Definície-Algebry s jednou operáciou (IDM)

Definícia.

- Usporiadanú dvojicu $(G, \circ)$, kde G je neprázdna množina a $\circ$ je asociatívna operácia na množine G, nazývame **pologrupou.** Množinu G nazývame nosičom a operáciu $\circ$ operáciou pologrupy.

Definícia.

- Usporiadanú dvojicu $(G, \circ)$, kde G je neprázdna množina a $\circ$ je asociatívna operácia na množine G, nazývame **pologrupou.** Množinu G nazývame nosičom a operáciu $\circ$ operáciou pologrupy.
- Pologrupa s neutrálnym prvkom sa nazýva **monoid**.

Definícia.

- Usporiadanú dvojicu $(G, \circ)$, kde G je neprázdna množina a $\circ$ je asociatívna operácia na množine G, nazývame **pologrupou.** Množinu G nazývame nosičom a operáciu $\circ$ operáciou pologrupy.
- Pologrupa s neutrálnym prvkom sa nazýva **monoid**.
- Monoid, v ktorom ku každému prvku existuje inverzný prvok, sa nazýva **grupa**.

Definícia.

- Usporiadanú dvojicu $(G, \circ)$, kde G je neprázdna množina a $\circ$ je asociatívna operácia na množine G, nazývame **pologrupou.** Množinu G nazývame nosičom a operáciu $\circ$ operáciou pologrupy.
- Pologrupa s neutrálnym prvkom sa nazýva **monoid**.
- Monoid, v ktorom ku každému prvku existuje inverzný prvok, sa nazýva **grupa**.
- Grupa s komutatívnou operáciou sa nazýva **komutatívna** alebo **Abelova grupa**.

Pole

Definícia. $(F, \oplus, \odot)$ je **pole** práve vtedy, keď

- $(F, \oplus)$ je Abelova grupa
- $(F - \{0\}, \odot)$ je Abelova grupa, pričom 0 je neutrálny prvok operácie $\oplus$
- $\odot$ je distributívna vzhľadom na $\oplus$

Pole

Definícia. $(F, \oplus, \odot)$ je **pole** práve vtedy, keď

- $(F, \oplus)$ je Abelova grupa
- $(F - \{0\}, \odot)$ je Abelova grupa, pričom 0 je neutrálny prvok operácie $\oplus$
- $\odot$ je distributívna vzhľadom na $\oplus$

Príklady.

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$−obvyklé sčítanie a násobenie na množine $\mathbb{R}$, neutrálny prvok na sčítanie je 0, na násobenie 1.
- $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$− sčítanie a násobenie na množine zvyškových tried, neutrálny prvok na sčítanie je 0, na násobenie 1.

Definícia.

- Nech V je neprázdna množina, F je pole a nech sú dané operácie $+$ z $V \times V$ do V a $\cdot$ z $F \times V$ do V. Potom hovoríme, že $V(F)$ je **vektorový priestor nad poľom** F ak platí:
    - $(V, +)$ je Abelova grupa
    - $\forall \overline{a}, \overline{b} \in V, r, s \in F$ platí:
        - $r.(\overline{a} + \overline{b}) = r.\overline{a} + r.\overline{b}$
        - $(r + s).\overline{a} = r.\overline{a} + s.\overline{a}$
        - $(r.s).\overline{a} = r.(s.\overline{a}),\ 1.\overline{a} = \overline{a}$

Definícia.

- Nech V je neprázdna množina, F je pole a nech sú dané operácie $+$ z $V \times V$ do V a $\cdot$ z $F \times V$ do V. Potom hovoríme, že $V(F)$ je **vektorový priestor nad poľom** F ak platí:
    - $(V, +)$ je Abelova grupa
    - $\forall \overline{a}, \overline{b} \in V, r, s \in F$ platí:
        - $r.(\overline{a} + \overline{b}) = r.\overline{a} + r.\overline{b}$
        - $(r + s).\overline{a} = r.\overline{a} + s.\overline{a}$
        - $(r.s).\overline{a} = r.(s.\overline{a}),\ 1.\overline{a} = \overline{a}$
- Prvky z V nazývame **vektory**, prvky z F nazývame **skaláry**. Nulový vektor je $\overline{0}$, opačný vektor k vektoru $\overline{a}$ značíme $-\overline{a}$.

Definícia.

