Integrální počet

June 10, 2020

Příklad (Metoda per partes)

$\int xe^x dx =$

Příklad (Metoda per partes)

$\int xe^x dx =$

$$u' = e^x,\ v = x,\ v' = 1,$$
$$u = \int e^x dx = e^x,$$

Příklad (Metoda per partes)

$\int xe^x dx =$

$$u' = e^x, \; v = x, \; v' = 1,$$
$$u = \int e^x dx = e^x,$$

$= xe^x - \int e^x \cdot 1 dx = xe^x - e^x = e^x(x-1) + C.$

Příklad (Metoda per partes)

$\int xe^x dx =$

$$u' = e^x, \; v = x, \; v' = 1,$$
$$u = \int e^x dx = e^x,$$

$= xe^x - \int e^x \cdot 1 dx = xe^x - e^x = e^x(x-1) + C.$

Příklad (Metoda per partes)

$\int x^2 e^x dx =$

Příklad (Metoda per partes)

$\int xe^x dx =$

$$u' = e^x,\ v = x,\ v' = 1,$$
$$u = \int e^x dx = e^x,$$

$= xe^x - \int e^x \cdot 1 dx = xe^x - e^x = e^x(x-1) + C.$

Příklad (Metoda per partes)

$\int x^2 e^x dx =$

$$u' = e^x,\ v = x^2,$$
$$u = e^x,\ v' = 2x.$$

Příklad (Metoda per partes)

$\int xe^x dx =$

$$u' = e^x,\ v = x,\ v' = 1,$$
$$u = \int e^x dx = e^x,$$

$= xe^x - \int e^x \cdot 1 dx = xe^x - e^x = e^x(x-1) + C.$

Příklad (Metoda per partes)

$\int x^2 e^x dx =$

$$u' = e^x,\ v = x^2,$$
$$u = e^x,\ v' = 2x.$$

$= x^2e^x - 2\int e^x \cdot x dx = x^2e^x - 2\left(e^x(x-1)\right) = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$

Příklad (Metoda per partes)

$\int \frac{x^2}{e^x} dx =$

Příklad (Metoda per partes)

$\int \frac{x^2}{e^x} dx =$

$$u' = \frac{1}{e^x},\ v = x^2,\ v' = 2x,$$

$$u = \int \frac{1}{e^x} dx = -\frac{1}{e^x}.$$

Příklad (Metoda per partes)

$\int \frac{x^2}{e^x} dx =$

$$u' = \frac{1}{e^x},\ v = x^2,\ v' = 2x,$$

$$u = \int \frac{1}{e^x} dx = -\frac{1}{e^x}.$$

$= -\frac{1}{e^x} x^2 - \int -\frac{1}{e^x} \cdot 2x dx = -\frac{x^2}{e^x} + 2 \int \frac{x}{e^x} dx =$

Příklad (Metoda per partes)

$\int \frac{x^2}{e^x} dx =$

$$u' = \frac{1}{e^x}, \ v = x^2, \ v' = 2x,$$

$$u = \int \frac{1}{e^x} dx = -\frac{1}{e^x}.$$

$= -\frac{1}{e^x} x^2 - \int -\frac{1}{e^x} \cdot 2x dx = -\frac{x^2}{e^x} + 2 \int \frac{x}{e^x} dx =$

$$u' = \frac{1}{e^x}, \ v = x, \ v' = 1,$$

$$u = -\frac{1}{e^x}.$$

Příklad (Metoda per partes)

$\int \frac{x^2}{e^x} dx =$

$$u' = \frac{1}{e^x},\ v = x^2,\ v' = 2x,$$

$$u = \int \frac{1}{e^x} dx = -\frac{1}{e^x}.$$

$= -\frac{1}{e^x} x^2 - \int -\frac{1}{e^x} \cdot 2x dx = -\frac{x^2}{e^x} + 2 \int \frac{x}{e^x} dx =$

$$u' = \frac{1}{e^x},\ v = x,\ v' = 1,$$

$$u = -\frac{1}{e^x}.$$

$= -\frac{x^2}{e^x} + 2\left(-\frac{1}{e^x} \cdot x - \int -\frac{1}{e^x} dx\right) = -\frac{x^2+2x+2}{e^x} + C.$

