1. Určete $\int\limits_0^1 xe^x dx$.

Řešení: Řešíme metodou per partes:

$$u' = e^x,\ \ v = x,\ \ v' = 1,$$

$$u = \int e^x dx = e^x.$$

Potom

$$\int\limits_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int\limits_0^1 e^x \cdot 1 dx = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - [e^x]_0^1 = e^1 - e^1 + e^0 = 1.$$

2. Určete $\int\limits_0^1 \arctan x dx$.

Řešení: Řešíme metodou per partes:

$$u' = 1,\ \ v = \arctan x,$$

$$u = x,\ \ v' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Potom

$$\int\limits_0^1 \arctan x dx = [x \arctan x]_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = [x \arctan x]_0^1 - \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx =$$

$$= \left[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \arctan 1 - \frac{1}{2} \ln(1+1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2.$$

3. Určete $\int\limits_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}} dx$.

Řešení: Řešíme substituční metodou:

$$2x+1 = t^2, x = 0 \Rightarrow t = 1, x = 4 \Rightarrow t = 3$$

$$dx = tdt.$$

Potom

$$\int\limits_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}} dx = \int\limits_1^3 \frac{t}{1+t} dt = \int\limits_1^3 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = \int\limits_1^3 dt - \int\limits_1^3 \frac{1}{1+t} dt =$$

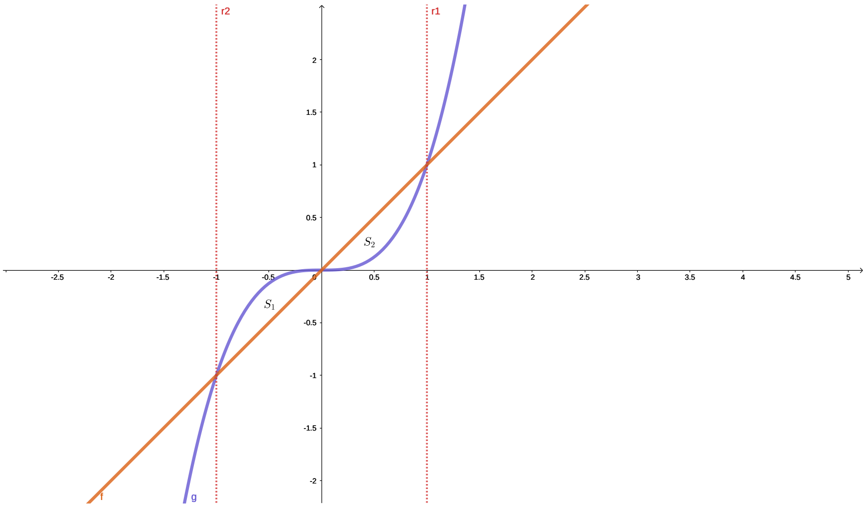
$$[t - \ln(1+t)]_1^3 = 3 - \ln 4 - (1 - \ln 2) = 2 - 2\ln 2 + \ln 2 = 2 - \ln 2.$$

4. Určete obsah rovinného obrazce omezeného čárami $y = x^3$ a $y = x$.
Řešení:

- Určíme průsečíky funkcí $y = x^3$ a $y = x$:

  $$x^3 = x \iff x(x-1)(x+1) = 0 \iff x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1.$$

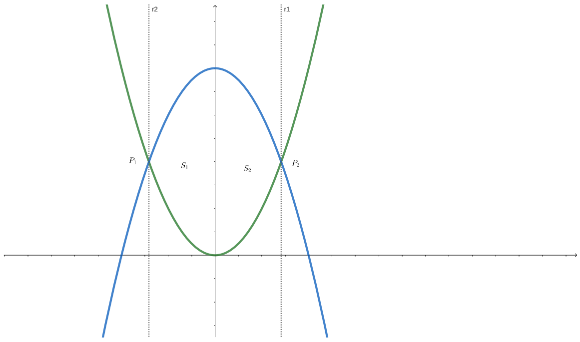
  Situaci vidíme na obrázku:

  Našim úkolem je zjistit součet obsahů obrazců S_1, S_2.
  Zřejmě je $O_{S_1} = O_{S_2}$, proto pro obsah vymezené oblasti platí:

  $$P = 2\int_0^1 (x - x^3)dx = 2\int_0^1 x dx - 2\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{2}.$$

5. Určete konstantu a, pro kterou je obsah plochy ohraničené grafem funkcí $f(x) = x^2$ a $g(x) = a - x^2$ roven $2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}$.
Řešení: Situaci vidíme na obrázku:



Zřejmě obsahy S_1 a S_2 jsou stejné, obě funkce jsou sudé. Proto stačí určit např. obsah S_2. Pro určení obsahu potřebujeme zjistit $x-$ovou souřadnici průsečíku P_2.

