jméno a příjmení	login	cvičící
		Hartmanová / Hlavičková / Hliněná / Sedláková / Vítovec

ILG, zadání P

T	1	2	3	4	5	6	7	Σ

*Zkouška se skládá ze dvou částí, testu za **10 bodů** a písemky za **70 bodů**. Z testu musíte získat **aspoň 7 bodů**, v opačném případě písemka nebude hodnocena a celá zkouška bude hodnocena 0 body.*

TEST

Každá otázka je za 2 body. Odpovědi napište na tento list do vymezeného prostoru pod otázkou.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = (1, 2)$. Určete $A \cdot B^T$.

   Odpověď:

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Určete $|A|$.

   Odpověď:

3. Platí pro libovolné matice X, Y následující tvrzení? Zdůvodněte!
$$|X| = |Y| \Rightarrow X = Y.$$

   Odpověď:

4. $\overline{u} = [1, 2, 3], \overline{v} = [-1, -1, 1]$. Určete $\overline{u} \cdot \overline{v}$.

   Odpověď:

5. O čtvercové matici A víme, že je typu 3×3 a $|A| = 0$. Kdybychom řešili soustavu rovnic
$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix},$$
   kolik by tato soustava měla řešení?

   Vyberte z možností:

   (a) právě jedno bez ohledu na pravou stranu,
   (b) jedno nebo nekonečně, záleží na pravé straně,
   (c) žádné bez ohledu na pravou stranu,
   (d) žádné nebo nekonečně, záleží na pravé straně,
   (e) jedno nebo žádné, záleží na pravé straně,
   (f) aspoň dvě řešení bez ohledu na pravou stranu,
   (g) nanejvýš jedno řešení bez ohledu na pravou stranu,
   (h) nekonečně mnoho bez ohledu na pravou stranu.

   Odpověď:

PÍSEMKA

Každý příklad je za 10 bodů. Písemku vypracujte na vlastní papíry. U každého příkladu přehledně napište postup řešení a jasně označte výsledek.

1. Vypočítejte determinant matice Y, víme-li, že $|X| = -1$, kde

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & 2b & a \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ a & a & b \end{pmatrix}, \; a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Na množině reálných čísel řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 4x & + & 5y & + & 11z & = & 6 \end{array}$$

3. Jsou dány podprostory $V_3(\mathbb{R})$

$$L_1 = \langle [3,2,1], [4,1,3] \rangle, \quad L_2 = \langle [1,1,2], [2,3,-1], [0,-1,5] \rangle.$$

U každého tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé, vždy zdůvodněte!

a) $L_1 = L_2$, b) $L_1 \subseteq L_2$, c) $L_2 \subseteq L_1$, d) $[0,0,0] \in L_1 \cap L_2$, e) $L_1 + L_2 = V_3(\mathbb{R})$.

4. Lineární transformace $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dána následovně:

$$f([1,1,3]) = [1,2], f([2,1,1]) = [2,3], f([3,2,-1]) = [3,a].$$

Určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby $f([0,0,1]) = [0,2]$.

5. Najděte LU rozklad matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Pak pomocí nalezeného LU rozkladu najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & 3z & = & 1 \\ -3x & + & 2y & + & 6z & = & 2. \end{array}$$

6. Najděte ortogonální průmět vektoru $[1,7,-2]$ do roviny generované vektory $[2,1,-1], [0,1,2]$.

7. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

jméno a příjmení	login	cvičící
		Hartmanová / Hlavičková / Hliněná / Sedláková / Vítovec

ILG, zadání A

T	1	2	3	4	5	6	7	Σ

*Zkouška se skládá ze dvou částí, testu za **10 bodů** a písemky za **70 bodů**. Z testu musíte získat **aspoň 7 bodů**, v opačném případě písemka nebude hodnocena a celá zkouška bude hodnocena 0 body.*

TEST

Každá otázka je za 2 body. Odpovědi napište na tento list do vymezeného prostoru pod otázkou.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = (-1, 2)$. Určete $B \cdot A$.

   Odpověď:

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Určete $|2A|$.

   Odpověď:

3. Platí následující tvrzení? Zdůvodněte!

$$|X| = 1 \Rightarrow X \quad \text{je jednotková matice.}$$

   Odpověď:

4. $\overline{u} = [1, 2, 3]$. Určete $\overline{u} \cdot \overline{0}$.

   Odpověď:

5. O čtvercové matici A víme, že je typu 3×3 a $|A| \neq 0$. Kdybychom řešili soustavu rovnic

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ p^2 \end{pmatrix},$$

   kolik by tato soustava měla řešení?