Příklad (Metoda per partes)

$\int \ln x dx =$

Příklad (Metoda per partes)

$\int \ln x dx =$

$$u' = 1,\ v = \ln x,\ v' = (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$u = \int dx = x.$$

Příklad (Metoda per partes)

$\int \ln x dx =$

$$u' = 1,\ v = \ln x,\ v' = (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$u = \int dx = x.$$

$$= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C =$$

$$= x(\ln x - 1) + C = x \ln \frac{x}{e} + C, \textit{ pro } x > 0.$$

Příklad (Metoda per partes)

$\int \frac{\ln x}{x} dx =$

Příklad (Metoda per partes)

$\int \frac{\ln x}{x} dx =$

$$u' = \frac{1}{x},\ v = \ln x,\ v' = \frac{1}{x},$$
$$u = \ln x.$$

Příklad (Metoda per partes)

$\int \frac{\ln x}{x} dx =$

$$u' = \frac{1}{x},\ v = \ln x,\ v' = \frac{1}{x},$$

$$u = \ln x.$$

$= \ln x \cdot \ln x - \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx$

Příklad (Metoda per partes)

$\int \frac{\ln x}{x} dx =$

$$u' = \frac{1}{x},\ v = \ln x,\ v' = \frac{1}{x},$$

$$u = \ln x.$$

$= \ln x \cdot \ln x - \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx$$

Příklad (Metoda per partes)

$\int \frac{\ln x}{x} dx =$

$$u' = \frac{1}{x}, \;\; v = \ln x, \;\; v' = \frac{1}{x},$$

$$u = \ln x.$$

$= \ln x \cdot \ln x - \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$2 \int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C, \textit{pro } x > 0.$$

Příklad (Metoda per partes)

$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx =$

Příklad (Metoda per partes)

$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx =$

$$u' = \frac{1}{1+x^2}, \;\; v = \operatorname{arctg} x, \;\; v' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$u = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x.$$

Příklad (Metoda per partes)

$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx =$

$$u' = \frac{1}{1+x^2}, \ v = \operatorname{arctg} x, \ v' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$u = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x.$$

$= \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \operatorname{arctg} x \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}^2 x - \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$

Příklad (Metoda per partes)

$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx =$

$$u' = \frac{1}{1+x^2},\ v = \operatorname{arctg} x,\ v' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$u = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x.$$

$$= \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \operatorname{arctg} x \tfrac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}^2 x - \int \tfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$$

$$2 \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}^2 x$$

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C.$$

Příklad (Metoda per partes)

$\int e^x . \sin x dx =$

$$u = \sin x \quad u' = \cos x$$

$$v' = e^x \quad v = e^x$$

$= e^x . \sin x - \int e^x . \cos x dx =$

$$u = \cos x \quad u' = -\sin x$$

$$v' = e^x \quad v = e^x$$

$= e^x . \sin x - (e^x . \cos x - \int (-\sin x) . e^x dx) =$
$e^x . \sin x - e^x . \cos x - \int \sin x . e^x dx$

Potom

$\int e^x . \sin x dx = e^x . \sin x - e^x . \cos x - \int \sin x . e^x dx$
$2 \int e^x . \sin x dx = e^x . \sin x - e^x . \cos x$
$\int e^x . \sin x dx = \frac{e^x . \sin x - e^x . \cos x}{2} + c$

Příklad (Metoda substituční)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{dx}{x} =$$

Příklad (Metoda substituční)

$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{dx}{x} =$

$$\sqrt{\ln x} = t \Rightarrow \ln x = t^2 \Rightarrow \frac{dx}{x} = 2tdt$$

Příklad (Metoda substituční)

$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{dx}{x} =$

$$\sqrt{\ln x} = t \Rightarrow \ln x = t^2 \Rightarrow \frac{dx}{x} = 2tdt$$

$$= 2\int \frac{1}{t} tdt = 2\int dt = 2t = 2\sqrt{\ln x} + C, \textit{pro } x > 1.$$

