Funkce

1. Najděte definiční obory následujících funkcí:

- $f_1(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$, $f_2(x) = \sqrt{\frac{x+1}{|x-2|}}$, $f_3(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$, $f_4(x) = \sqrt{\left|\frac{x+1}{x-2}\right|}$
- $f_5(x) = \sqrt{\frac{4-x^2}{4-x^2}}$, $f_6(x) = \sqrt{\frac{4-x^2}{|4-x^2|}}$, $f_7(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{|4-x^2|}}$
- $f_8(x) = \ln\frac{x+1}{x-2}$, $f_9(x) = \ln\frac{|x+1|}{x-2}$, $f_{10}(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right|$
- $f_{11}(x) = \frac{1}{\ln(x^2-1)}$, $f_{12}(x) = \frac{1}{\ln|x^2-1|}$, $f_{13}(x) = -\ln(x^2-1)$
  $f_{14}(x) = -\ln|x^2-1|$
- $f_{15}(x) = \ln(x-1)^2$, $f_{16}(x) = 2\ln(x-1)$
- $f_{17}(x) = \sqrt{\frac{x}{\sin x}}$, $f_{18}(x) = \sqrt{\frac{x}{1+\sin x}}$
- $f_{19}(x) = \sqrt{\frac{1-x}{\ln(x^2-3)}}$, $f_{20}(x) = \sqrt{\frac{x}{e+\ln x}}$

2. Zjistěte, pro která $x \in \mathbb{R}$ se následující funkce rovnají:

- $h_1(x) = -1$, $g_1(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$
- $h_2(x) = \ln x^2$, $g_2(x) = 2\ln x$
- $h_3(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$, $g_3(x) = x-2$
- $h_4(x) = \ln\frac{x-1}{|x-1|}$, $g_4(x) = 0$
- $h_5(x) = \frac{1}{\ln(x^2-1)}$, $g_5(x) = -\ln(x^2-1)$
- $h_6(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$, $g_6(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$

3. K daným funkcím najděte inverzní funkce (pokud existují):

- $f_1(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$, $f_2(x) = \sqrt{\frac{x+1}{|x-2|}}$, $f_3(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$, $f_4(x) = \sqrt{\left|\frac{x+1}{x-2}\right|}$
- $f_8(x) = \ln\frac{x+1}{x-2}$, $f_9(x) = \ln\frac{|x+1|}{x-2}$, $f_{10}(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right|$
- $f_{15}(x) = \ln(x-1)^2$, $f_{16}(x) = 2\ln(x-1)$
- $f_{21}(x) = \frac{1+2^x}{4-2^x}$
- $f_{22}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0, \\ x^2 & x \in \langle 0, 2\rangle, \\ 2^x & x > 2. \end{cases}$

4. Nechť $f_{23}(x) = 4 - x^2$, určete: $f_{23}(\langle -3, 0\rangle), f_{23}(\mathbb{R}), f_{23}^{-1}(\langle 1, 2\rangle)$.

5. Nechť $f_{24}(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & x \in \langle -1, 1\rangle\,, \\ |x| & x \in \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1\rangle\,, \end{cases}$
určete: $f_{24}(\langle -2, 2\rangle), f_{24}(\mathbb{R}), f_{24}^{-1}(\langle \frac{1}{2}, 1\rangle), (f_{24} \circ f_{24})(x)$.

6. Nechť $f_{25}(x) = \begin{cases} x + 2 & x \in \langle -2, -1\rangle\,, \\ x & x \in (-1, 0), \\ 1 - x & x \in \langle 0, 1, \rangle\,, \\ -1 & x \in \langle 1, 2, \rangle\,, \end{cases}$
určete: $f_{25}(\langle -1, 0\rangle), f_{25}((-1, 1)), f_{25}^{-1}(\langle 0, 1\rangle), f_{25}^{-1}(\{0, 1\}), (f_{25} \circ f_{25})(x)$.

7. Nechť $f_{26}(x) = \begin{cases} -\sqrt{|x|} & x \in \langle -1, 1\rangle\,, \\ |x| - 2 & x \in \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1\rangle\,. \end{cases}$

   určete: $(f_{26} \circ f_{26})(x), |f_{26}(x)|, f_{26}(|x|), 2f_{26}(x), -f_{26}(x), f_{26}(-x), f_{26}(2x)$.

8. Nechť $f_{27}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{-2, 2\}, \\ \frac{1}{2} & x \in (-2, -1), \\ 0 & x \in \{-1, 1\}, \\ -\frac{1}{2} & x \in (1, 2), \\ -1 & x \in \{0\}, \\ x & x \in (0, 1) \\ -x & x \in (-1, 0). \end{cases}$
určete: $(f_{27} \circ f_{27})(x), |f_{27}(x)|, f_{27}(|x|), 2f_{27}(x), -f_{27}(x), f_{27}(-x), f_{27}(2x)$.

9. Je dána funkce $f(x) = \sin x(\cos x,\ \mathrm{tg}\ x,\ \mathrm{cotg}\ x)$. Nakreslete:
$f(x), |f(x)|, f(|x|), f(|-x|), f(2x), f(\frac{1}{2}x), f(x) + 1,$
$f(x) - 2, \frac{1}{2}f(x), 2f(x), f(x + \frac{\pi}{3}), f(2x - \frac{\pi}{2})$.

10. Pomocí Hornerova schématu rozložte polynomy na součin a načrtněte grafy funkcí p_i:

    - $p_1(x) = 2x^2 + 7x - 15$.
    - $p_2(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$.
    - $p_3(x) = x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x$.
    - $p_4(x) = x^5 + x^4 - 4x^2 - x + 3$.
    - $p_5(x) = 2x^5 + 9x^4 + 16x^3 + 14x^2 + 6x + 1$.
    - $p_6(x) = 4x^6 - x^5 + 8x^3 - 38x^2 + 33x - 6$.

NÁROČNĚJŠÍ ÚKOLY

1. Najděte alespoň čtyři různé funkce, pro které platí $(f \circ f)(x) = x$. Co musí dané funkce splňovat?

2. Platí - li pro funkci f: $(f \circ f)(x) = x$ pro $x \in \langle a, b \rangle$ a f je spojitá, potom f je ryze monotónní. Dokažte.

3. Vhodně doplňte a následně dokažte:
   Platí - li pro funkci f: $(f \circ f)(x) = x$ pro $x \in \langle a, b \rangle$, potom f je ...

4. Zjistěte, která z následujících funkcí splňuje vztah

$$(f \circ (f \circ f))(x) = x.$$

   - $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$
   - $f(x) = 2 - \frac{1}{x-1}$
   - $f(x) = -\frac{1}{x+1}$
   - $f(x) = a - \frac{1}{x+b}$, kde $a + b = 1$.

5. Dokažte, že platí: Nechť f a g jsou rostoucí funkce na $\mathbb{R}$. Potom $f \circ g$ je rostoucí na $\mathbb{R}$.

6. Dokažte, že platí: Funkce f je rostoucí na intervalu $\langle a, b \rangle$, jestliže platí pro každou dvojici bodů $x \neq y, x, y \in \langle a, b \rangle$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0.$$