$$x^2 = a - x^2 \iff x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}.$$

Pro P_2 platí $P_2 = \left[\sqrt{\frac{a}{2}}, \frac{a}{2}\right]$, $y-$ovou souřadnici jsme určili díky tomu, že P_2 leží např. na grafu funkce f. Potom pro obsah S_2 platí

$$S_2 = \int_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}} g(x) - f(x)dx = \int_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}} a - x^2 - x^2 dx = \int_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}} a - 2x^2 dx =$$

$$= \left[ax - \frac{2}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{\frac{a}{2}}} = a \cdot \sqrt{\frac{a}{2}} - \frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^3 = \sqrt{\frac{a}{2}}\left(a - \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot \frac{2}{3} \cdot a = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a \cdot \sqrt{a}.$$

Pro obsah celé plochy potom platí

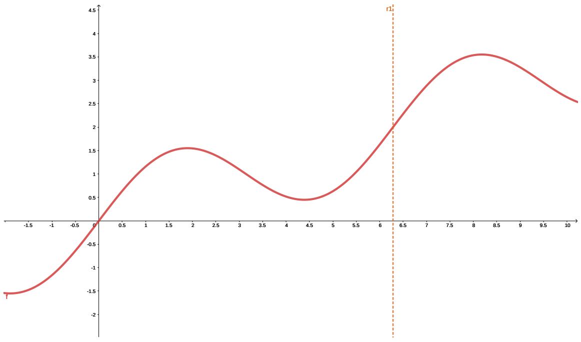
$$S = 2 \cdot S_2 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a \cdot \sqrt{a}.$$

Naším úkolem bylo zjistit, pro které a je obsah roven $2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}$. Proto musíme vyřešit kdy je

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot a \cdot \sqrt{a} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \iff a \cdot \sqrt{a} = 1,$$

co platí právě když je $a = 1$.

6. Určete konstantu a, pro kterou je obsah plochy ohraničené grafem funkce $f(x) = \sin x + a \cdot x$, osou x a přímkou $x = 2\pi$ roven 2π.
Řešení: Z obrázku vidíme, že musíme vypočítat obsah plochy pod funkcí f mezi 0 a 2π a tento obsah následně porovnat s 2π, což je požadovný obsah.



$$\int_0^{2\pi} \sin x + a \cdot x dx = \left[-\cos x + \frac{a}{2} x^2 \right]_0^{2\pi} = -1 + \frac{a}{2} \cdot 4\pi^2 + 1 = 2a\pi^2.$$

Potom

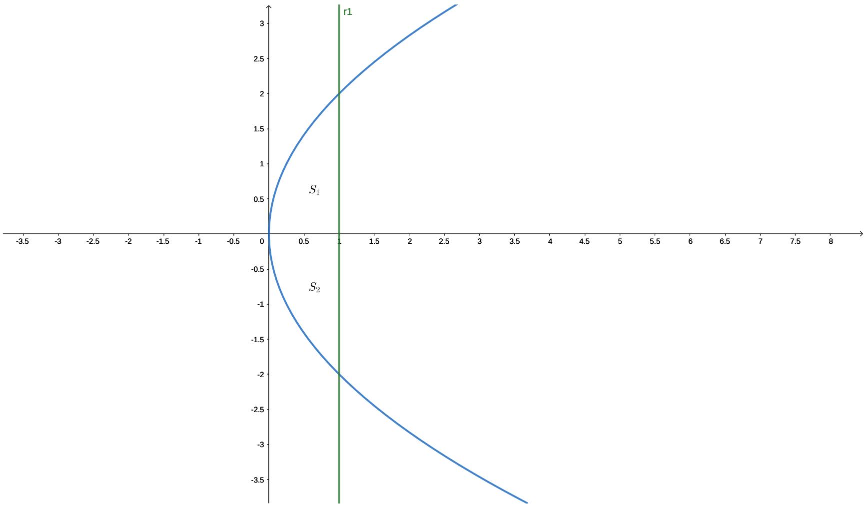
$$2a\pi^2 = 2\pi \iff a = \frac{1}{\pi}.$$

7. Určete obsah rovinného obrazce omezeného parabolou $y^2 = 2px$ a přímkou $x = \frac{p}{2}, (p > 0)$.
Řešení:

- Určíme průsečíky křivek $y^2 = 2px, x = \frac{p}{2}, (p > 0)$.
  Dosazením $x = \frac{p}{2}$ do první rovnice:

$$y^2 = p^2 \iff y = \pm p$$

Průsečíky jsou v bodech $[\frac{p}{2}, -p], [\frac{p}{2}, p]$. Situaci vidíme na obrázku:



Našim úkolem je zjistit součet obsahů obrazců S_1, S_2.
Zřejmě je $O_{S_1} = O_{S_2}$, proto stačí určit obsah nad $x-$ ovou osou, což je polovina hledaného obsahu. Potom

$$P = 2\int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{2px}dx = 2\sqrt{2p}\int_0^{\frac{p}{2}} x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2p^2}{3}.$$