Příklad (Metoda substituční)

$$\int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx = \int \frac{1}{1+3\cos x} \sin x dx =$$

Příklad (Metoda substituční)

$\int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx = \int \frac{1}{1+3\cos x} \sin x dx =$

$$1 + 3\cos x = t \Rightarrow -3\sin x dx = dt \Rightarrow \sin x dx = -\frac{1}{3} dt$$

Příklad (Metoda substituční)

$\int \frac{\sin x}{1+3\cos x} dx = \int \frac{1}{1+3\cos x} \sin x dx =$

$$1 + 3\cos x = t \Rightarrow -3\sin x dx = dt \Rightarrow \sin x dx = -\frac{1}{3} dt$$

$$= \int \frac{1}{t} \cdot \left(-\frac{1}{3} dt\right) = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{3} \ln |t| = -\frac{1}{3} \ln |1 + 3\cos x| + C, \textit{pro } x, \cos x \neq -\frac{1}{3}.$$

Příklad (Metoda substituční)

$$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx =$$

Příklad (Metoda substituční)

$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx =$

$$\operatorname{arctg} x = t \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = dt$$

Příklad (Metoda substituční)

$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int \operatorname{arctg} x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx =$

$$\operatorname{arctg} x = t \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = dt$$

$= \int t dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C.$

Příklad (Metoda substituční)

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^2 x}} dx =$$

Příklad (Metoda substituční)

$\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^2 x}} dx =$

$$\sqrt{2 - \sin^2 x} = t \Rightarrow 2 - \sin^2 x = t^2$$

$$-2 \sin x \cos x dx = 2t dt \Rightarrow \sin x \cos x dx = -t dt$$

Příklad (Metoda substituční)

$\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^2 x}} dx =$

$$\sqrt{2-\sin^2 x} = t \Rightarrow 2 - \sin^2 x = t^2$$

$$-2\sin x \cos x dx = 2tdt \Rightarrow \sin x \cos x dx = -tdt$$

$= -\int \frac{tdt}{t} = -\int dt = -t = -\sqrt{2-\sin^2 x} + C.$

Příklad (Metoda substituční)

$\int \frac{1}{x^2+2} dx =$

Příklad (Metoda substituční)

$\int \frac{1}{x^2+2} dx =$

$$x = t\sqrt{2}, t = \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow dx = \sqrt{2}dt$$

Příklad (Metoda substituční)

$\int \frac{1}{x^2+2}dx =$

$$x = t\sqrt{2}, t = \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow dx = \sqrt{2}dt$$

$= \int \frac{\sqrt{2}dt}{2t^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

Příklad (Metoda substituční)

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \int \frac{1}{a^2(\frac{x^2}{a^2}+1)} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\frac{x^2}{a^2}+1} dx$$

Příklad (Metoda substituční)

$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \int \frac{1}{a^2(\frac{x^2}{a^2}+1)} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\frac{x^2}{a^2}+1} dx$

$$\frac{x}{a} = t, x = at \Rightarrow dx = adt$$

Příklad (Metoda substituční)

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \int \frac{1}{a^2(\frac{x^2}{a^2}+1)}dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\frac{x^2}{a^2}+1}dx$$

$$\frac{x}{a} = t, x = at \Rightarrow dx = adt$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{adt}{t^2+1} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Příklad (Metoda substituční)

$\int \frac{1}{x^2-2x+2}dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+1}dx =$

Příklad (Metoda substituční)

$\int \frac{1}{x^2-2x+2} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+1} dx =$

$$x - 1 = t$$

$$dx = dt$$

Příklad (Metoda substituční)

$$\int \frac{1}{x^2-2x+2} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+1} dx =$$

$$x - 1 = t$$

$$dx = dt$$

$$\int \frac{1}{t^2+1} dt = \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg}(x-1) + C.$$

Příklad (Metoda per partes a substituční)

$\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx =$

Příklad (Metoda per partes a substituční)

$\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx =$

$$u' = 1, \; v = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}),$$

$$u = x, v' = \frac{1 + \frac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Příklad (Metoda per partes a substituční)

