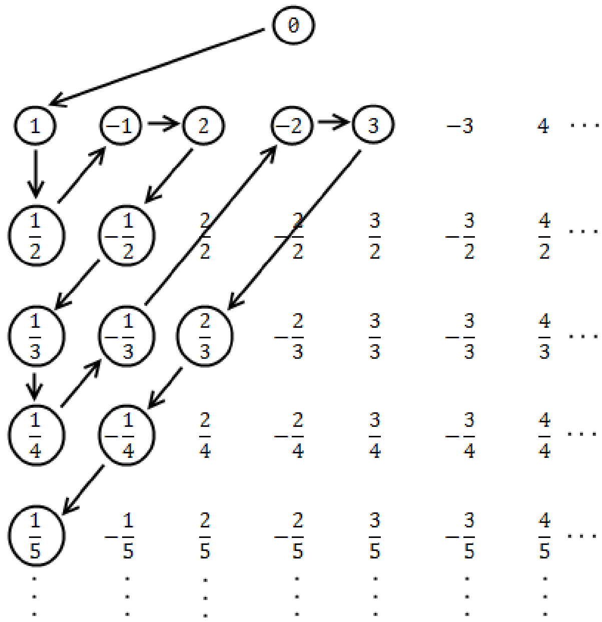
- $A \sim A$,
- $A \sim B \Rightarrow B \sim A$,
- $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Množiny rozlišujeme podľa počtu prvkov nasledovne:

- konečné množiny,
- nekonečné množiny
  - spočítateľné,
  - nespočítateľné.

Práve vďaka relácii $\sim$ z definície 66. budeme vedieť odlíšiť spočítateľné a nespočítateľné množiny. Nech M je nekonečná množina. Ak existuje bijekcia medzi množinou M a množinou prir. čísel, tak M je spočítateľná. V opačnom prípade je nespočítateľná. Čo znamená, že existuje bijekcia medzi danou množinou a množinou prirodzených čísel? To znamená, že prvky danej množiny vieme usporiadať do nekonečnej postupnosti, teda očíslovať jej prvky prirodzenými číslami. Zrejme množina prirodzených čísel je spočítateľná. Množina celých čísel je tiež spočítateľná, vieme ju totiž vhodne usporiadať: $0, 1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n, \ldots$. Premyslite si, prečo celé čísla nemôžeme usporiadť tak, že najskôr zoberieme všetky kladné a potom záporné (prípadne naopak). Princíp usporiadania racionálnych čísel vidíme v nasledujúcich dvoch obrázkoch (najskôr len pre kladné racionálne čísla, potom pre všetky). V prvom riadku je čitateľ vždy 1, menovatele postupne rastú, v $n-$tom riadku sú všetky čitatele n a menovatele znovu postupne rastú. Zoraďujeme po diagonálach, ako je to vyznačené. Všimnite si, že čísla na diagonále majú súčet čitateľa a menovateľa rovnaký.





Ako je to s množinou reálnych čísel? Tá je nespočítateľná. Toto tvrdenie dokázal významný nemecký matematik a logik Georg Cantor. Najskôr dokážeme, že interval $(0, 1)$ je nespočítateľná množina. Dôkaz urobíme sporom, teda budeme predpokladať, že interval $(0, 1)$ je spočítateľná množina. To znamená, že všetky čísla z tohto intervalu vieme zapísať do postupnosti $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$. Tieto čísla vieme zapísať v desatinnom rozvoji a môžeme ich zoradiť napr. takto:

$$r_1 = 0.4628473\ldots$$

$$r_2 = 0.5731694\ldots$$

$$
\begin{aligned}
r_3 &= 0.9856346\ldots\\
r_4 &= 0.5175944\ldots\\
r_5 &= 0.1543646\ldots\\
r_6 &= 0.5437825\ldots\\
r_7 &= 0.7589347\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

pričom nemusia byť usporiadané v prirodzenom usporiadaní (teda napr. vzostupne). Teraz urobíme takýto umelý krok. Všimneme si cifry na diagonále:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 0.{\color{red}4}628473\ldots\\
r_2 &= 0.5{\color{red}7}31694\ldots\\
r_3 &= 0.98{\color{red}5}6346\ldots\\
r_4 &= 0.517{\color{red}5}944\ldots\\
r_5 &= 0.1543{\color{red}6}46\ldots\\
r_6 &= 0.54378{\color{red}2}5\ldots\\
r_7 &= 0.758934{\color{red}7}\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
$$

