Extrémy

March 17, 2020

Lokálne extrémy

Príklad

Nájdite lokálne extrémy funkcie $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - x)^2}$.

Riešenie.

- Najskôr určíme definičný obor funkcie. Vzhľadom k tomu, že sa jedná o tretiu odmocninu, tak $D_f = \mathbb{R}$.
- Lokálne extrémy sú v bodoch, pre ktoré je $f'(x) = 0$ alebo kde $f'(x)$ neexistuje. Preto určíme prvú deriváciu funkcie f.

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \left(x^2 - x\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(x^2 - x\right)' =$$

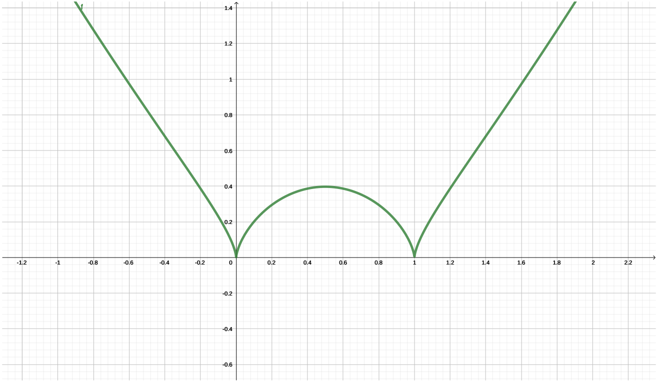
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x^2 - x)^{\frac{1}{3}}} \cdot (2x - 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x \cdot (x - 1))^{\frac{1}{3}}} \cdot (2x - 1)\,.$$

- Zrejme $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ a $f'(x)$ neexistuje pre $x \in \{0, 1\}$.

Lokálne extrémy

- Tieto tri podozrivé body rozdelia číselnú os na štyri intervaly: $(-\infty, 0)\,, \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, \infty)\,.$
- Určíme znamienko prvej derivácie na jednotlivých intervaloch:
  - $f'(x) > 0$ pre $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ a pre $x \in (1, \infty)\,.$
  - $f'(x) < 0$ pre $x \in (-\infty, 0)$ a pre $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right).$
- To znamená, že funkcia f:
  - rastie na intervale $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ a $(1, \infty)\,,$
  - klesá na intervale $(-\infty, 0)$ a $\left(\frac{1}{2}, 1\right).$
- Funkcia vľavo od bodu 0 klesá, napravo od bodu 0 rastie, preto je v bode 0 lokálne minimum, podobne zistíme, že v bode $\frac{1}{2}$ je lokálne maximum a v bode 1 lokálne minimum.

Situáciu vidíme na obrázku. Všimnite si obe lokálne minimá a porovnajte s lokálnym maximom-v bodoch, v ktorých má funkcia lok. minimá derivácia neexistuje a v bode, kde je lok. maximum, je derivácia rovná nule.

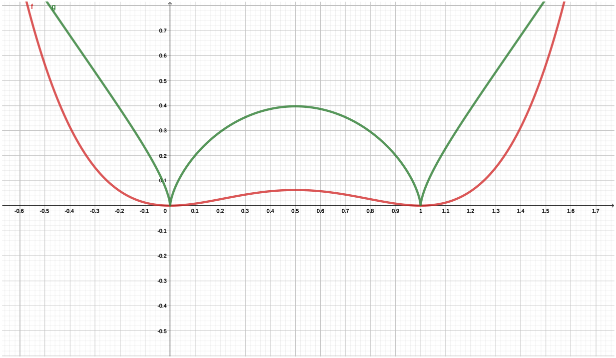


Záver a odpoveď

Teda lokálne minimá sú v bodoch $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$, ich hodnota je $f(0) = f(1) = 0$. Lokálne maximum je v bode $x_3 = \frac{1}{2}$ a jeho hodnota je $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{4}$.
Pozor, dosadzujeme do pôvodnej funkcie f.