$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx =$

$$u' = 1,\ v = \ln(x+\sqrt{1+x^2}),$$

$$u = x, v' = \frac{1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot x dx =$

Příklad (Metoda per partes a substituční)

$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx =$

$$u' = 1,\ v = \ln(x+\sqrt{1+x^2}),$$

$$u = x, v' = \frac{1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot x dx =$

$$1+x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dt$$

Příklad (Metoda per partes a substituční)

$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx =$

$$u' = 1,\ v = \ln(x+\sqrt{1+x^2}),$$

$$u = x, v' = \frac{1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot x dx =$

$$1+x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dt$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - t^{\frac{1}{2}} =$$

Příklad (Metoda per partes a substituční)

$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx =$

$$u' = 1,\ v = \ln(x+\sqrt{1+x^2}),$$

$$u = x, v' = \frac{1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot x dx =$

$$1+x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dt$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - t^{\frac{1}{2}} =$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí)

$\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)} dx =$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí)

$\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}dx =$

$$\frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{x-5}$$

$$A = 0, B = 0, C = -3, D = 1$$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí)

$\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)} dx =$

$$\frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{x-5}$$

$$A = 0, B = 0, C = -3, D = 1$$

$$-3 \int \frac{1}{(x-2)^3} dx + \int \frac{1}{x-5} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{1}{(x-2)^2} + \ln|x-5| + C, \text{pro } x \neq 2, x \neq 5.$$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí)

$\int \frac{2x^3+5x^2+8}{2x^2+7x-15} dx =$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí)

$\int \frac{2x^3+5x^2+8}{2x^2+7x-15} dx =$

$$(2x^3+5x^2+8) : (2x^2+7x-15) = x - 1 + \frac{22x-7}{2x^2+7x-15}$$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí)

$\int \frac{2x^3+5x^2+8}{2x^2+7x-15} dx =$

$$(2x^3+5x^2+8):(2x^2+7x-15) = x-1+\frac{22x-7}{2x^2+7x-15}$$

$$= \int \left[x - 1 + \frac{22x-7}{2x^2+7x-15}\right] dx = \int \left[x - 1 + \frac{22x-7}{(2x-3)(x+5)}\right] dx$$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí)

$\int \frac{2x^3+5x^2+8}{2x^2+7x-15} dx =$

$$(2x^3+5x^2+8) : (2x^2+7x-15) = x - 1 + \frac{22x-7}{2x^2+7x-15}$$

$$= \int \left[x - 1 + \frac{22x-7}{2x^2+7x-15} \right] dx = \int \left[x - 1 + \frac{22x-7}{(2x-3)(x+5)} \right] dx$$

$$22x - 7 = A(x+5) + B(2x-3)$$

$$A = 4, B = 9$$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí)

$\int \frac{2x^3+5x^2+8}{2x^2+7x-15} dx =$

$$(2x^3 + 5x^2 + 8) : (2x^2 + 7x - 15) = x - 1 + \frac{22x - 7}{2x^2 + 7x - 15}$$

$$= \int \left[x - 1 + \tfrac{22x-7}{2x^2+7x-15}\right] dx = \int \left[x - 1 + \tfrac{22x-7}{(2x-3)(x+5)}\right] dx$$

$$22x - 7 = A(x + 5) + B(2x - 3)$$

$$A = 4, B = 9$$

$$= \int x dx - \int dx + 4 \int \frac{1}{2x - 3} dx + 9 \int \frac{1}{x + 5} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + 2 \ln |2x - 3| + 9 \ln |x + 5| + C, \textit{pro } x \neq \frac{3}{2}, x \neq -5.$$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí)

$$\int \frac{1}{x^3+x^2+2x+2}dx = \int \frac{1}{(x+1)(x^2+2)}dx$$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí)

$\int \frac{1}{x^3+x^2+2x+2} dx = \int \frac{1}{(x+1)(x^2+2)} dx$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = \frac{1}{3}$$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí)

$\int \frac{1}{x^3+x^2+2x+2} dx = \int \frac{1}{(x+1)(x^2+2)} dx$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+2} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+2} =$$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí)