a vyrobíme z nich nové číslo z intervalu $(0,1)$ tak, že za desatinnú čiarku zapíšeme „červenú cifru“ z čísla r_k na k–te miesto a dostaneme číslo

$$0.4755627\ldots.$$

V tomto novom čísle urobíme ešte dôležité úpravy. Všetky dvojky prepíšeme na päťky a zvyšné cifry prepíšeme na dvojky. Teda v našom prípade dostaneme číslo

$$0.2222252\ldots.$$

Aké číslo sme vyrobili? Je niekde medzi číslami r_i, ktoré máme usporiadané do postupnosti? Vďaka tejto konštrukcii vidíme, že naše číslo sa s každým číslom r_i líši v i–tej cifre za desatinnou čiarkou. Ale my sme predpokladali, že v uvedenej postupnosti sú všetky čísla z intervalu $(0,1)$. Teda sme sa dopracovali k sporu s tým, že interval $(0,1)$ je spočítateľná množina. Teraz už vieme, že množina $(0,1)$ je nespočítateľná a teda aj množina $\mathbb{R}$ je nespočítateľná. (Až na drobný technický detail s rozvojom $\ldots\ \overline{9}$, ktorý pre dosiahnutie jednoznačnosti zápisu v našej postupnosti preferujeme nad konečným rozvojom takého čísla. Teda namiesto 0.125 budeme písať $0.124\overline{9}$. Ďalej, cifry 2 a 5, pomocou ktorých sme naše nové číslo vyrobili, môžeme vybrať aj iné, premyslite si, či tento výber môže byť ľubovolný.)

Tento pekný dôkaz má aj svoj názov, je to Cantorova diagonálna metóda. Je to metóda, ktorá sa hojne používa v teoretickej informatike. Dá sa povedať, že Cantor predstihol dobu, jeho výsledky totiž mnohí matematici v tej dobe nechceli prijať.

Otázky na premyslenie:

- Asi ste si všimli,že zlomky na predchádzajúcich dvoch obrázkoch sa opakujú (je tam napr. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ atď). Prečo to nemá žiaden vplyv na dôkaz toho, že množina $\mathbb{Q}$ je spočítateľná?

- Nech A, B sú spočítateľné množiny. Aká bude množina $A \times B$?
- Nech A, B, C sú spočítateľné množiny. Aká bude množina $A \times B \times C$?
- Nech M je množina všetkých nekonečných postupností z núl a jedničiek. Je množina M spočítateľná?

5 Úlohy na precvičenie

5.1 Relácie

1. Relácie R, S sú dané vymenovaním takto:
$$R = \{[1,1],[1,2],[1,3],[2,1],[2,2]\}, S = \{[2,1],[2,2],[2,3],[3,1],[3,2],[4,1]\}.$$
Určte: $R \circ S,\ S \circ R,\ R^{-1}, S^{-1},\ R^{-1} \circ S^{-1}, (R \circ S)^{-1}, (S \circ R)^{-1}$.
Výsledky: $R \circ S = \{[2,1],[2,2],[2,3],[3,1],[3,2],[3,3],[4,1],[4,2],[4,3]\}$,
$S \circ R = \{[1,1],[1,2],[1,3],[2,1],[2,2],[2,3]\}$, $R^{-1} = \{[1,1],[2,1],[3,1],[1,2],[2,2]\}$,
$S^{-1} = \{[1,2],[2,2],[3,2],[1,3][2,3],[1,4]\}$,
$(R \circ S)^{-1} = \{[1,2],[2,2],[3,2],[1,3],[2,3],[3,3],[1,4],[2,4],[3,4]\}$,
$(S \circ R)^{-1} = \{[1,1],[2,1],[3,1],[1,2],[2,2],[3,2]\}$, $R^{-1} \circ S^{-1} = (S \circ R)^{-1}$.