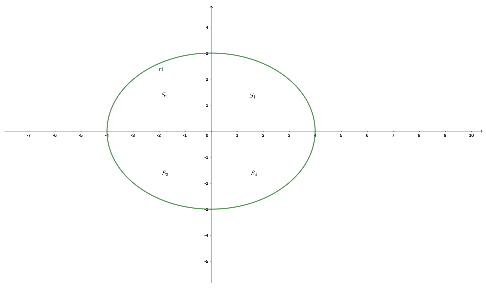
Nebo se na obrázek podívejme z boku, výpočet bude jednodušší:

$$P = 2\int_0^p \left(\frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p}\right) \mathrm{d}y = \left[\frac{p}{2}y - \frac{y^3}{6p}\right]_0^p = \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{6p} = \frac{2p^2}{3}.$$

8. Určete obsah elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > 0, b > 0)$.
Řešení: Nejdříve si vyjádříme y z rovnice elipsy:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Elipsa má střed v bodě $[0, 0]$, proto se dá rozdělit na čtyři shodné útvary, s obsahy S_1, S_2, S_3, S_4. Situaci vidíme na obrázku:



Budeme počítat obsah její části v prvním kvadrantu. Průsečíky s x-ovou osou jsou body $[a, 0], [-a, 0]$. Nás bude zajímat průsečík $[a, 0]$ a ta část elipsy, pro kterou je $y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Proto pro její obsah platí:

$$\frac{P}{4} = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx,$$

teda

$$P = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Použijeme substituci:

$$x = a\sin t, x = 0 \Rightarrow t = 0, x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2},$$

$$dx = a\cos t dt.$$

Potom (pozor na změnu hranic)

$$P = \frac{4b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot a\cos t dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t dt =$$

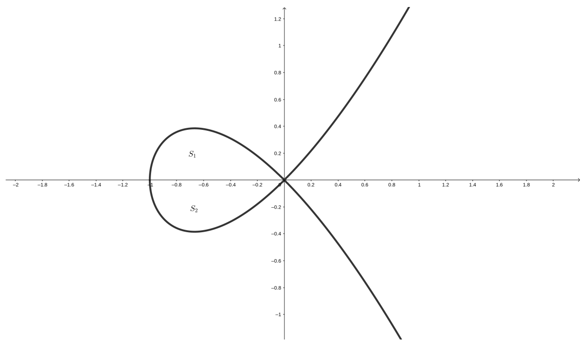
$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt =$$

$$2ab\,[t]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2ab\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

9. Určete obsah obrazce omezeného smyčkou křivky $y^2 = x^3 + x^2$.
Řešení: Nejdříve určíme průsečíky s x-ovou osou:

$$x^3 + x^2 = 0 \iff x_1 = 0 \vee x_2 = -1.$$

Situaci vidíme na obrázku:



Určíme obsah nad x-ovou osou (S_1), což je polovina hledaného obsahu, přičemž pro tuto část je $y = +\sqrt{x^3 + x^2}$. Pro obsah tedy platí:

$$P = 2\int_{-1}^{0} \sqrt{x^3 + x^2}\, dx = 2\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\, dx.$$

Použijeme substituci:

$$x + 1 = t, dx = dt, x = -1 \Rightarrow t = 0, x = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Potom

$$P = 2\int_{0}^{1} (t-1)t^{\frac{1}{2}} dt = 2\int_{0}^{1} \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\right) dt = 2\left[\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{8}{15}.$$

Počítali jsme obsah a výsledek je záporné číslo. Kde jsme udělali chybu?

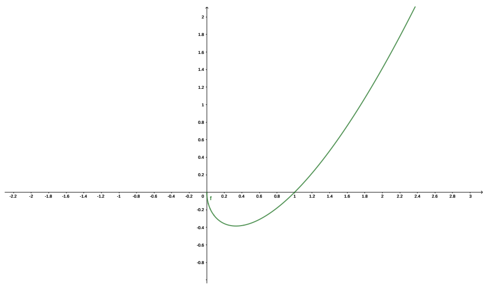
Chyba nastala při první úpravě integrované funkce:

$$\sqrt{x^3 + x^2} = x\sqrt{x+1} \quad \text{– platí toto opravdu?}$$

Opatrně, $\sqrt{x^2} = |x|$. My integrujeme funkci přes interval $\langle -1, 0\rangle$ a na tomto intervalu je $|x| = -x$. Správně by tedy mělo být

$$P = 2\int_{-1}^{0} \sqrt{x^3 + x^2}\, dx = -2\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\, dx.$$

Na obrázku máme graf funkce, kterou jsme dostali po substituci ($g(t) = (t-1)t^{\frac{1}{2}}$). Vidíme, že je na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ záporná, takže integrál musel vyjít záporně a je jasné, že se někde stala chyba.