$\int \frac{1}{x^3+x^2+2x+2} dx = \int \frac{1}{(x+1)(x^2+2)} dx$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+2} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+2} =$$

$$\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2} + \frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} =$$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí)

$\int \frac{1}{x^3+x^2+2x+2} dx = \int \frac{1}{(x+1)(x^2+2)} dx$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+2} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+2} =$$

$$\frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2} + \frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C, \textit{ pro } x \neq -1.$$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí)

$\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx = \int \frac{5x+2}{(x+1)^2+9}dx =$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí)

$\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10} dx = \int \frac{5x+2}{(x+1)^2+9} dx =$

$$x + 1 = 3t \Rightarrow dx = 3dt$$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí)

$\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10} dx = \int \frac{5x+2}{(x+1)^2+9} dx =$

$$x + 1 = 3t \Rightarrow dx = 3dt$$

$$= \int \frac{15t-3}{9t^2+9} 3dt = \frac{3.3}{9} \int \frac{5t-1}{t^2+1} dt = \frac{5}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt - \int \frac{1}{t^2+1} dt =$$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí)

$\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10} dx = \int \frac{5x+2}{(x+1)^2+9} dx =$

$$x+1 = 3t \Rightarrow dx = 3dt$$

$$= \int \frac{15t-3}{9t^2+9} 3dt = \frac{3.3}{9} \int \frac{5t-1}{t^2+1} dt = \frac{5}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt - \int \frac{1}{t^2+1} dt =$$

$$= \frac{5}{2} \ln(t^2+1) - \operatorname{arctg} t = \frac{5}{2} \ln \frac{x^2+2x+10}{9} - \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C.$$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí)

$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}dx = \int \frac{x+2}{x(x^2-2x+2)}dx =$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí)

$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}dx = \int \frac{x+2}{x(x^2-2x+2)}dx =$

$$\frac{x+2}{x(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}$$

$$A = 1, B = -1, C = 3.$$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí)

$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x} dx = \int \frac{x+2}{x(x^2-2x+2)} dx =$

$$\frac{x+2}{x(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}$$

$$A = 1, B = -1, C = 3.$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-x+3}{x^2-2x+2} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x-3}{x^2-2x+2} dx =$$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí - pokr.)

$$= \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx - 2 \int \frac{1}{x^2-2x+2} dx =$$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí - pokr.)

$$= \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx - 2 \int \frac{1}{x^2-2x+2} dx =$$

$$= \ln|x| - \ln(x^2-2x+2) - 2 \int \frac{1}{x^2-2x+2} dx =$$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí - pokr.)

$$= \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx - 2 \int \frac{1}{x^2-2x+2} dx =$$

$$= \ln|x| - \ln(x^2-2x+2) - 2 \int \frac{1}{x^2-2x+2} dx =$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x+2} dx = \frac{1}{\sqrt{2-1^2}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{2-1^2}} = \operatorname{arctg}(x-1),$$

Příklad (Integrace racionálních lomených funkcí - pokr.)

$$= \int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx - 2\int \frac{1}{x^2-2x+2}dx =$$

$$= \ln|x| - \ln(x^2-2x+2) - 2\int \frac{1}{x^2-2x+2}dx =$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{\sqrt{2-1^2}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{2-1^2}} = \operatorname{arctg}(x-1),$$

$$= \ln|x| + \ln(x^2-2x+2) - 2\operatorname{arctg}(x-1) + C$$

$$= \ln \frac{|x|}{(x^2-2x+2)} - 2\operatorname{arctg}(x-1) + C, \textit{pro } x \neq 0$$

Příklad (Metoda substituční)

$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-3}} =$

Příklad (Metoda substituční)

$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-3}} =$

$$\sqrt{4x^2-3} = t - 2x$$

$$4x^2 - 3 = t^2 - 4tx + 4x^2$$

$$-3 = t^2 - 4tx$$

$$x = \frac{t^2+3}{4t}dt$$

$$dx = \frac{t^2-3}{4t^2}dt$$

Příklad (Metoda substituční)