- Nech V je neprázdna množina, F je pole a nech sú dané operácie $+$ z $V \times V$ do V a $\cdot$ z $F \times V$ do V. Potom hovoríme, že $V(F)$ je **vektorový priestor nad poľom** F ak platí:
  - $(V, +)$ je Abelova grupa
  - $\forall \overline{a}, \overline{b} \in V, r, s \in F$ platí:
    - $r.(\overline{a} + \overline{b}) = r.\overline{a} + r.\overline{b}$
    - $(r + s).\overline{a} = r.\overline{a} + s.\overline{a}$
    - $(r.s).\overline{a} = r.(s.\overline{a}),\ 1.\overline{a} = \overline{a}$
- Prvky z V nazývame **vektory**, prvky z F nazývame **skaláry**. Nulový vektor je $\overline{0}$, opačný vektor k vektoru $\overline{a}$ značíme $-\overline{a}$.

Tvrdenie. Zrejme pre ľubovolný skalár v a vektor $\overline{a}$ platí:

- $0.\overline{a} = \overline{0}$
- $r.\overline{0} = \overline{0}$
- ak $r.\overline{a} = \overline{0}$ tak $r = 0 \vee \overline{a} = \overline{0}$
- $(-r).\overline{a} = -(r.\overline{a}) = r.(-\overline{a})$

Vektorové priestory, príklady

Vektorový priestor je napr.: F je pole, F^n je množina usporiadaných $n-$tíc a súčet je daný takto:

$$\overline{a} + \overline{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n]$$

a súčin vektora a skalára je daný takto:

$$r.\overline{a} = [r.a_1, r.a_2, \cdots, r.a_n].$$

Zrejme sa jedná o vektorový priestor nad poľom F.

Vektorové podpriestory

Definícia. Nech $V(F), S(F)$ sú vektorové priestory nad poľom F. Hovoríme, že $S(F)$ je **vektorový podpriestor** priestoru $V(F)$ ak

- $S \subseteq V$
- operácia sčítania vektorov na S je zúžením sčítania na V
- operácia násobenia vektorov so skalármi na $S \times F$ je zúžením násobenia na $V \times F$

Vektorové podpriestory

Definícia. Nech $V(F), S(F)$ sú vektorové priestory nad poľom F. Hovoríme, že $S(F)$ je **vektorový podpriestor** priestoru $V(F)$ ak

- $S \subseteq V$
- operácia sčítania vektorov na S je zúžením sčítania na V
- operácia násobenia vektorov so skalármi na $S \times F$ je zúžením násobenia na $V \times F$

Tvrdenie. Nech $V(F)$ je vektorový priestor nad poľom F a $\emptyset \neq S \subseteq V$. Ak $\forall \overline{a}, \overline{b} \in S, r \in F$ je $\overline{a} + \overline{b} \in S$ a $r.\overline{a} \in S$, potom $S(F)$ je podpriestor priestoru $V(F)$.

Vektorové podpriestory

Definícia. Nech $V(F), S(F)$ sú vektorové priestory nad poľom F. Hovoríme, že $S(F)$ je **vektorový podpriestor** priestoru $V(F)$ ak

- $S \subseteq V$
- operácia sčítania vektorov na S je zúžením sčítania na V
- operácia násobenia vektorov so skalármi na $S \times F$ je zúžením násobenia na $V \times F$

Tvrdenie. Nech $V(F)$ je vektorový priestor nad poľom F a $\emptyset \neq S \subseteq V$. Ak $\forall \overline{a}, \overline{b} \in S, r \in F$ je $\overline{a} + \overline{b} \in S$ a $r.\overline{a} \in S$, potom $S(F)$ je podpriestor priestoru $V(F)$.

Príklad. Podpriestorom priestoru $V_3(\mathbb{R})$ je napr. ľubovolná rovina prechádzajúca počiatkom, ale aj priamka prechádzajúca počiatkom.