Náprava je naštěstí snadná:

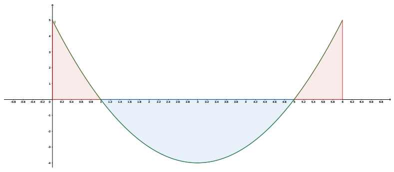
$$P = \left| -\frac{8}{15} \right| = \frac{8}{15}.$$

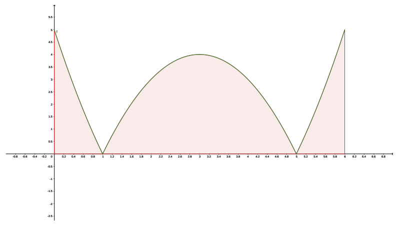
10. Vypočítejte $|\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x|$ a $\int_0^6 |f(x)|\mathrm{d}x$ pro funkci $f(x) = x^2 - 6x + 5$.
Řešení: Než začneme počítat, zamyslete se: Vyjdou oba integrály stejně?

$$\left|\int_0^6 (x^2 - 6x + 5)\mathrm{d}x\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x\right]_0^6\right| = |-6| = 6.$$

Graf funkce je částečně nad osou x a pod osou x, viz obrázek vlevo. Modrá oblast má větší obsah než červená plocha, takže celkový integrál vyšel záporně. Absolutní hodnotou jsme znaménko obrátili.

U druhého integrálu je situace jiná, viz obrázek vpravo.





Snadno zjistíme, že

$$|x^2 - 6x + 5| = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{pro } x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 5, \infty) \\ -x^2 + 6x - 5 & \text{pro } x \in (1, 5) \end{cases}$$

Integrál proto musíme rozdělit na více částí:

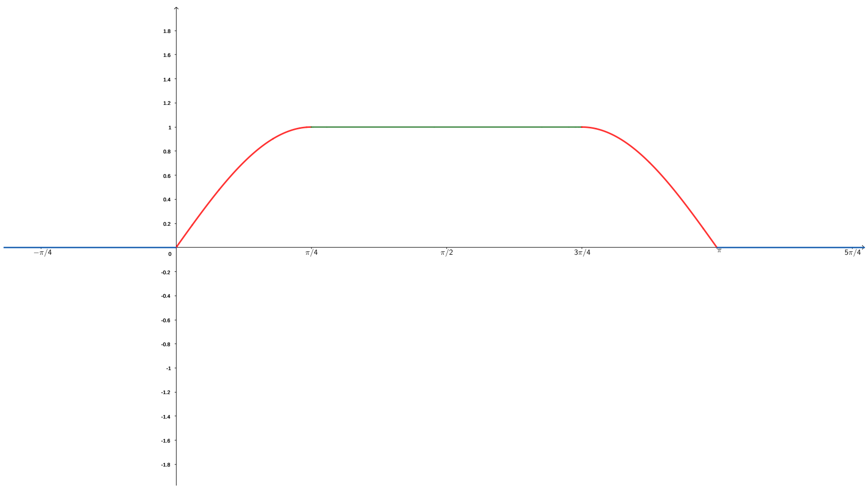
$$\begin{aligned} \int_0^6 |x^2 - 6x + 5|\mathrm{d}x &= \int_0^1 (x^2 - 6x + 5)\mathrm{d}x + \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)\mathrm{d}x + \\ &\quad + \int_5^6 (x^2 - 6x + 5)\mathrm{d}x = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \frac{46}{3} \end{aligned}$$

Výsledky jsou ve vztahu $|\int_0^6 f(x)\mathrm{d}x| \le \int_0^6 |f(x)|\mathrm{d}x$, viz přednáška.

11. Vypočítejte $\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x$ pro funkci

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x & \text{pro } x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle \\ 1 & \text{pro } x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right) \\ -\sin 2x & \text{pro } x \in \left\langle \frac{3\pi}{4}, \pi \right\rangle \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Řešení: Graf funkce je na obrázku:



Protože je funkce definována na různých intervalech různými předpisy, musíme integrál rozdělit:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \sin 2x \, \mathrm{d}x + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 1\mathrm{d}x + \int_{3\pi/4}^{\pi} (-\sin 2x)\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} 0\mathrm{d}x$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\pi/4} + [x]_{\pi/4}^{3\pi/4} + \left[\frac{1}{2} \cos 2x \right]_{3\pi/4}^{\pi} + [0]_{\pi}^{2\pi} =$$

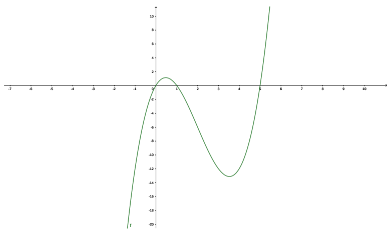
$$= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1 + \frac{\pi}{2}$$

12. Vyšetřete lokální extrémy funkce: $f(x) = \int_0^x t(t-1)(t-5)dt$.

Řešení: Nejdříve je nutné si uvědomit, že $f'(x) = x(x-1)(x-5)$. Tato derivace je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$, proto nás budou zajímat jenom ty hodnoty, pro které je $f'(x) = 0$. Zřejmě

$$f'(x) = 0 \iff x = 0 \vee x = 1 \vee x = 5.$$

Situaci vidíme na obrázku:



Pro znaménko první derivace proto platí:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (0,1) \text{ a } x \in (5,\infty),$$

a

$$f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty,0) \text{ a } x \in (1,5).$$

Proto funkce $f(x)$ (tu vůbec neznáme) má lokální minimum v $x = 0$ a v $x = 5$ a lokální maximum v bodě $x = 1$.