$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-3}} =$

$$\sqrt{4x^2-3} = t - 2x$$
$$4x^2 - 3 = t^2 - 4tx + 4x^2$$
$$-3 = t^2 - 4tx$$
$$x = \frac{t^2+3}{4t}dt$$
$$dx = \frac{t^2-3}{4t^2}dt$$

$$= \int \frac{\frac{t^2-3}{4t^2}}{t - 2\frac{t^2+3}{4t}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}\ln|2x + \sqrt{4x^2-3}| + C, \textit{pro} |x| > \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Příklad (1. spůsob)

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx =$$

Příklad (1. spůsob)

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx =$$

$$\frac{x}{2} = t$$

$$dx = 2dt$$

Příklad (1. způsob)

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx =$$

$$\frac{x}{2} = t$$

$$dx = 2dt$$

$$= \int \frac{1}{\sin t\cos t}dt = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{\sin t\cos t}{\cos^2 t}}dt =$$

Příklad (1. spůsob)

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx =$$

$$\frac{x}{2} = t$$

$$dx = 2dt$$

$$= \int \frac{1}{\sin t\cos t}dt = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{\sin t\cos t}{\cos^2 t}}dt =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\operatorname{tg} t}dt = \ln|\operatorname{tg} t| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C, \textit{pro } x \neq k\pi, k \in Z.$$

Příklad (2. způsob)

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx =$$

Příklad (2. způsob)

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx =$$

$$= -\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C, \textit{pro } x \neq k\pi, k \in Z.$$

Příklad (3. spůsob)

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{dx}{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} =$$

Příklad (3. spůsob)

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{dx}{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx =$$

Příklad (3. spůsob)

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{dx}{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx =$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx = dt$$

Příklad (3. spůsob)

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{dx}{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} =$$

$$= \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx =$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx = dt$$

$$\int \frac{1}{t}dt = \ln|t| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C, \textit{pro } x \neq k\pi, k \in Z.$$

Příklad (4. spůsob, univerzální substituce)

$$\int \frac{dx}{\sin x} =$$

Příklad (4. spůsob, univerzální substituce)

$$\int \frac{dx}{\sin x} =$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, x = 2\operatorname{arctg} t$$

$$dx = 2\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Příklad (4. spůsob, univerzální substituce)

$$\int \frac{dx}{\sin x} =$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, x = 2 \operatorname{arctg} t$$

$$dx = 2\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \cos\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\sin x = \sin 2\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos 2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Příklad (4. způsob, univerzální substituce, pokr.)

Příklad (4. spůsob, univerzální substituce, pokr.)

$$= \int \frac{1}{\frac{2t}{t^2+1}} \cdot \frac{2dt}{t^2+1} = \int \frac{dt}{t} =$$

$$\ln|t| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C, \textit{pro } x \neq k\pi, k \in Z.$$

Příklad (Metoda substituční)

$\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}} =$

$$1+x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt, x = t^6 - 1$$

$= \int \frac{t^6-1}{t^2-t^3} 6t^5 dt = -6 \int \frac{t^6-1}{t-1} t^3 =$

$= -6 \int t^8 + t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3 dt =$

$= -\frac{2}{3}t^9 - \frac{3}{4}t^8 - \frac{6}{7}t^7 - t^6 - \frac{6}{5}t^5 - \frac{3}{2}t^4 + c =$

$=$

$-\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x} - \frac{3}{4}(1+x)\sqrt[3]{1+x} - \frac{6}{7}(1+x)\sqrt[6]{1+x} - 1 - x - \frac{6}{5}(1+x)^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}(1+x)^{\frac{2}{3}} + c$

Příklad (Metoda substituční)