2. Nech $A = \{n \in \mathbb{N}\colon n \leq 10\}$, $B = \{m \in \mathbb{N}\colon m \leq 12\}$, $R = \{[m,n] \in A \times B\colon n = 3m\}$, $S = \{[m,n] \in B \times A\colon m - n = 2\}$. Zapíšte relácie R, S vymenovaním prvkov. Zostrojte grafy relácií R, S. Určte relácie $R \circ S, S \circ R, R^{-1}, S^{-1}$.
Výsledky: $R = \{[1,3],[2,6],[3,9],[4,12]\}$, $S = \{[3,1],[4,2],[5,3]\dots[11,9],[12,10]\}$,
$R \circ S = \{[3,3],[4,6],[5,9],[6,12]\}$, $S \circ R = \{[1,1],[2,4],[3,7],[4,10]\}$,
$R^{-1} = \{[3,1],[6,2],[9,3],[12,4]\}$, $S^{-1} = \{[1,3],[2,4],[3,5]\dots[9,11],[10,12]\}$.

3. Nech $R = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon y = 2x\}$, $S = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon x^2 = y\}$, $T = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon y = \sqrt{x}\}$. Zostrojte karteziánske grafy relácií R, S, T. Určte relácie $R \circ S, S \circ R, S \circ T, R \circ T, T \circ R, T \circ S$. Zostrojte grafy relácií $R \circ S, S \circ R, S \circ T, R \circ T, T \circ R, T \circ S$.
Výsledky: $R \circ S = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ : y = 2x^2\}$, $S \circ R = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ : y = 4x^2\}$, $S \circ T = \{[x,y] \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ : y = x\}$, $T \circ S = \{[x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ : y = |x|\}$, $S \circ R = \{[x,y] \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ : y = \sqrt{2x}\}$, $R \circ S = \{[x,y] \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ : y = 2\sqrt{x}\}$

4. Na množine $M = \{1,2,3,4\}$ určte vymenovaním reláciu, ktorá je
   (a) symetrická, reflexívna, ale nie je tranzitívna,
   (b) reflexívna a tranzitívna, ale nie je symetrická,
   (c) tranzitívna, ale nie je reflexívna, ani ireflexívna,
   (d) tranzitívna, ale nie je symetrická, ani antisymetrická.

   Výsledky:
   a) napr. $R_a = \{[1,1],[2,2],[3,3],[4,4],[1,2],[2,1],[1,3],[3,1]\}$,
   b) napr. $R_b = \{[1,1],[2,2],[3,3],[4,4],[1,2]\}$,
   c) napr. $R_c = \{[1,1]\}$,
   d) napr. $R_d = \{[1,1],[2,2],[1,2],[2,1],[4,3]\}$.

5. Nech $R = \{(1,3),(2,3),(3,4),(3,1),(4,2)\}$. Nájdite R^+.
Výsledky: $R^+ = \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\}$.

6. Nájdite reláciu S, pre ktorú platí $S^+ \neq S$.
Výsledky: napr. $S = \{[1,2],[2,1]\}$.

7. Nájdite reláciu S, pre ktorú platí $S^+ = S$.
Výsledky: napr. $S = \{[1,2]\}$.

8. Nájdite tranzitívnu reláciu R, pre ktorú platí $R \circ R \neq R$.
Výsledky: napr. $R = \{[1,2]\}$.

9. Nájdite neprázdnu tranzitívnu reláciu R, pre ktorú platí $R \circ R = \emptyset$.

   Výsledky: napr. $R = \{[1, 2]\}$.

10. Dokážte, že pre ľubovolné relácie platí:

    (a) $R \circ (S_1 \cup S_2) = R \circ S_1 \cup R \circ S_2$,
    (b) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$,
    (c) $(R \setminus S)^{-1} = R^{-1} \setminus S^{-1}$,
    (d) $(\bar{R})^{-1} = \overline{R^{-1}}, (R^{-1})^{-1} = R$,
    (e) * $R \circ (\bigcup_{i \in I} S_i) = \bigcup_{i \in I} R \circ S_i), (\bigcup_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcup_{i \in I} R_i^{-1}$.

11. Dokážte, že pre ľubovolné relácie platí:

    (a) $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq R \circ S_1 \cap R \circ S_2$,
    (b) $(S_1 \cap S_2) \circ R \subseteq S_1 \circ R \cap S_2 \circ R$,
    (c) $R \circ S_1 \setminus R \circ S_2 \subseteq R \circ (S_1 \setminus S_2)$.

    Dokážte, že v uvedených vzťahoch nie je možné nahradiť inklúziu rovnosťou.