   Vyberte z možností:

   (a) jedno nebo dvě, záleží na tom, jestli $p = 0$,
   (b) žádné bez ohledu na pravou stranu,
   (c) žádné nebo nekonečně, záleží na pravé straně,
   (d) právě jedno bez ohledu na pravou stranu,
   (e) jedno nebo žádné, záleží na pravé straně,
   (f) aspoň dvě řešení bez ohledu na pravou stranu,
   (g) nekonečně mnoho bez ohledu na pravou stranu.

   Odpověď:

PÍSEMKA

Každý příklad je za 10 bodů. Písemku vypracujte na vlastní papíry. U každého příkladu přehledně napište postup řešení a jasně označte výsledek.

1. Nechť
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Určete A^{-1}, svůj výpočet ověřte zkouškou.

2. Je dána soustava rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$.
$$\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & - & z & = & -1 \\ ax & + & 4y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & az & = & 2 \end{array}$$
Určete počet řešení soustavy v závislosti na parametru a. (Řešení samotné hledat nemusíte.)

3. Vektory $[1, 2, 3, -1], [2, -3, 1, 5], [4, 1, 7, 3]$ doplňte na bázi prostoru $V_4(\mathbb{R})$.

4. Lineární transformace $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je dána následovně:
$$f([1, 1, 3]^T) = [1, 2]^T, f([2, 1, 1]^T) = [2, 3]^T, f([3, 2, -1]^T) = [3, -5]^T.$$
Určete matici transformace f vzhledem k jednotkové bázi a najděte obraz vektoru $\overline{v} = [5, 3, 2]^T$.

5. Je dána soustava rovnic
$$\begin{array}{ccccccc} x & - & 10y & + & 2z & = & 5 \\ 5x & - & 2y & + & z & = & 10 \\ x & + & y & + & 4z & = & 20 \end{array}$$
Předveďte řešení soustavy Jacobiho metodou: Je-li to potřeba, soustavu nejprve upravte tak, aby byla zaručena konvergence. Zapište iterační vztahy pro výpočet další aproximace a proveďte jeden krok metody. Vyjděte z bodu $(2, 0, 5)$.

6. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi prostoru $V \subseteq \mathbb{R}^4$ generovaného vektory $[1, 0, 1, 0], [0, 1, 2, 2], [0, 0, 4, 5]$.

7. Pro které hodnoty a, b je vektor $\overline{v}$ vlastním vektorem matice A a ke kterému vlastnímu číslu přísluší?
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 4 & 3 & b \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \overline{v} = [1, 0, -2]^T$$

jméno a příjmení	login	cvičící
		Hartmanová / Hlavičková / Hliněná / Sedláková / Vítovec

ILG, zadání C

T	1	2	3	4	5	6	7	Σ

*Zkouška se skládá ze dvou částí, testu za **10 bodů** a písemky za **70 bodů**. Z testu musíte získat **aspoň 7 bodů**, v opačném případě písemka nebude hodnocena a celá zkouška bude hodnocena 0 body.*

TEST

Každá otázka je za 2 body. Odpovědi napište na tento list do vymezeného prostoru pod otázkou.

1. Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Určete A^{-1}.

   Odpověď:

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Určete $B^T \cdot A$.

   Odpověď:

3. Nechť X je čtvercová matice. Platí následující tvrzení? Zdůvodněte!

$$|X| = 0 \Rightarrow X \text{ má na diagonále samé nuly.}$$

   Odpověď:

4. Uveďte příklad vektoru $\overline{v}$, který je ortogonální k vektoru $\overline{u} = [1, 2]$ vzhledem k obvyklému skalárnímu součinu.

   Odpověď:

5. Kolik řešení má soustava rovnic $x + y = 0$ na množině reálných čísel?

   Odpověď:

PÍSEMKA

Každý příklad je za 10 bodů. Písemku vypracujte na vlastní papíry. U každého příkladu přehledně napište postup řešení a jasně označte výsledek.

1. Na množině reálných čísel řešte soustavu rovnic s neznámými x, y, z, t:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & 3z & + & 2t & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & z & - & t & = & 0 \\ 5x & + & & & 10z & + & 5t & = & 0 \end{array}$$

2. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Určete $|A \cdot B^T|$.

3. Dané jsou vektory $[-1, b+1, b], [b, -2, -1], [-2, 4, 2]$. Určete $b \in \mathbb{R}$ tak, aby prostor jimi generovaný měl dimenzi a) 3, b) 2.