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} =$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = t+x \Rightarrow x^2+x+1 = x^2+2tx+t^2, x = \frac{t^2-1}{1-2t}, dx = \frac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}dt$$

$$= \int \frac{\frac{-2t^2+2t-2}{(1-2t)^2}dt}{\frac{t^2-1}{1-2t}+t+\frac{t^2-1}{1-2t}} = \int \frac{2t^2-2t+2}{(t-2)(2t-1)} = \int 1 + \frac{2}{t-2} - \frac{1}{2t-1}dt =$$

$$= t + 2\ln|t-2| - \frac{1}{2}\ln|2t-1| =$$

$$= \sqrt{x^2+x+1} - x + 2\ln|\sqrt{x^2+x+1} - x - 2| - \frac{1}{2}\ln|2\sqrt{x^2+x+1-2x-1}| + c.$$

Příklad (Metoda substituční)

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} =$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = tx+1 \Rightarrow x^2+x+1 = t^2x^2+2tx+1, x = \frac{1+2t}{1-t^2}, dx = \frac{2t^2+2t+2}{(1-t^2)^2}dt$$

$$= \int \frac{\frac{2t^2+2t+2}{(1-t^2)^2}dt}{\frac{1+2t}{1-t^2}+t\frac{1+2t}{1-t^2}+1} = \int \frac{-2t^2-2t-2}{(t-1)(t+2)(t+1)^2}dt =$$

$$= \int \frac{-0.5}{t-1} - \frac{1.5}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{2}{t+2}dt =$$

$$= -0.5\ln|t-1| - 1.5\ln|t+1| - \frac{1}{t+1} + 2\ln|t+2| =$$

$$= -0.5\ln|\frac{\sqrt{x^2-x+1}-x-1}{x}| - 1.5\ln|\frac{\sqrt{x^2-x+1}+x-1}{x}| - \frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}+x-1} +$$

$$2\ln|\frac{\sqrt{x^2-x+1}+2x-1}{x}| + c$$

Příklad (Metoda substituční)

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x} =$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{t^2+1}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{1+t^2}{3+t^2}tdt = \frac{1}{3}\int \frac{2t}{3+t^2} + \frac{1}{t}dt$$

$$= \frac{1}{3}\ln|(3+t^2)t| = \frac{1}{3}\ln\left|(3+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2})\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c.$$

Příklad (Metoda substituční)

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x+1} =$$

$$\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$$

$$= \int \frac{(1-\cos^2 x).\sin x dx}{\cos^2 x+1} = -\int \frac{1-t^2}{1+t^2} dt = \int 1 - \frac{2}{t^2+1} dt = t - 2\,\mathrm{arctg}\, t =$$
$$= \cos x - 2\,\mathrm{arctg}(\cos x) + c.$$

Příklad (Metoda substituční)

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x+1}}dx =$$

$$\sqrt[4]{e^x+1} = t \Rightarrow e^x = t^4 - 1, x = \ln(t^4-1), dx = \frac{4t^3}{t^4-1}dt$$

$$= \int \frac{(t^4-1)^2}{t} \cdot \frac{4t^3}{t^4-1}dt = \int (t^4-1).4t^2 dt = 4\int t^6 - t^2 dt =$$
$$= 4\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^3}{3}\right) + c = 4\left(\frac{1}{7}(e^x+1)^{\frac{7}{4}} - \frac{1}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{4}}\right) + c$$

Příklad (Metoda substituční)

$$\int \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}dx =$$

$$\sqrt{x^2-1} = t + x \Rightarrow x^2 - 1 = t^2 + 2tx + x^2; x = \frac{-1-t^2}{2t}, dx = \frac{1-t^2}{2t^2}dt$$

$$= \int \frac{\frac{-1-t^2}{2t}+t+\frac{-1-t^2}{2t}}{\frac{-1-t^2}{2t}-\left(t+\frac{-1-t^2}{2t}\right)} \cdot \frac{1-t^2}{2t^2}dt = \int \frac{1-t^2}{2t^4}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^{-3}}{-3} - \frac{t^{-1}}{-1}\right) + c =$$

$$= -\frac{1}{6}\left(\sqrt{x^2-1} - x\right)^{-3} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-1} - x\right)^{-1} + c$$

Příklad (Metoda substituční)