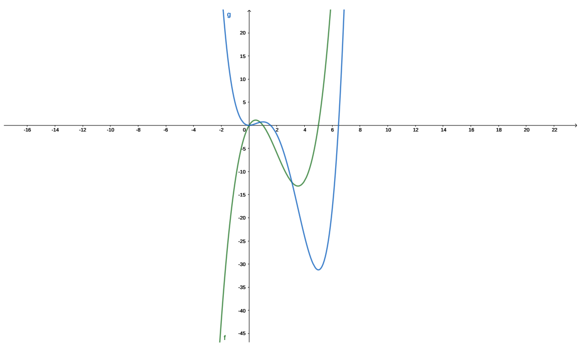
Po integraci zjistíme, že

$$f(x) = \int_0^x t(t-1)(t-5)dt = \int_0^x t^3 - 6t^2 + 5tdt = \left[\frac{t^4}{4} - 6\frac{t^3}{3} + 5\frac{t^2}{2}\right]_0^x.$$

Potom

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{5}{2}x^2,$$

a můžeme si všechno klasickým způsobem ověřit. Situaci vidíme na obrázku:



Funkce f je nakreslena modrou barvou a její derivace zelenou.

13. Najděte funkci $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ pro $x \in \langle 0, 3\rangle$ a načrtněte její graf. Funkce f je

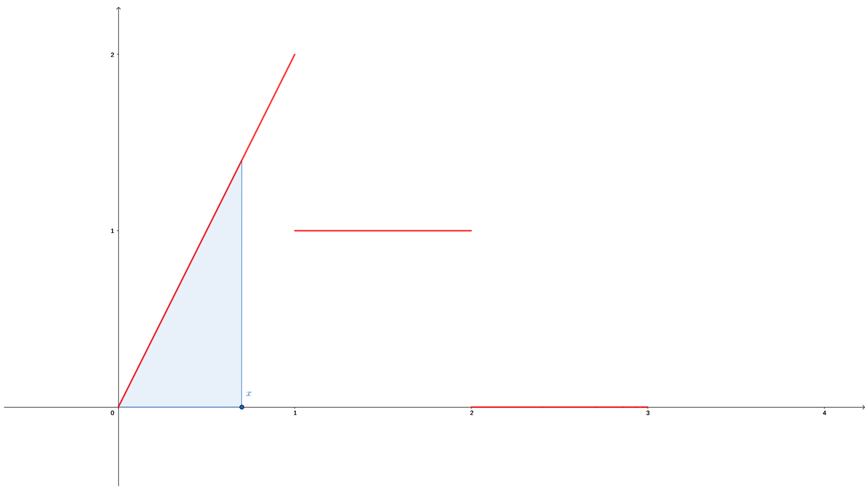
$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{pro } t \in \langle 0, 1\rangle \\ 1 & \text{pro } t \in (1, 2\rangle \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Řešení: Tento příklad asi některým zamotá hlavu, ale v IPT bude podobných víc.

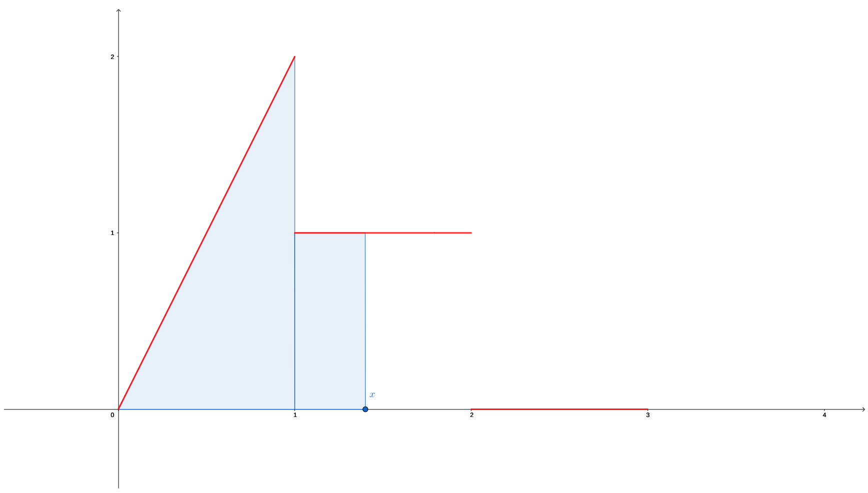
Dokud je x v intervalu $\langle 0, 1\rangle$, měla by být situace jasná:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 2t\,\mathrm{d}t = \left[t^2\right]_0^x = x^2,\ x \in \langle 0, 1\rangle$$

Počítáme modře vybarvený obsah v závislosti na poloze x, viz obrázek.