Vektorové podpriestory, príklad

Pracujeme v priestore $V_3(\mathbb{R})$*-vektory sú usporiadané trojice reálnych čísel a skaláry sú reálne čísla. Zistite, či* $M_1(\mathbb{R})$ *a* $M_2(\mathbb{R})$ *sú podpriestory* $V_3(\mathbb{R})$ *ak*

$$M_1 = \{[a, b, c] \in \mathbb{R}^3; a = 1\}, M_2 = \{[a, b, c] \in \mathbb{R}^3; a = 0\}.$$

Vektorové podpriestory, príklad

Pracujeme v priestore $V_3(\mathbb{R})$-vektory sú usporiadané trojice reálnych čísel a skaláry sú reálne čísla. Zistite, či $M_1(\mathbb{R})$ a $M_2(\mathbb{R})$ sú podpriestory $V_3(\mathbb{R})$ ak

$$M_1 = \{[a, b, c] \in \mathbb{R}^3; a = 1\}, M_2 = \{[a, b, c] \in \mathbb{R}^3; a = 0\}.$$

Riešenie. Využijeme tvrdenie o podpriestoroch z predchádzajúcej strany a budeme overovať iba, či sú operácie $+$ a $\cdot$ uzavreté na M_i.

Vektorové podpriestory, príklad

Pracujeme v priestore $V_3(\mathbb{R})$-vektory sú usporiadané trojice reálnych čísel a skaláry sú reálne čísla. Zistite, či $M_1(\mathbb{R})$ a $M_2(\mathbb{R})$ sú podpriestory $V_3(\mathbb{R})$ ak

$$M_1 = \{[a,b,c] \in \mathbb{R}^3; a = 1\}, M_2 = \{[a,b,c] \in \mathbb{R}^3; a = 0\}.$$

Riešenie. Využijeme tvrdenie o podpriestoroch z predchádzajúcej strany a budeme overovať iba, či sú operácie $+$ a $\cdot$ uzavreté na M_i.

- Nech $\overline{x} \in M_1, \overline{y} \in M_1$, potom $\overline{x} = [1, x_2, x_3], \overline{y} = [1, y_2, y_3]$. Potom $\overline{x} + \overline{y} = [1, x_2, x_3] + [1, y_2, y_3] = [2, x_2 + y_2, x_3 + y_3]$ ale posledný vektor isto do M_1 nepatrí. Uzavretosť druhej operácie už overovať nemusíme a vieme, že $M_1(\mathbb{R})$ nie je podpriestor $V_3(\mathbb{R})$.

Vektorové podpriestory, príklad

Pracujeme v priestore $V_3(\mathbb{R})$-vektory sú usporiadané trojice reálnych čísel a skaláry sú reálne čísla. Zistite, či $M_1(\mathbb{R})$ a $M_2(\mathbb{R})$ sú podpriestory $V_3(\mathbb{R})$ ak

$$M_1 = \{[a,b,c] \in \mathbb{R}^3; a = 1\}, M_2 = \{[a,b,c] \in \mathbb{R}^3; a = 0\}.$$

Riešenie. Využijeme tvrdenie o podpriestoroch z predchádzajúcej strany a budeme overovať iba, či sú operácie $+$ a $\cdot$ uzavreté na M_i.

- Nech $\overline{x} \in M_1, \overline{y} \in M_1$, potom $\overline{x} = [1, x_2, x_3], \overline{y} = [1, y_2, y_3]$. Potom $\overline{x} + \overline{y} = [1, x_2, x_3] + [1, y_2, y_3] = [2, x_2 + y_2, x_3 + y_3]$ ale posledný vektor isto do M_1 nepatrí. Uzavretosť druhej operácie už overovať nemusíme a vieme, že $M_1(\mathbb{R})$ nie je podpriestor $V_3(\mathbb{R})$.
- Nech $\overline{x} \in M_2, \overline{y} \in M_2$, potom $\overline{x} = [0, x_2, x_3], \overline{y} = [0, y_2, y_3]$. Potom $\overline{x} + \overline{y} = [0, x_2, x_3] + [0, y_2, y_3] = [0, x_2 + y_2, x_3 + y_3]$ a posledný vektor patrí do M_1. Ďalej nech $\overline{x} \in M_2$ a $r \in \mathbb{R}$. Potom $r \cdot \overline{x} = [r.0, r.x_2, r.x_3] = [r.0, r.x_2, r.x_3] \in M_2$. Teda je splnená aj uzavretosť druhej operácie, preto $M_2(\mathbb{R})$ je podpriestor $V_3(\mathbb{R})$.

Lineárne kombinácie

Definícia. Hovoríme, že vektor $\bar{b}$ je **lineárnou kombináciou** vektorov $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n}$ ak $\exists r_1, r_2, \cdots, r_n \in F$ tak, že

$$\bar{b} = r_1.\overline{a_1} + r_2.\overline{a_2} + \cdots + r_n.\overline{a_n}.$$

Čo znamená, že vektor $\overline{u}$ je lin. kombináciou vektora $\overline{v}$?