Vylepšenie riešenia-niečo pre lenivých študentov

Vzhľadom k tomu, ze $\sqrt[3]{x}$ je rastúca funkcia, tak funkcie $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-x)^2}$ a $g(x) = (x^2-x)^2$ majú lokálne extrémy v tých istých bodoch. Situáciu vidíme na obrázku.



Funkcie f a g majú lokálne extrémy v tých istých bodoch, ale derivovať a následne aj upravovať funkciu g je jednoduchšie-v tom spočíva vylepšenie. *Prekonajte svoju lenivosť a vyskúšajte si to.*

Lokálne extrémy

Príklad

Nájdite lokálne extrémy funkcie $f(x) = \sqrt[3]{(2x+1)\cdot(x-4)^2}$.

Riešenie.

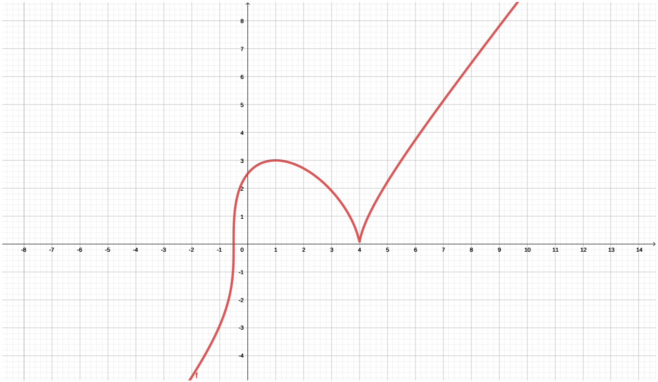
- Najskôr určíme definičný obor funkcie. Vzhľadom k tomu, že sa jedná o tretiu odmocninu, tak $D_f = \mathbb{R}$.
- Lokálne extrémy sú v bodoch, pre ktoré je $f'(x) = 0$ alebo kde $f'(x)$ neexistuje. Preto určíme prvú deriváciu funkcie f.

  $$f'(x) = \frac{1}{3}\cdot\left((2x+1)\cdot(x-4)^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left((2x+1)\cdot(x-4)^2\right)' =$$
  $$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left((2x+1)\cdot(x-4)^2\right)^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(2\,(x-4)^2 + (2x+1)\cdot 2(x-4)\right) =$$
  $$= \frac{2\cdot(x-1)}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}\cdot(x-4)^{\frac{1}{3}}}.$$
- Zrejme $f'(x) = 0 \iff x = 1$ a $f'(x)$ neexistuje pre $x \in \{-\frac{1}{2}, 4\}$.

Lokálne extrémy

- Tieto tri podozrivé body rozdelia číselnú os na štyri intervaly: $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 1\right), (1, 4), (4, \infty)$.
- Určíme znamienko prvej derivácie na jednotlivých intervaloch:
  - $f'(x) > 0$ pre $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, pre $x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ a pre $x \in (4, \infty)$.
  - $f'(x) < 0$ pre $x \in (1, 4)$.
- To znamená, že funkcia f:
  - rastie na intervale $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ a $(4, \infty)$.
  - klesá na intervale $(1, 4)$.
- Funkcia vľavo od bodu 4 klesá, napravo od bodu 4 rastie, preto je v bode 4 lokálne minimum, podobne zistíme, že v bode 1 je lokálne maximum a v bode $-\frac{1}{2}$ nie je ani lokálne minimum, ani lok. maximum (funkcia vpravo, aj vľavo od $-\frac{1}{2}$ rastie).

Situáciu vidíme na obrázku. Všimnite si lokálne minimum a porovnajte s lokálnym maximom-v bode, v ktorom má funkcia lok. minimum derivácia neexistuje a v bode, kde je lok. maximum, je derivácia rovná nule. A všimnite si funkciu v bode $-\frac{1}{2}$, tam derivácia tiež neexistuje a nie je v ňom ani extrém.