12. Načrtnite grafy relácií:

    (a) $R = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x + y \leq 5\}$,
    (b) $S = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$,
    (c) $R = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon |x + y| \leq 3\}$.

    Výsledky:

    a) priamky $y = 5 - x, y = 1 - x$ a celý pás medzi nimi,

    a) medzikružie vrátane kružníc $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 16$,

    b) priamky $y = 3 - x, y = -3 - x$ a celý pás medzi nimi.

13. * Určte vymenovaním reláciu:
    $R = \{[x, y] \in \mathbb{Z}^2 \colon |x - 2| + |y + 1| = 5\}$.

14. * Určte prvý a druhý obor relácie:

    (a) $R = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - 2x + y^2 + xy = 20\}$,
    (b) $S = \{[x, y] \in \mathbb{Z}^2 \colon xy + 3x + y^2 + 6y + 9 = 5\}$,
    (c) $R = \{[x, y] \in \mathbb{Z}^2 \colon x + 1 > y > x^2 + 2x - 1\}$.

15. * Relácia je cyklická, ak aRb a bRc implikuje cRa. Dokažte, že relácia je reflexívna a cyklická $\iff$ je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

5.2 Relácia ekvivalencie, rozklady, relácia usporiadania

1. Určte vymenovaním všetky rozklady množiny $\{1, 2, 3, 4\}$.

   Výsledky: Všetkých možností je 15, treba si ich systematicky vypísať.

   Sú to napr. $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}, \dots, \{\{1, 2, 3, 4\}\}$,

2. Nájdite aspoň tri rôzne rozklady množiny $\mathbb{Z}$.

   Výsledky: Napr. $\{\{0\}, \{m \in \mathbb{Z} \colon m > 0\}, \{m \in \mathbb{Z} \colon m < 0\}\}, \{\{2m \colon m \in \mathbb{Z}\}, \{2m + 1 \colon m \in \mathbb{Z}\}\}, \{\{3m \colon m \in \mathbb{Z}\}, \{3m + 1 \colon m \in \mathbb{Z}\}, \{3m + 2 \colon m \in \mathbb{Z}\}\}$.

3. Napíšte relácie ekvivalencie k nasledujúcim rozkladom

   (a) $S_1 = \{a, b, c, d\}$,
   (b) $S_1 = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$,
   (c) $S_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$.

   Výsledky:

   a) $R_1 = \{a, b, c, d\}^2$,

   b) $R_1 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [b, c], [c, b]\}$,

   c) $R_1 = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d]\}$.

4. Na množine $M = \{1, 2, 3, 4\}$ je daná relácia $R = \{[1, 1], [1, 2], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [3, 2], [3, 3]\}$. Je relácia R reláciou ekvivalencie? V prípade kladnej odpovede nájdite rozklad, ktorý ekvivalencia určuje. V prípade zápornej odpovede určte jej reflexívny, symetrický a tranzitívny uzáver.

   Výsledky: R nie je relácia ekvivalencie, nie je reflexívna ani tranzitívna.

   $\varrho(R) = \{[1, 1], [1, 2], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [3, 2], [3, 3], [4, 4]\}$,

   $R^+ = \{[1, 1], [1, 2], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [3, 2], [3, 3], [1, 3], [3, 1]\}$,

   symetrický uzáver je totožný s R.

5. Zistite, ktoré z nasledujúcich relácií sú ekvivalencie na množině $\mathbb{R}$.

   (a) $R_1 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x}{y} = 1\}$,
   (b) $R_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon |x - y| \leq 1\}$,
   (c) $R_3 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon |x| = |y|\}$,
   (d) $R_4 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon x^3 = y^3\}$.

   Výsledky:

   a) nie je relácia ekvivalencie, je porušená reflexívnosť,

   b) nie je relácia ekvivalencie, je porušená tranzitívnosť,

   c) je relácia ekvivalencie,

   d) je relácia ekvivalencie.

6. Na množine $\mathbb{N}$ definujeme relácie:

   (a) $mR_1n \iff$ dekadický zápis čísla m má taký istý počet platných cifier ako dekadický zápis čísla n;
   (b) $mR_2n \iff$ číslo m má taký istý ciferný súčet ako číslo n.

   Dokážte, že R_1, R_2 sú relácie ekvivalencie a nájdite triedy rozkladov daných ekvivalenciami R_1, R_2.