Lineárne kombinácie, príklad

Dané sú vektory $\overline{a_1} = [2, 3, 1], \overline{a_2} = [-3, -1, -1]$. *Zistite, či vektory* $\overline{b} = [-1, 2, 0], \overline{c} = [1, 1, 0]$ *sú lineárnou kombináciou* $\overline{a_1}, \overline{a_2}$.

Lineárne kombinácie, príklad

Dané sú vektory $\overline{a_1} = [2,3,1], \overline{a_2} = [-3,-1,-1]$. *Zistite, či vektory* $\overline{b} = [-1,2,0], \overline{c} = [1,1,0]$ *sú lineárnou kombináciou* $\overline{a_1}, \overline{a_2}$.

Riešenie. Postupujeme podľa predchádzajúcej definície:

- pre vektor $\overline{b}$ dostaneme takúto rovnicu:

$$\overline{b} = r_1.\overline{a_1} + r_2.\overline{a_2}$$

a z nej máme sústavu:

$$\begin{array}{ccccc} -1 & = & 2r_1 & + & (-3).r_2 \\ 2 & = & 3r_1 & + & (-1).r_2 \\ 0 & = & r_1 & + & (-1).r_2 \end{array}$$

Z poslednej rovnice máme $r_1 = r_2$, dosadíme do druhej rovnice a dostaneme: $r_1 = r_2 = 1$. Teraz už stačí iba overiť (dosadením), či to vyhovuje prvej rovnici. Po dosadení, zistíme, že vyhovuje a teda $\overline{b}$ je lineárnou kombináciou $\overline{a_1}, \overline{a_2}$.

Lineárne kombinácie, príklad-pokračovanie

- Pre vektor $\bar{c}$ dostaneme takúto rovnicu:

$$\bar{c} = r_1.\overline{a_1} + r_2.\overline{a_2}$$

a z nej máme sústavu:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & = & 2r_1 & + & (-3).r_2 \\ 1 & = & 3r_1 & + & (-1).r_2 \\ 0 & = & r_1 & + & (-1).r_2 \end{array}$$

Z poslednej rovnice máme $r_1 = r_2$, dosadíme do druhej rovnice a dostaneme: $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$. Teraz už stačí iba overiť (dosadením), či to vyhovuje prvej rovnici. Po dosadení, zistíme, že nevyhovuje a teda $\bar{b}$ nie je lineárnou kombináciou $\overline{a_1}, \overline{a_2}$.

Definícia. Nech $V(F)$ je vektorový priestor a $\emptyset \neq M \subseteq V$. Množina M **generuje priestor** V $\iff$ každý vektor z V je lineárnou kombináciou vektorov z M.
Zapisujeme $\langle M \rangle = V$.

Generovanie priestorov, príklad

Sú dané priestory $T_1 = \langle [-1, 2, 0], [-4, 1, -1] \rangle, T_2 = \langle [-1, 2, 0], [1, 1, 0] \rangle, S = \langle [2, 3, 1], [-3, -1, -1] \rangle$. *Zistite, či* $T_1 \subseteq S, T_2 \subseteq S$.

Generovanie priestorov, príklad

Sú dané priestory $T_1 = \langle [-1,2,0], [-4,1,-1] \rangle, T_2 = \langle [-1,2,0], [1,1,0] \rangle, S = \langle [2,3,1], [-3,-1,-1] \rangle$. *Zistite, či* $T_1 \subseteq S, T_2 \subseteq S$.

Riešenie. Stačí zistiť, či každý vektor, ktorý generuje T_1 je z podpriestoru S, čiže či je lin. kombináciou vektorov, ktoré generujú S. Teda treba zistiť, či rovnice

- $r.[2,3,1] + s.[-3,-1,-1] = [-1,2,0]$
- $p.[2,3,1] + q.[-3,-1,-1] = [-4,1,-1]$

majú riešenie. Prvá má riešenie $r = s = 1$ (presvedčte sa) a druhá má riešenie $p = 1, q = 2$. Teda $T_1 \subseteq S$.