Ale co dál? Napovědět by mohl další obrázek:

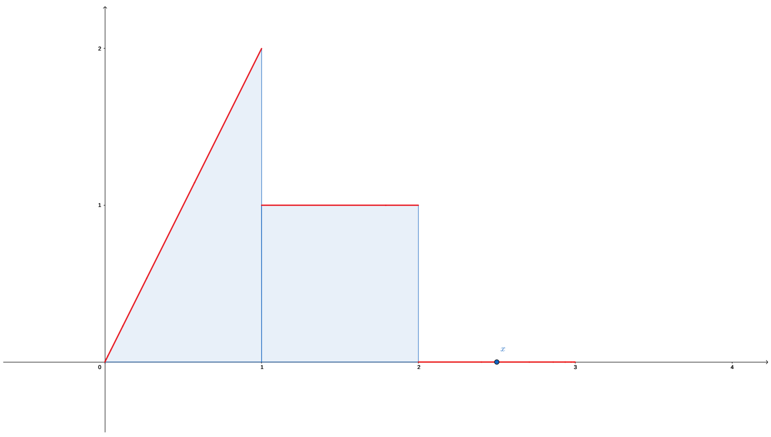


Pro $x \in (1, 2\rangle$ je

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2t\,\mathrm{d}t + \int_1^x 1\mathrm{d}t = \left[t^2\right]_0^1 + [t]_1^x = 1 + x - 1 = x.$$

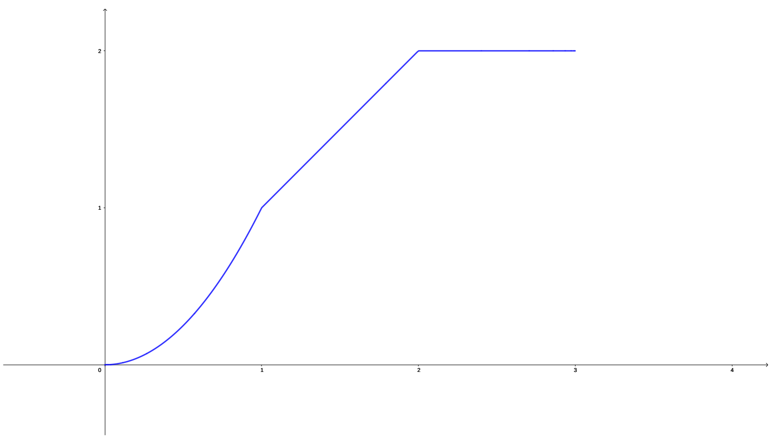
Je-li $x \in (2, 3\rangle$, pak (viz též obrázek níže)

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 2t\,\mathrm{d}t + \int_1^2 1\mathrm{d}t + \int_2^x 0\mathrm{d}t = \left[t^2\right]_0^1 + [t]_1^2 = 1+1 = 2.$$



Celkově jsme zjistili, že na intervalu $\langle 0, 3\rangle$ funkce F vypadá takto:

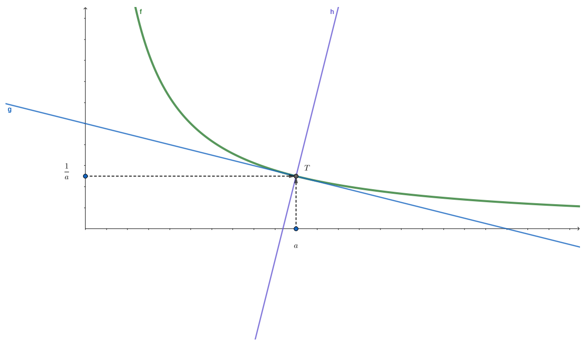
$$F(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \in \langle 0, 1\rangle \\ x & \text{pro } x \in (1, 2\rangle \\ 2 & \text{pro } x \in (2, 3\rangle\,. \end{cases}$$



Můžete se přesvědčit, že platí $F'(x) = f(x)$, s výjimkou bodů $x = 1$ a $x = 2$, kde F derivaci nemá.

Shrnuto: $F(x)$ postupně narůstá, jak se zvětšuje obsah plochy pod grafem funkce f, jestliže horní mez integrálu posouváme doprava.