7. Na množine $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$ je daná relácia nasledovne:

   $$[m, n] \sim [m', n'] \iff m.n' = m'.n.$$

   (a) Dokážte, že $\sim$ je reláciou ekvivalencie.
   (b) Kedy dva zlomky patria do tej istej triedy rozkladu daného reláciou $\sim$?

8. Na množine $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je daná relácia $\sim$ nasledovne:

   $$[a, b] \sim [c, d] \iff a + d = b + c.$$

(a) Dokážte, že $\sim$ je na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ reláciou ekvivalencie.

(b) Kedy dve usporiadané dvojice patria do tej istej triedy rozkladu daného reláciou $\sim$?

9. Na množine $\mathbb{Z}$ je daná relácia $\equiv$ nasledovne:

$$a \equiv b \iff 5|(a-b).$$

Je $\equiv$ relácia ekvivalencie na $\mathbb{Z}$? Ak áno, nájdite rozklad množiny Z daný touto reláciou a príslušnú faktorovú množinu.

Výsledky: $\equiv$ je relácia ekvivalencie, rozklad má 5 tried a $\mathbb{Z}/_{\equiv} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$.

10. Na množine prirodzených čísel (v tejto úlohe budeme aj nulu považovať za prir. číslo) je daná relácia $\sim$ nasledovne:

$$a \sim b \iff 4|(a-b).$$

Určte faktorovú množinu $\mathbb{N}/\sim$.

Výsledky: $\mathbb{N}/_{\equiv} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$.

11. Na množine $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ je daná relácia $\sim$ nasledovne:

$$a \sim b \iff 10a + b \text{ je prvočíslo.}$$

Zistite, či $\sim$ je reláciou ekvivalencie na množine $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, v prípade kladnej odpovede nájdite jej rozklad.

Výsledky: Nie je to relácia ekvivalencie, je porušená napr. reflexívnosť. Doporučujem nájsť prvok, pre ktorý reflexívnosť neplatí a zistiť, či zvyšné dve vlastnosti platia.

12. Na množine prirodzených čísel je daná relácia $\sim$ nasledovne:

$$a \sim b \iff a + b \text{ je prvočíslo.}$$

Zistite, či $\sim$ je relácia ekvivalencie na množine prirodzených čísel, v prípade kladnej odpovede nájdite jej rozklad.

Výsledky: Nie je to relácia ekvivalencie, je porušená napr. reflexívnosť. Doporučujem nájsť prvok, pre ktorý reflexívnosť neplatí a zistiť, či zvyšné dve vlastnosti platia.

13. Nech $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2, 3, 4\}$. Na množine $\mathcal{P}(Y) \backslash \mathcal{P}(X)$ je daná relácia $\sim$ nasledovne:

$$A \sim B \iff A \subseteq B.$$

Ukážte, že relácia $\sim$ je na možine $\mathcal{P}(Y) \setminus \mathcal{P}(X)$ reláciou usporiadania.

14. Nech X je ľubovolná neprázdna množina. Na jej potenčnej množine $P(X)$ je daná relácia $\sim$ nasledovne:

$$A \sim B \iff A \subseteq B.$$

Zistite, či $\sim$ je reláciou ekvivalencie alebo usporiadania na množine $P(X)$.

Výsledky: Nie je to relácia ekvivalencie, je porušená symetria. Je to relácia usporiadania.

15. Nech X je ľubovolná neprázdna množina. Na jej potenčnej množine $P(X)$ je daná relácia $\sim$ nasledovne:

$$A \sim B \iff A \cap B \neq \emptyset.$$

Zistite, či $\sim$ je relácia ekvivalencie alebo usporiadania na množine $P(X)$.

Výsledky: Nie je to relácia ekvivalencie ani relácia usporiadania, je porušená reflexivita.

16. Nech X je ľubovolná neprázdna množina. Na jej potenčnej množine $P(X)$ je daná relácia $\sim$ nasledovne:
$$A \sim B \iff A \setminus B = \emptyset.$$
Zistite, či $\sim$ je relácia ekvivalencie alebo usporiadania na množine $P(X)$.

Výsledky: Nie je to relácia ekvivalencie, je porušená symetria. Je to relácia usporiadania.