4. Lineární transformace $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je dána následovně:

$$f([1,2]^T) = [2,3,1]^T, f([3,5]^T) = [4,5,-1]^T.$$

   Určete matici transformace f vzhledem k jednotkové bázi a najděte obraz vektoru $\overline{v} = [5,7]^T$.

5. Najděte LU rozklad matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -10 \end{pmatrix}.$$

   Proveďte zkoušku!

   Pak pomocí nalezeného LU rozkladu najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & -1 \\ -6x & - & 2y & + & 4z & = & -4 \\ 2x & - & y & - & 10z & = & 15. \end{array}$$

6. Na přímce $p : x = 4 + 2t, y = -t, z = 2 + t, t \in \mathbb{R}$, najděte bod, který je nejblíže k bodu $[5, -8, 10]$.

7. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

jméno a příjmení	login	cvičící
		Hartmanová / Hlavičková / Hliněná / Sedláková / Vítovec

ILG, zadání F

T	1	2	3	4	5	6	7	Σ

Zkouška se skládá ze dvou částí, testu za ***10 bodů*** *a písemky za* ***70 bodů****. Z testu musíte získat* ***aspoň 7 bodů****, v opačném případě písemka nebude hodnocena a celá zkouška bude hodnocena 0 body.*

TEST

Každá otázka je za 2 body. Odpovědi napište na tento list do vymezeného prostoru pod otázkou.

1. Nechť $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{pmatrix}$. Určete všechna reálná a, pro která je $|A| = 0$.

   Odpověď:

2. Nechť $\overline{u} = [1, 2, 3], \overline{v} = [-3, -3, 3]$. Jsou vektory $\overline{u}, \overline{v}$ ortogonální vzhledem k obvyklému skalárnímu součinu?

   Odpověď:

3. Nechť X je čtvercová matice. Platí následující tvrzení? Zdůvodněte!

$$|X| = 0 \Rightarrow X \text{ má dva stejné řádky.}$$

   Odpověď:

4. Jaký geometrický objekt je $\langle [1, 1, 2], [2, 2, 4] \rangle$?

   a) dva body b) přímka c) trojúhelník d) rovina e) obdélník f) kruh g) elipsa

   Odpověď:

5. Napište příklad soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, která má právě jedno řešení.

   Odpověď:

PÍSEMKA

Každý příklad je za 10 bodů. Písemku vypracujte na vlastní papíry. U každého příkladu přehledně napište postup řešení a jasně označte výsledek.

1. Je dána soustava rovnic s parametrem $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & + & 2z & = & 1 \\ ax & & & - & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & az & = & 1 \end{array}$$

   Určete počet řešení soustavy v závislosti na parametru a. (Řešení samotné hledat nemusíte.)

2. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Najděte matici X tak, aby $A \cdot X = B$.

3. Jsou dány podprostory $V_3(\mathbb{R})$

$$L_1 = \langle [1,2,3],[0,1,2] \rangle, \quad L_2 = \langle [1,2,3],[1,3,5],[1,5,9] \rangle.$$

   U každého tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé, vždy zdůvodněte!

   a) $L_1 = L_2$, b) $L_1 \subseteq L_2$, c) $L_2 \subseteq L_1$, d) $[0,0,0] \in L_1 \cap L_2$, e) $L_1 + L_2 = V_3(\mathbb{R})$.

4. Jsou dány dvě báze $V_3(\mathbb{R})$:
   $A = \left([1,0,1]^T,[1,1,0]^T,[0,0,1]^T\right)$, $B = \left([2,2,0]^T,[0,0,1]^T,[1,0,1]^T\right)$.
   Určete souřadnice vektoru $\overline{u} = [-1,-3,7]^T$ v obou bázích.

5. Je dána soustava rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} 10x & + & y & + & 2z & = & 15 \\ x & + & 5y & - & 2z & = & 12 \\ 3x & - & y & + & 20z & = & 9 \end{array}$$

   Předveďte řešení soustavy Jacobiho metodou:

   Ověřte, že je splněna podmínka konvergence. Musí být poznat, co přesně ověřujete!

   Zapište iterační vztahy pro výpočet další aproximace a proveďte jeden krok metody. Vyjděte z bodu $(0,1,2)$.

6. Najděte všechny vektory z $V_3(\mathbb{R})$, které jsou kolmé na vektor $\overline{u} = [1,-2,5]$.

   Popište, jak prostor tvořený těmito vektory vypadá geometricky. Určete jeho dimenzi a uveďte příklad báze tohoto prostoru.

7. Pro které hodnoty a, b je vektor $\overline{v}$ vlastním vektorem matice A a ke kterému vlastnímu číslu přísluší?

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \overline{v} = [1,-1,b]^T$$