Generovanie priestorov, príklad-pokračovanie

- Podobne budeme riešiť aj úlohu pre T_2. Teda treba zistiť, či rovnice
  - $r.[2,3,1] + s.[-3,-1,-1] = [-1,2,0]$
  - $p.[2,3,1] + q.[-3,-1,-1] = [1,1,0]$

  majú riešenie. Už vieme, že prvá má riešenie $r = s = 1$ ale druhá nemá riešenie a teda $T_2 \not\subseteq S$.

Generovanie priestorov, príklad

V priestore $V_3(\mathbb{Z}_3)$ *je daná množina* $M = \{[0,1,2],[0,2,2]\}$. *Určte* $\langle M \rangle$.

Generovanie priestorov, príklad

V priestore $V_3(\mathbb{Z}_3)$ je daná množina $M = \{[0,1,2],[0,2,2]\}$. Určte $\langle M \rangle$.

Riešenie. Úloha je náročnejšia hlavne preto, lebo budeme pracovať nad poľom $\mathbb{Z}_3$. Treba si uvedomiť, že pracujeme len s množinou $\{0,1,2\}$. Preto skaláry sú tiež iba $0,1,2$ a tento podpriestor musí obsahovať všetky lineárne kombinácie vektorov $[0,1,2],[0,2,2]$. Teda

$$u_1 = 0\cdot[0,1,2]+0\cdot[0,2,2], u_2 = 0\cdot[0,1,2]+1\cdot[0,2,2], u_3 = 0\cdot[0,1,2]+2\cdot[0,2,2],$$

$$u_4 = 1\cdot[0,1,2]+0\cdot[0,2,2], u_5 = 1\cdot[0,1,2]+1\cdot[0,2,2], u_6 = 1\cdot[0,1,2]+2\cdot[0,2,2],$$

$$u_7 = 2\cdot[0,1,2]+0\cdot[0,2,2], u_8 = 2\cdot[0,1,2]+1\cdot[0,2,2], u_9 = 2\cdot[0,1,2]+2\cdot[0,2,2].$$

Preto

$$\langle M \rangle = \{[0,0,0],[0,2,2],[0,1,1],[0,1,2],[0,0,1],[0,2,0],[0,2,1],[0,1,0],[0,0,2]\}.$$

V priestore $V_3(\mathbb{Z}_3)$ je daná množina $M = \{[0,1,2],[0,2,2]\}$. Určte $\langle M \rangle$.

Riešenie. Úloha je náročnejšia hlavne preto, lebo budeme pracovať nad poľom $\mathbb{Z}_3$. Treba si uvedomiť, že pracujeme len s množinou $\{0,1,2\}$. Preto skaláry sú tiež iba $0,1,2$ a tento podpriestor musí obsahovať všetky lineárne kombinácie vektorov $[0,1,2],[0,2,2]$. Teda

$$u_1 = 0 \cdot [0,1,2] + 0 \cdot [0,2,2], u_2 = 0 \cdot [0,1,2] + 1 \cdot [0,2,2], u_3 = 0 \cdot [0,1,2] + 2 \cdot [0,2,2],$$

$$u_4 = 1 \cdot [0,1,2] + 0 \cdot [0,2,2], u_5 = 1 \cdot [0,1,2] + 1 \cdot [0,2,2], u_6 = 1 \cdot [0,1,2] + 2 \cdot [0,2,2],$$

$$u_7 = 2 \cdot [0,1,2] + 0 \cdot [0,2,2], u_8 = 2 \cdot [0,1,2] + 1 \cdot [0,2,2], u_9 = 2 \cdot [0,1,2] + 2 \cdot [0,2,2].$$

Preto

$$\langle M \rangle = \{[0,0,0],[0,2,2],[0,1,1],[0,1,2],[0,0,1],[0,2,0],[0,2,1],[0,1,0],[0,0,2]\}.$$

Aké riešenie by táto úloha mala v priestore $V_3(\mathbb{R})$?

Veta o lineárnej kombinácii

Tvrdenie. Nech $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n} \in V(F)$. Vektor $\bar{b}$ je lineárnou kombináciou $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n} \iff$ $\langle \overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n}, \bar{b} \rangle = \langle \overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n} \rangle$.

Veta o lineárnej kombinácii

Tvrdenie. Nech $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n} \in V(F)$. Vektor $\overline{b}$ je lineárnou kombináciou $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n} \iff \langle \overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n}, \overline{b} \rangle = \langle \overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n} \rangle$.

Zmysel tejto vety je v tom, že vektor, ktorý je lin. kombináciou ostatných, môžeme vylúčiť, lebo nám nevygeneruje nič nové.