17. Na množine všetkých studentov prvého ročníka FIT-u VUT v Brne definujeme reláciu $\sim$ nasledovne:
Študent X je v relácii $\sim$ so študentom Y, práve vtedy keď majú rovnaké krstné meno alebo priezvisko. Zistite, či $\sim$ je relácia ekvivalencie alebo usporiadania na množine všetkých študentov prvého ročníka FIT-u VUT v Brne.

Výsledky: Nie je to relácia ekvivalencie ani relácia usporiadania, je porušená tranzitivita.

18. Nech $A = \{-5, -4, \ldots, 4, 5\}, B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a nech zobrazenie $f\colon A \to B$ je dané predpisom $f(x) = |x|$. Reláciu $\sim$ definujeme podmienkou:
$$a \sim b \iff f(a) = f(b).$$
Dokážte, že $\sim$ je relácia ekvivalencie a určte faktorovú množinu $A/_\sim$.

19. Rozhodnite o pravdivosti tvrdenia: Necht E je relácia ekvivalencie. Potom relácia E^{-1} je tiež relácia ekvivalencie. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Výsledky: Tvrdenie platí.

20. Rozhodnite o pravdivosti tvrdenia: Nech E_1, E_2 sú relácie ekvivalencie na tej istej množine. Potom relácia $E_1 \circ E_2$ je tiež relácia ekvivalencie. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Výsledky: Tvrdenie neplatí, je porušeá napr. symetria.

21. Rozhodnite o pravdivosti tvrdenia: Nech R_1, R_2 sú relácie usporiadania na tej istej množine. Potom relácia $R_1 \circ R_2$ je tiež relácia usporiadania. Svoju odpoveď zdôvodnite.

Výsledky: Tvrdenie neplatí, je porušeá napr. antisymetria.

5.3 Zobrazenia

1. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich relácií sú zobrazenia:

   (a) $R_1 = \{[*, \circ], [\circ, *], [\heartsuit, *], [\spadesuit, \heartsuit], [\circ, \heartsuit]\}$,

   (b) $R_2 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 = 1\}$,

   (c) $R_3 = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon x + y^4 = 1\}$,

   (d) $R_4 = \{[x, y] \in \mathbb{Z}^2\colon x^2 + y = 1\}$.

   Výsledky: a)-c) nie sú zobrazenia (treba zdôvodniť), d) je zobrazenie (treba dokázať.)

2. Nech f je zobrazenie na množine $\mathbb{R}$ dané predpisom $y = x^2 - 1$. Určte $f(\langle -1, 2)), f(\langle -1, 1\rangle), f(\mathbb{R}), f^{-1}(\langle -1, 1\rangle), f^{-1}(\langle 0, 2\rangle)$.

   Výsledky: $f(\langle -1, 2)) = \langle -1, 3), f(\langle -1, 1\rangle) = \langle -1, 0\rangle, f(R) = \langle -1, \infty), f^{-1}(\langle -1, 1\rangle) = \langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle$, $f^{-1}(\langle 0, 2\rangle) = \langle -\sqrt{3}, -1\rangle \cup \langle 1, \sqrt{3}\rangle$.

3. Určte všetky bijekcie množiny $A = \{1, 2, 3\}$ na množinu $\{a, b, c\}$. Výsledky: všetkých bijekcií je $3! = 6$, jedna z ich je napr. $\{[1, a], [2, b], [3, c]\}$, ostatné si skúste systematicky vypísať.

4. Nech f je zobrazenie A do B a $A_1, A_2 \subseteq A, B_1, B_2 \subseteq B$. Dokážte, že platí

(a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,

(b) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,

(c) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,

(d) $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$.

5. Nech f je zobrazenie A do B a $A_1, A_2 \subseteq A$. Dokážte, že platí

$$f(A_1) - f(A_2) \subseteq f(A_1 - A_2).$$

Dokážte, že v uvedenom vzťahu nie je možné nahradiť inklúziu rovnosťou.

6. * Nech $f\colon A \to B, g\colon B \to C$. Dokážte, že:

(a) ak $g \circ f$ je injekcia, tak i f je injekcia,

(b) ak $g \circ f$ je surjekcia na C, tak i g je surjekcia na C,

(c) ak g, f sú injekcie, tak i $g \circ f$ je injekcia,

(d) ak g, f sú surjekcie (na B, resp. na C), tak i $g \circ f$ je surjekcia (na B, resp. na C).