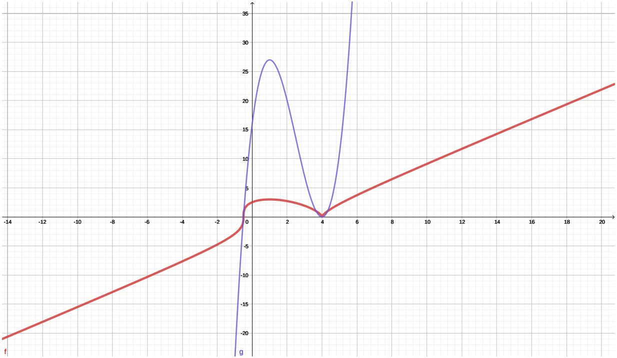


Záver a odpoveď

Teda lokálne minimum je v bode $x_1 = 4$ a jeho hodnota je $f(4) = 0$.
Lokálne maximum je v bode $x_2 = 1$ a jeho hodnota je $f(1) = 3$.

Vylepšenie riešenia-niečo pre lenivých študentov

Vzhľadom k tomu, ze $\sqrt[3]{x}$ je rastúca funkcia, tak funkcie $f(x) = \sqrt[3]{(2x+1)\cdot(x-4)^2}$ a $g(x) = (2x+1)\cdot(x-4)^2$ majú lokálne extrémy v tých istých bodoch. Situáciu vidíme na obrázku.



Fukcie f a g majú lokálne extrémy v tých istých bodoch, ale derivovať a následne aj upravovať funkciu g je určite jednoduchšie-v tom spočíva vylepšenie.

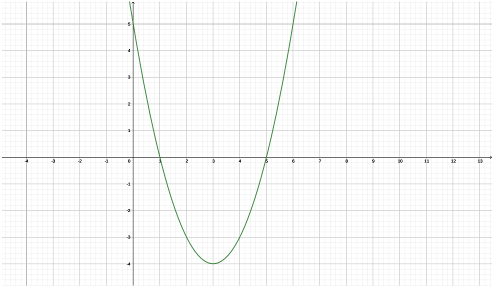
Nájdite lokálne extrémy funkcií:

1. $f_1(x) = \sqrt[3]{(3x+1)\cdot(x+2)^2}$,
   [lok.max. v bode -2, lok. min. v bode $-\frac{8}{9}$]
2. $f_2(x) = \sqrt{|6x - x^2|}$,
   [lok.max. v bode 3, lok. min. v bodoch 0 a 6]
3. $f_3(x) = \ln \frac{x^2+4x+2}{x+2}$,
   [bez lok. extrémov]
4. $f_4(x) = x^3 - 2|x|$.
   [lok.max. v bode 0, lok. min. v bode $\sqrt{\frac{2}{3}}$]

Príklad

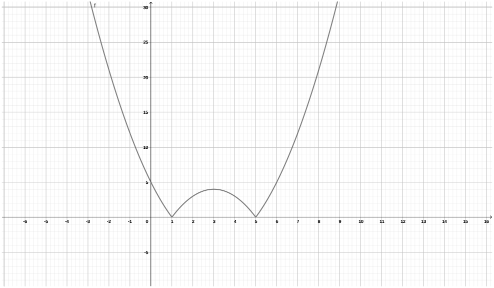
Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$ *na intervale* $\langle -5, 5\rangle$.

Riešenie. Zrejme $f(x) = |x^2 - 6x + 5| = |(x-5)(x-1)|$. Úlohu vyriešime graficky, najskôr nakreslíme graf funkcie $g(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x-1)$:



Vrchol tejto paraboly je v bode $x = 3$.