Veta o lineárnej kombinácii, príklad

Dané sú priestory $A = \langle [1,0,0], [0,1,0], [3,5,0] \rangle, B = \langle [1,0,0], [0,1,0] \rangle$. *Zistite, či* $A = B$.

Veta o lineárnej kombinácii, príklad

Dané sú priestory $A = \langle [1,0,0],[0,1,0],[3,5,0] \rangle, B = \langle [1,0,0],[0,1,0] \rangle$. *Zistite, či* $A = B$.

Riešenie. Podľa vety o lineárnej kombinácii stačí zistiť, či vektor $[3,5,0]$ je lineárnou kombináciou vektorov $[1,0,0],[0,1,0]$. Zrejme $[3,5,0] = 3.[1,0,0] + 5.[0,1,0]$ a teda $A = B$.

Prienik a súčet vektorových priestorov

- **Veta.** Množina všetkých lineárnych kombinácií ľubovolnej množiny vektorov vo vektorovom priestore V je podpriestorom priestoru V.
- **Veta.** Prienik $S \cap T$ ľubovolných dvoch podpriestorov vektorového priestoru V je tiež podpriestorom priestoru V.
- **Definícia.** Ľubovolné dva podpriestory S a T vektorového priestoru V určujú množinu $S + T$ pozostávajúcu zo všetkých súčtov tvaru $a + b; a \in S, b \in T$. Táto množina sa nazýva **lineárnym súčtom** S a T.
- **Poznámka** $S + T$ je tiež podpriestorom priestoru V.

Definícia.

- Hovoríme, že $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n}$ sú **lineárne závislé** ak $\exists r_1, r_2, \cdots, r_n \in F$, aspoň jedno $r_i \neq 0$ a platí:

$$r_1.\overline{a_1} + r_2.\overline{a_2} + \cdots + r_n.\overline{a_n} = \overline{0}.$$

- $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n}$ sú **lineárne nezávislé**, ak nie sú závislé, teda ak predchádzajúca rovnica má jediné riešenie a to $r_i = 0$ pre všetky $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Ako zistíme, či sú dva vektory závislé, či nezávislé? A ako to zistíme pri väčšom počte vektorov?

Premyslite si súvislosti medzi uvedenou definíciou a riešením homogénnych sústav rovníc.

Ako súvisí závislosť, nezávislosť vektorov a lin. kombinácia vektorov?

Príklad. *Zistite, či nasledujúce vektory sú závislé alebo nezávislé.*

- $[1, -1, 0], [2, 1, -1], [0, 3, -1],$
- $[1, -1, 0], [2, 1, -1], [1, 3, -1].$

Príklad. *Zistite, či nasledujúce vektory sú závislé alebo nezávislé.*

- $[1, -1, 0], [2, 1, -1], [0, 3, -1]$,
- $[1, -1, 0], [2, 1, -1], [1, 3, -1]$.

Riešenie.

- Zostavíme si rovnicu pre vektory $[1, -1, 0], [2, 1, -1], [0, 3, -1]$ a dostaneme

$$r.[1, -1, 0] + s.[2, 1, -1] + p.[0, 3, -1] = [0, 0, 0].$$

- Z toho dostaneme sústavu:

$$\begin{array}{rcrcrcl} r & + & 2s & & & = & 0 \\ -r & + & s & + & 3p & = & 0 \\ & - & s & - & p & = & 0 \end{array}$$

Z poslednej rovnice máme $p = -s$. Potom

$$\begin{array}{rcrcl} r & + & 2s & = & 0 \\ -r & + & -2s & = & 0 \end{array}$$

teda $r = -2s = 2p$. Sústava má nekonečne veľa riešení, ktoré môžeme zapísať napr. takto: $\{[2a, -a, a], a \in R\}$ (teda má aj iné ako nulové riešenie), preto vektory sú lineárne závislé.

Lineárna závislosť a nezávislosť, príklad-pokračovanie

Vyriešime druhú časť úlohy:

- Zostavíme si rovnicu pre vektory $[1, -1, 0], [2, 1, -1], [1, 3, -1]$ a dostaneme

$$r.[1, -1, 0] + s.[2, 1, -1] + p.[1, 3, -1] = [0, 0, 0].$$

Podobne ako v predošlej úlohe, dostaneme sústavu:

$$\begin{array}{rcrcrcl} r & + & 2s & + & p & = & 0 \\ -r & + & s & + & 3p & = & 0 \\ & - & s & - & p & = & 0 \end{array}$$

Táto sústava má však iba jediné riešenie a to $r = s = p = 0$, teda vektory sú lineárne nezávislé.