14. Určete bod $T = [a, ?]$ na grafu funkce $f(x) = \frac{1}{x}$, pro který tvoří tečna a normála tímto bodem spolu s osou o_x trojúhelník s obsahem S=1.
Řešení: Situaci vidíme na obrázku:



Zřejmě:

$$T = \left[a, \frac{1}{a}\right] \text{ (bod leží na grafu funkce)}, \; f'(x) = -\frac{1}{x^2}, f'(a) = -\frac{1}{a^2}.$$

Potom pro tečnu a normálu platí:

$$t: \quad y = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}(x-a), \quad n: \quad y = \frac{1}{a} + a^2(x-a).$$

Pro výpočet obsahu trojúhelníka potřebujeme zjistit průsečíky tečny a normály s osou o_x :

$$0 = y = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}(x-a) \iff \frac{1}{a}(x-a) = 1 \iff x = 2a,$$

$$0 = \frac{1}{a} + a^2(x-a) \iff \frac{1}{a}(x-a) = -a^3(x-a) \iff x = a - \frac{1}{a^3},$$

je nutné si uvědomit, že $a \neq 0$. Potom strana trojúhelníka, která leží na o_x, má velikost:

$$d = 2a - \left(a - \frac{1}{a^3}\right) = \left(a + \frac{1}{a^3}\right).$$

Výška na tuto stranu je vzdálenost bodu $T = \left[a, \frac{1}{a}\right]$ od o_x, proto pro její velikost platí:

$$v = \frac{1}{a},$$

a pro obsah trojúhelníka máme

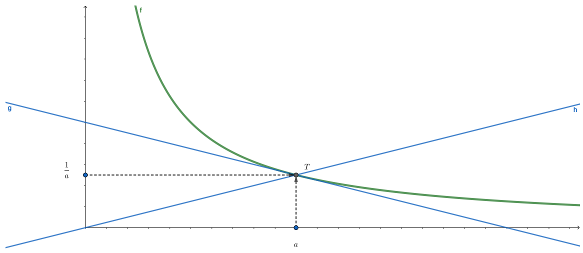
$$S = \frac{1}{2} \cdot d \cdot v = \frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{1}{a^3}\right) \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2a} \cdot \left(a + \frac{1}{a^3}\right).$$

Jestliže má platit $S = 1$, tak:

$$\frac{1}{2a} \cdot \left(a + \frac{1}{a^3}\right) = 1 \iff a + \frac{1}{a^3} = 2a \iff a = \pm 1.$$

Funkce f leží i ve třetím kvadrantu a situace, kterou máme na obrázku, je tam symetrická.

15. Určete bod $T = [a, ?]$ na grafu funkce $f(x) = \frac{1}{x}$, pro který tvoří tečna tímto bodem a přímka procházející bodem T a počátkem souřadnic spolu s osou o_x trojúhelník s obsahem S=1.
Řešení: Situaci vidíme na obrázku:



Zřejmě:

$$T = \left[a, \frac{1}{a}\right] \text{ (bod leží na grafu funkce)}, \; f'(x) = -\frac{1}{x^2}, f'(a) = -\frac{1}{a^2}.$$

Potom pro tečnu platí:

$$t: \quad y = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}(x - a).$$

Pro výpočet obsahu trojúhelníka potřebujeme zjistit průsečík tečny s osou o_x :

$$0 = y = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}(x - a) \iff \frac{1}{a}(x - a) = 1 \iff x = 2a.$$

Potom strana trojúhelníka, která leží na o_x má velikost:

$$d = 2a - 0 = 2a.$$

Výška na tuto stranu je vzdálenost bodu $T = \left[a, \frac{1}{a}\right]$ od o_x, proto pro její velikost platí:

$$v = \frac{1}{a},$$

a pro obsah trojúhelníka máme

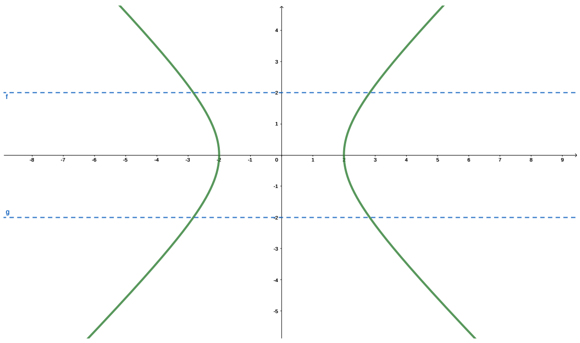
$$S = \frac{1}{2} \cdot d \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

Co to znamená? Bod T můžeme zvolit libovolně na grafu této funkce f a trojúhelník, který dostaneme uvedeným způsobem, bude mít vždy obsah 1.

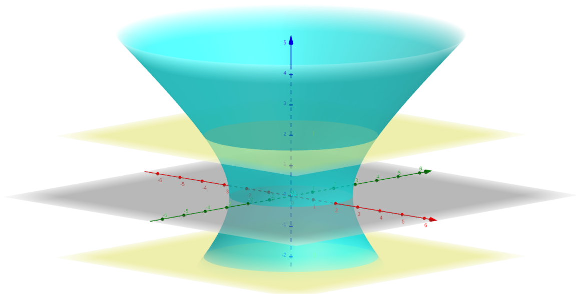
16. Určete objem tělesa vytvořeného rotací obrazce vymezeného $x^2 - y^2 = 4, y = \pm 2$, kolem osy y.
Řešení: Jedná se o hyperbolu se středem v [0,0] a rovnici můžeme přepsat následovně:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Situaci vidíme na obrázku:



Po rotaci kolem osy y dostaneme:



Pro objem při rotaci kolem osy y máme vztah:

$$V = \pi \int_a^b [f(y)]^2 \, dy,$$

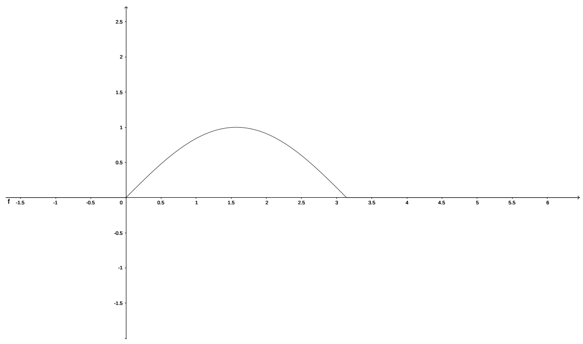
proto si vyjádříme $[f(y)]^2$:

$$[f(y)]^2 = x^2 = y^2 + 4.$$

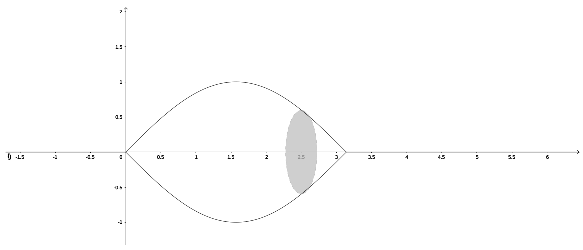
Potom pro objem máme:

$$V = \pi \int_{-2}^{2} (y^2 + 4) dy = \pi \left[\frac{y^3}{3} + 4y \right]_{-2}^{2} = \frac{64\pi}{3}.$$

17. Určete objem tělesa vytvořeného rotací obrazce vymezeného $y = \sin x$ kolem osy x od 0 do π.
Řešení: Situaci vidíme na obrázku:



Po rotaci kolem osy x dostaneme:



Pro objem při rotaci kolem osy x máme vztah:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx,$$

proto si vyjádříme $[f(x)]^2$:

$$[f(x)]^2 = y^2 = \sin^2 x.$$

Potom pro objem máme:

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Využili jsme vztahy:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \text{ a } \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Z nich postupně dostaneme:

$$\sin^2 x = \cos^2 x - \cos 2x \ \wedge \ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \cos 2x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

18. Určete délku kružnice $x^2 + y^2 = r^2$.
Řešení:

Pro délku křivky máme vztah:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Proto si vyjádříme $f(x)$:

$$f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2},$$

vybereme si nezápornou část křivky a tu zderivujeme:

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

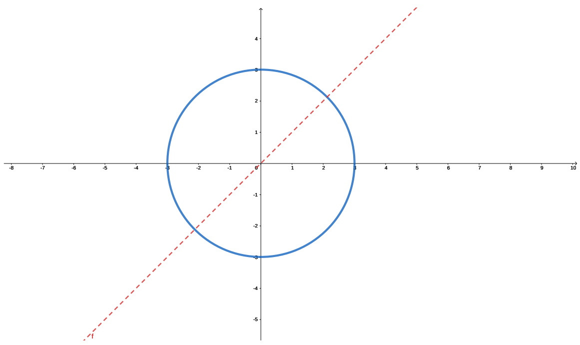
a umocníme

$$(y')^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}.$$

Můžeme vypočítat $\frac{1}{4}$ délky kružnice (počítáme v prvním kvadrantu), potom dostaneme:

$$s = 4 \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx.$$

Situaci vidíme na obrázku:



Zde je však problém, funkce, kterou integrujeme, není spojitá v bodě r. Až se naučíme tzv. nevlastní integrály, budeme si s tím umět poradit. Jenže to ještě neumíme. Situace však není zoufalá, stačí se omezit na menší část kružnice. Budeme počítat její osminu, tedy funkce zůstane stejná, změní se jenom horní hranice a budeme brát 8-krát tuto délku:

$$\int_0^h \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx.$$

Jak určíme hornou hranici? Je to $x-$ová souřadnice průsečíku kružnice a přímky $y = x$. Proto $h = \frac{r\sqrt{2}}{2}$. Potom

$$s = 8 \int\limits_{0}^{\frac{r\sqrt{2}}{2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx.$$

Použijeme substitci:

$$x = r\cos t, x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, x = \frac{r\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$dx = -r\sin t dt.$$

Potom

$$s = -8r^2 \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\sqrt{r^2 - r^2\cos^2 t}} dt = 8r^2 \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{r\sqrt{1 - \cos^2 t}} dt =$$

$$= 8r \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t} dt = 8r \left[t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 8r\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 2\pi r.$$

19. Určete délku kružnice dané rovnicemi $x = r\cos t, y = r\sin t, r > 0$.
Řešení: Pro délku křivky danou parametricky máme vztah:

$$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt.$$

Předpisy pro x a y zderivujeme a následně umocníme. Potom, pro naši křivku dostáváme:

$$s = \int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} dt = \int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = \int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{r^2} dt = 2\pi r.$$