Teraz si nakreslíme graf funkcie $f(x) = |g(x)|$:



Globálne extrémy

Úlohu vyriešime bez toho, aby sme museli funkciu derivovať. Zrejme body, v ktorých by funkcia f mohla nadobudnúť najväčšiu a najmenšiu hodnotu sú krajné body intervalu, teda -5 a 5 a potom body, v ktorých je derivácia nulová, alebo neexistuje. Z priebehu funkcie je zrejmé, že derivácia neexistuje v bodoch 1 a 5. Derivácia je nulová v bode 3. Teraz stačí porovnať funkčné hodnoty v týchto bodoch a vybrať najväčšiu a najmenšiu hodnotu. Najmenšia hodnota je 0 a funkcia ju nadobúda v bodoch 1 a 5, najväčšiu hodnotu nadobúda v bode -5 a a je to hodnota 60.

Globálne extrémy

Príklad

Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ *na intervale* $\langle -2, 1 \rangle$.

Riešenie.
Funkcia môže najväčšiu a najmenšiu hodnotu nadobudnúť v krajných bodoch intervalu, ďalej v bodoch, v ktorých má deriváciu rovnú nule, alebo v nich derivácia neexistuje a zároveň o nich platí, že patria do daného intervalu. Preto funkciu najskôr zderivujeme a dostaneme:

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x-3)(x-1).$$

Derivácia existuje pre každé $x \in \mathbb{R}$. Teda "podozrivé" body sú

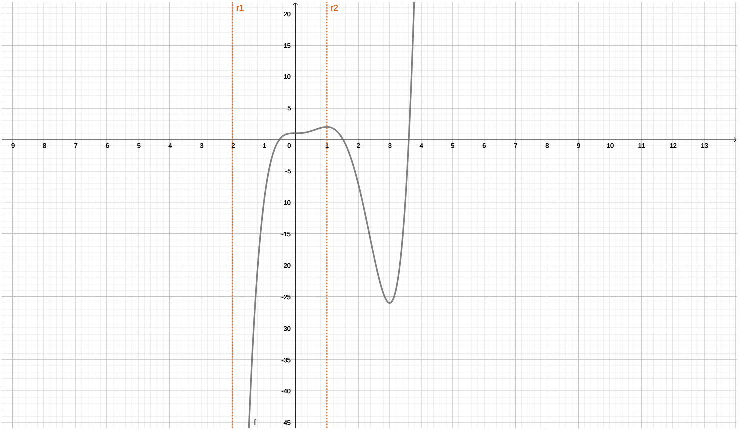
- krajné body intervalu: $-2, 1$,
- body, kde je prvá derivácia nulová: $0, 1, 3$.

Zrejme $3 \notin \langle -2, 2 \rangle$, preto sa ním ďalej nebudeme zaoberať a svoju pozornosť sústredíme len na body $-2, 0, 1$. V týchto bodoch určíme funkčné hodnoty a vyberieme najväčšiu a najmenšiu z nich.

$$f(-2) = -151, f(0) = 1, f(1) = 2.$$

Takže funkcia f nadobúda najmenšiu hodnotu v bode $x = -2$ a je to hodnota -151 a najväčšiu hodnotu v bode $x = 1$ a je to hodnota 2.

Situáciu si môžeme aj graficky znázorniť.



Príklad

Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x) = \cos 2x - 2x$ *na intervale* $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

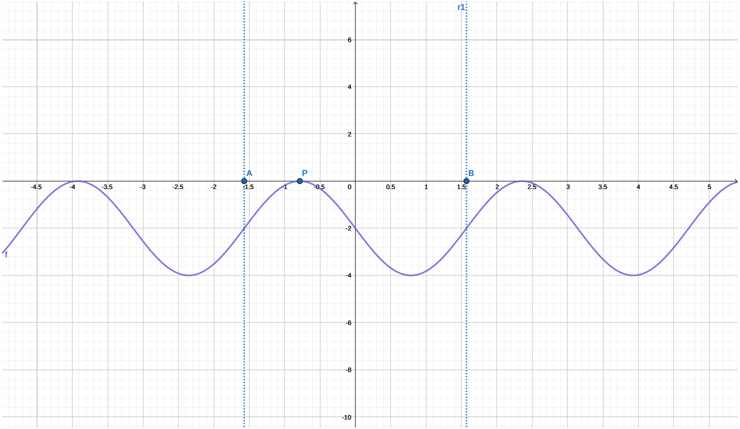
Riešenie.
Funkcia môže najväčšiu a najmenšiu hodnotu nadobudnúť v krajných bodoch intervalu, ďalej v bodoch, v ktorých má deriváciu rovnú nule, alebo v nich derivácia neexistuje a zároveň o nich platí, že patria do daného intervalu. Preto funkciu najskôr zderivujeme a dostaneme:

$$f'(x) = -2\sin(2x) - 2 = -2(\sin(2x) + 1).$$

Derivácia existuje pre každé $x \in \mathbb{R}$.

Globálne extrémy

Graf prvej derivácie na danom intervale je takýto.



Zrejme $f'(x) = 0 \iff x = -\frac{\pi}{4}$.

Globálne extrémy

Bod, v ktorom je $f'(x) = 0$ vieme určiť aj výpočtom.

$$f'(x) = -2(\sin(2x) + 1) \text{ a } f'(x) = 0 \iff \sin(2x) = -1.$$

Zrejme $\sin 2x = -1 \iff 2x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.
Potom $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$.
Vzhľadom k tomu, že úlohu riešime len na intervale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, máme jediné riešenie:

$$f'(x) = 0 \iff x = -\frac{\pi}{4}.$$

Teda "podozrivé" body sú:

- krajné body intervalu: $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$,
- bod, kde je prvá derivácia nulová: $-\frac{\pi}{4}$.

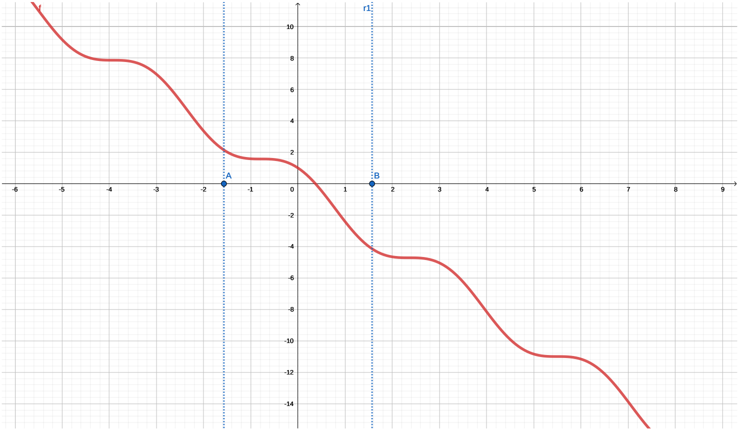
V týchto bodoch určíme funkčné hodnoty a vyberieme najväčšiu a najmenšiu z nich.

$$f(-\frac{\pi}{2}) = \pi - 1, f(-\frac{\pi}{4}) = \frac{pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}) = -1 - \pi.$$

Takže funkcia f nadobúda najmenšiu hodnotu v bode $x = \frac{\pi}{2}$ a je to hodnota $-1 - \pi$ a najväčšiu hodnotu v bode $x = -\frac{\pi}{2}$ a je to hodnota $\pi - 1$.

Globálne extrémy

Situáciu si môžeme aj graficky znázorniť.



Globálne extrémy-úlohy na precvičenie

Nájdite maximum a minimum nasledujúcich funkcií na daných intervaloch:

1. $f_1(x) = \sqrt[3]{(3x+1)\cdot(x+2)^2}, \langle 0,5\rangle,$
   [Max. v bode 5, min. v bode 0]
2. $f_2(x) = \sqrt{|6x-x^2|}, \langle 1,2\rangle,$
   [Max. v bode 2, min. v bode 1]
3. $f_3(x) = \ln\frac{x^2+4x+2}{x+2}, \langle 0,2\rangle,$
   [Max. v bode 2, min. v bode 0]
4. $f_4(x) = x^3-2|x|, \langle 0,2\rangle.$
   [Max. v bode 2, min. v bode $\sqrt{\frac{2}{3}}$]