Dá sa táto úloha vyriešiť jednoduchšie?

Veta. Nech $V(F) = \langle\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n}\rangle$ a nech $\overline{b_1}, \overline{b_2}, \cdots, \overline{b_r}$ sú lineárne nezávislé vektory z $V(F)$. Potom $r \leq n$.

Definícia. Vektorový priestor $V(F)$ nazývame **konečnorozmerný** ak $\exists \overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n}$ a $\langle\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n}\rangle = V(F)$.

Báza, dimenzia

Definícia. Nech $V(F)$ je konečnorozmerný vektorový priestor. Hovoríme, že $[\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n}]$ je **báza** $V(F)$ ak

- $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n}$ sú lin. nezávislé,
- $\langle \overline{a_1}, \overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n} \rangle = V(F)$.

Tvrdenie. Nech $V(F)$ je konečnorozmerný vektorový priestor, všetky jeho bázy majú rovnaký počet prvkov.

Poznámka. Počet prvkov bázy sa nazýva **dimenzia**.

Báza, príklad

Príklad. *Nájdite bázu priestoru:* $S = \langle [1,0,1],[2,1,3],[2,0,2] \rangle$.

Báza, príklad

Príklad. *Nájdite bázu priestoru:* $S = \langle [1,0,1],[2,1,3],[2,0,2] \rangle$.

Riešenie. Stačí zistiť, či sú vektory $[1,0,1],[2,1,3],[2,0,2]$ závislé alebo nezávislé. Ak sú nezávislé, tak tvoria bázu, ak sú závislé, tak z nich niektoré treba "vyhodiť." Zrejme $[2,0,2]$ je lineárnou kombináciou vektorov $[1,0,1],[2,1,3]$ (overte) a tieto dva sú už nezávislé, preto $S = \langle [1,0,1],[2,1,3] \rangle$.

Báza, príklad

Príklad. *Nájdite bázu priestoru:* $S = \langle [1,0,1],[2,1,3],[2,0,2] \rangle$.

Riešenie. Stačí zistiť, či sú vektory $[1,0,1],[2,1,3],[2,0,2]$ závislé alebo nezávislé. Ak sú nezávislé, tak tvoria bázu, ak sú závislé, tak z nich niektoré treba "vyhodiť." Zrejme $[2,0,2]$ je lineárnou kombináciou vektorov $[1,0,1],[2,1,3]$ (overte) a tieto dva sú už nezávislé, preto $S = \langle [1,0,1],[2,1,3] \rangle$.

Príklad. *Doplňte vektory* $[1,1,0],[1,2,0]$ *na bázu* $V_3(\mathbb{R})$.

Príklad. *Nájdite bázu priestoru:* $S = \langle [1, 0, 1], [2, 1, 3], [2, 0, 2] \rangle$.

Riešenie. Stačí zistiť, či sú vektory $[1, 0, 1], [2, 1, 3], [2, 0, 2]$ závislé alebo nezávislé. Ak sú nezávislé, tak tvoria bázu, ak sú závislé, tak z nich niektoré treba "vyhodiť." Zrejme $[2, 0, 2]$ je lineárnou kombináciou vektorov $[1, 0, 1], [2, 1, 3]$ (overte) a tieto dva sú už nezávislé, preto $S = \langle [1, 0, 1], [2, 1, 3] \rangle$.

Príklad. *Doplňte vektory* $[1, 1, 0], [1, 2, 0]$ *na bázu* $V_3(\mathbb{R})$.

Riešenie. Zrejme
$V_3(\mathbb{R}) = \langle [1, 1, 0], [1, 2, 0], [1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1] \rangle$. Keďže
$[1, 0, 0] = 2.[1, 1, 0] + (-1).[1, 2, 0]$ a
$[0, 1, 0] = (-1).[1, 1, 0] + 1.[1, 2, 0]$, tak
$V_3(\mathbb{R}) = \langle [1, 1, 0], [1, 2, 0], [0, 0, 1] \rangle$. Tieto vektory sú lineárne nezávislé a preto sú bázou.

Báza, príklad

Príklad. *Nájdite bázu priestoru:* $S = \langle [1,0,1],[2,1,3],[2,0,2] \rangle$.

