Diferenciální počet funkce jedné proměnné

1. **Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bod ě A**

   (a) $f(x) = \frac{3x-4}{2x-3}, A = [2, ?]$,
   (b) $f(x) = \ln(x+1), A = [0, ?]$,
   (c) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}, A = [1, ?]$,
   (d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$, $A = [-\frac{2}{3}, ?]$,
   (e) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$, $A = [-1, ?]$.

2. **Najděte rovnici tečny ke grafu funkce f rovnoběžnou s přímkou p**

   (a) $f(x) = x^3 - 3x, p$ je o_x,
   (b) $f(x) = \ln x, p$ je dána rovnicí $2x - y - 3 = 0$,
   (c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}, p$ je o_x,
   (d) $f(x) = \ln \frac{x^2+2x+5}{2x}, p$ je o_x.

3. **Zderivujte**

   (a) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$,
   (b) $f(x) = (x^3 + 8)(x - 2)$,
   (c) $f(x) = \frac{(x^3+8)(x-2)}{(x^2+1)(x^3-1)}$,
   (d) $f(x) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$,
   (e) $f(x) = \ln \frac{5+4x}{3+7x}$,
   (f) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$,
   (g) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{\sqrt{3}-x\sqrt{7}}{\sqrt{3}+x\sqrt{7}}}$,
   (h) $f(x) = e^{-x^2}$,
   (i) $f(x) = x^{\ln x}$,
   (j) $f(x) = x^{\sin x}$.

4. **Najděte derivaci a znázorněte graf funkce a její derivace, když:**

   (a) $f(x) = |x|$,

   (b) $f(x) = x.|x|$,

   (c) $f(x) = |\cos x|$,

   (d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x < 0, \\ \ln(x+1) & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$

5. **Načtrněte graf funkce f, pro kterou platí:**

   (a) $D_f = \mathbb{R}, f$ je lichá, v $x = 0$ má nespojitost 1. druhu, v $x = 1$ má nespojitost 2. druhu, přičemž je zde spojitá zprava.
   $f(1) = 0, f(2) = -1$,
   $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1, \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -1, \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = -\infty, f'(2) = 0.$
   $f''(x) > 0$ pro $x \in (1,2), f''(x) < 0$ pro $x \in (0,1)$ a pre $x \in (2,\infty)$, pro $x \to \infty$ má asymptotu $y = 2 - x$. Do obrázku zakreslete asymptoty a tečny, resp. polotoečny v bodech, kde je známa derivace.

   (b) $D_f = \mathbb{R}, f$ v bodě $x = 1$, má nespojitost 2. druhu, přičemž je zde spojitá zleva.
   $f(3) = 2, f(1) = -2, f(0) = f(-2) = 0, f'(0) = -1.$
   $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty, f'(x) \leq 0$ pro $x \in (1,\infty)$.
   $x = -2$ a $x = 3$ jsou inflexní body, pričemž $f'(-2) = 1$, $f'(3) = 0$.
   Přímka $y = -2$ je její asympota pro $x \to \infty$, přímka $y = \frac{1}{2}(1+x)$ je asympota pro $x \to -\infty$.
   Do obrázku zakreslete asymptoty a tečny, resp. polotoečny v bodech, kde je známa derivace.

   (c) $D_f = \mathbb{R}, f$ v bodě $x = 1$, má nespojitost 2. druhu, přičemž je zde spojitá zleva.
   $f(3) = -2, f(1) = 2, f(0) = f(-2) = 0, f'(0) = 1.$
   $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \infty, f'(x) \geq 0$ pro $x \in (1,\infty)$.
   $x = -2$ a $x = 3$ jsou infl. body, pričemž $f'(-2) = -1$, $f'(3) = 0$.
   Přímka $y = 2$ je její asympota pro $x \to \infty$, přímka $y = -\frac{1}{2}(1+x)$ je asympota pro $x \to -\infty$.
   Do obrázku zakreslete asymptoty a tečny, resp. polotoečny v bodech, kde je známa derivace.

(d) Funkce f je spojitá na $\mathbb{R} - \{1\}$.
$f(0) = f(-1) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -2$.
$f'(0) = -2$, $\lim\limits_{x\to -1} f'(x) = \infty$,
$f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -1), x \in (0,1)$ a $x \in (1, \infty)$, $f''(x) < 0$ pro $x \in (-1, 0)$.
Přímka $y = x$ je její asympota pro $x \to \infty$.
Do obrázku zakreslete asymptoty a tečny, resp. polotoečny v bodech, kde je známa derivace.

6. **Zjistěte průběh funkce f a sestrojte její graf**

(a) $f(x) = |16 - x^2|$,
(b) $f(x) = \frac{2x}{x^2-1} + x$,
(c) $f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}$,
(d) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$,
(e) $f(x) = \sqrt[3]{(2x+1)(x-4)^2}$,
(f) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-x)^2}$,
(g) $f(x) = \sqrt{6x - x^2}$,
(h) $f(x) = \ln \frac{x^2+4x+2}{x+2}$,
(i) $f(x) = x^3 - 2|x|$,
(j) $f(x) = \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{\frac{2}{3}}$.

7. **Určete lokální extrémy funkce f:**

(a) $f(x) = \sqrt{6x - x^2}$,
(b) $f(x) = \ln \frac{x^2+4x+2}{x+2}$,
(c) $f(x) = x^3 - 2|x|$,
(d) $f(x) = \sqrt[3]{(2x+1)(x-4)^2}$,
(e) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-x)^2}$.

8. **Určete maximum a minimum funkce f na daném intervalu:**

(a) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, \langle -2, 1 \rangle$,
(b) $f(x) = |x^2 - 6x + 5|, \langle -5, 5 \rangle$,
(c) $f(x) = x + \frac{2x}{x^2-1}, \langle 1.01, 2 \rangle$,
(d) $f(x) = \sqrt[3]{(2x+1)(x-4)^2}, \langle 0, 5 \rangle$,
(e) $f(x) = x + \frac{1}{x-1}, \langle -4, 0 \rangle$,
(f) $f(x) = \cos 2x - 2x, \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

9. Najděte tečnu k parabole $y = x^2 - 4x + 3, 0 \leq x \leq 1$, která bude spolu se souřadnými osami tvořit trojúhelník s maximálním resp. minimálním obsahem.

10. Najděte tečnu k hyperbole $y = \frac{2}{x} - 1, 1 \leq x \leq 2$, která bude spolu se souřadnými osami tvořit trojúhelník s maximálním resp. minimálním obsahem.

11. Do trojúhelníku ABC vepište pravoúhlý rovnoběžník tak, aby jedna jeho strana byla na základně AB a jeho obsah byl největší.

12. Mezi všemi kruhovými výseči s obvodem $2s$ najděte tu, která má největší obsah.

Náročnější úkoly

1. Využitím rovnosti

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

najděte součet

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + n.x^{n-1}.$$

2. Využitím rovnosti

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin((n + 1/2)x)}{2\sin(x/2)},$$

najděte součet

$$\sin x + 2.\sin 2x + \cdots + n.\sin nx.$$

3. Dokažte, že derivace sudé funkce je lichá funkce.

4. Je-li funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ konvexní a $c \in \mathbb{R}^+$, potom $c.f$ je na $\langle a, b\rangle$ konvexní. Dokažte.

5. Dokažte, že funkce f je konvexní (konkávní) na intervalu $\langle a, b\rangle$ $\Longleftrightarrow$ $\forall x_1, x_2, x_3 \in \langle a, b\rangle, x_1 < x_2 < x_3$ je determinant

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix}$$

nezáporný (nekladný).