Riešenie. Stačí zistiť, či sú vektory $[1,0,1],[2,1,3],[2,0,2]$ závislé alebo nezávislé. Ak sú nezávislé, tak tvoria bázu, ak sú závislé, tak z nich niektoré treba "vyhodiť." Zrejme $[2,0,2]$ je lineárnou kombináciou vektorov $[1,0,1],[2,1,3]$ (overte) a tieto dva sú už nezávislé, preto $S = \langle [1,0,1],[2,1,3] \rangle$.

Príklad. *Doplňte vektory* $[1,1,0],[1,2,0]$ *na bázu* $V_3(\mathbb{R})$.

Riešenie. Zrejme
$V_3(\mathbb{R}) = \langle [1,1,0],[1,2,0],[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1] \rangle$. Keďže
$[1,0,0] = 2.[1,1,0] + (-1).[1,2,0]$ a
$[0,1,0] = (-1).[1,1,0] + 1.[1,2,0]$, tak
$V_3(\mathbb{R}) = \langle [1,1,0],[1,2,0],[0,0,1] \rangle$. Tieto vektory sú lineárne nezávislé a preto sú bázou.
Dajú sa tieto úlohy vyriešiť jednoduchšie?

Matice a vektorové priestory

- Nech
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$
Podpriestor prislúchajúci matici A je:
$V_A = \langle [a_{11}, a_{12}, a_{13}], [a_{21}, a_{22}, a_{23}] \rangle =$
$\{c_1.[a_{11}, a_{12}, a_{13}] + c_2.[a_{21}, a_{22}, a_{23}]; c_i \in \mathbb{R}\}$
- Ak maticu B dostaneme z matice A vykonaním nejakej elementárnej riadkovej operácie, tak $V_A = V_B$
- Každá matica je riadkovo ekvivalentná s nejakou trojuholníkovou maticou
- nenulové riadky trojuholníkovej matice sú lineárne nezávislé vektory
- hodnosť matice=dimenzia podpriestoru prislúchajúcemu matici, označujeme $h(A)$ a je to vlastne počet nenulových riadkov príslušnej trojuholníkovej matice.

- **Veta.** Riadková a stĺpcová hodnosť matice sú rovnaké.
- **Dôsledok.** $h(A^T) = h(A)$
- **Veta.** (Frobeniova) Nehomogénna sústava rovníc o n neznámych nad poľom F má riešenie práve vtedy, keď hodnosť matice sústavy sa rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy.

Sústavy s parametrom v $\mathbb{Z}_3$, príklad

V $\mathbb{Z}_3$ riešte sústavu rovníc s parametrom a.

$$\begin{array}{ccccc} x & + & ay & = & 1 \\ ax & + & y & = & 2 \end{array}$$

Sústavy s parametrom v $\mathbb{Z}_3$, príklad

V $\mathbb{Z}_3$ riešte sústavu rovníc s parametrom a.

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & ay & = & 1 \\ ax & + & y & = & 2 \end{array}$$

Riešenie. Zrejme a nadobúda iba hodnoty $0, 1, 2$. Preto pre jednotlivé hodnoty vyriešime konkrétne sústavy:

- $a = 0$, potom $x = 1, y = 2$.
- $a = 1$, potom
  $$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2. \end{array}$$
  Táto sústava evidentne nemá riešenie.

Sústavy s parametrom v $\mathbb{Z}_3$, príklad-pokračovanie

- $a = 2$, potom
  $$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & 2. \end{array}$$
  Na vyriešenie použijeme maticu:
  $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$
  Prvý riadok pričítame k druhému a dostaneme:
  $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
  Nezabudnite, že pracujeme v poli $\mathbb{Z}_3$ a teda $1 + 2 = 0$.

  K poslednej matici prislúcha rovnica:
  $$x + 2y = 1.$$

Sústavy s parametrom v $\mathbb{Z}_3$, príklad-pokračovanie

- Keďže pracujeme v $\mathbb{Z}_3$, tak rovnica nemá nekonečne veľa riešení, ale len tri a dostaneme ich tak, že postupne za x dosadíme prvky zo Z_3 (teda 0,1,2) a dopočítame y (samozrejme postupovať sa dá aj opačne, dosadíme za y a vypočítame x.) Teda rovnici vyhovujú tieto dvojice: $[0, 2], [1, 0], [2, 1]$.