$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt{x}} dx =$

$$x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt \Rightarrow t = \sqrt[6]{x}.$$

$$I = \int \frac{t^2}{t^6 + t^3} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^3 \cdot t^4}{t^3(t^3+1)} dt = 6 \int \frac{t^4}{t^3+1} dt =$$

$$t^4 : (t^3 + 1) = t - \frac{t}{t^3+1}$$

$$= 6 \int t - \frac{t}{t^3+1} dt = 6 \cdot \frac{t^2}{2} - 6 \int \frac{t}{t^3+1} dt = 3 \cdot t^2 - 6 \int \frac{t}{t^3+1} dt$$

Příklad (Metoda substituční, pokračování)

Potřebujeme určit $\int \frac{t}{t^3+1} dt$.

$$\frac{t}{t^3+1} = \frac{t}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1} = \frac{A(t^2-t+1)+(Bt+C)(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)},$$

potom

$$t = A(t^2-t+1)+(Bt+C)(t+1),$$

po dosazení za t *postupně* $-1, 0, 1$ *dostaneme*

$$A = -\frac{1}{3}, B = C = \frac{1}{3}.$$

Potom

$$\int \frac{t}{t^3+1} dt = \int \frac{-\frac{1}{3}}{t+1} + \frac{\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}}{t^2-t+1} dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\int \frac{1}{t+1} dt - \int \frac{t+1}{t^2-t+1} dt\right).$$

Určíme "modrý" a "červený" integrál a bude téměř hotovo.

Příklad (Metoda substituční, pokračování)

Potřebujeme určit $\int \frac{1}{t+1}dt$. *Toto je jednoduché:*

$$\int \frac{1}{t+1}dt = \ln|t+1| + c.$$

A ještě $\int \frac{t+1}{t^2-t+1}dt$. *Toto nebude úplně jednoduché. V čitateli se snažíme dostat derivaci jmenovatele:*

$$\int \frac{t+1}{t^2-t+1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t+2}{t^2-t+1}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t-1+3}{t^2-t+1}dt,$$

funkci rozdělíme na dva zlomky, dostaneme dva integrály

$$\frac{1}{2}\left(\int \frac{2t-1}{t^2-t+1}dt + \int \frac{3}{t^2-t+1}dt\right).$$

Příklad (Metoda substituční, pokračování)

Určíme $\int \frac{2t-1}{t^2-t+1}dt$ *a* $\int \frac{3}{t^2-t+1}dt$ *a pak se vrátíme postupně až k "zelenému" integrálu.*

$$\int \frac{2t-1}{t^2-t+1}dt = \ln(t^2-t+1)+c.$$

Proč není nutná abs. hodnota argumentu?

$$\int \frac{3}{t^2-t+1}dt = 3\int \frac{dt}{t^2-t+1} = 3\int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= 3\int \frac{dt}{\frac{3}{4}\cdot\left(\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1\right)} = 4\int \frac{dt}{\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1} =$$

$$\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = z \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}dt = dz \Rightarrow dt = \frac{\sqrt{3}}{2}dz.$$

Příklad (Metoda substituční, pokračování)

Potom

$$= 4\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dz}{z^2+1} = 2\cdot\sqrt{3}\int \frac{dz}{z^2+1} = 2\cdot\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\, z + c =$$

$$= 2\cdot\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + c = 2\cdot\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right) + c$$

Můžeme se vrátit k "červenému" integrálu:

$$\int \frac{t+1}{t^2-t+1}dt = \frac{1}{2}\left(\int \frac{2t-1}{t^2-t+1}dt + \int \frac{3}{t^2-t+1}dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(t^2-t+1) + 2\cdot\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2-t+1) + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right).$$

Příklad (Metoda substituční, pokračování)

A můžeme se vrátit k "zelenému" integrálu:

$$\int \frac{t}{t^3+1}dt = -\frac{1}{3}\left(\int \frac{1}{t+1}dt - \int \frac{t+1}{t^2-t+1}dt\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\ln|t+1| - \frac{1}{2}\ln(t^2-t+1) - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right) + c$$

Potom

$$I = 3\cdot t^2 - 6\int \frac{t}{t^3+1}dt =$$

$$= 3\cdot t^2 + 2\cdot\left(\ln|t+1| - \frac{1}{2}\ln(t^2-t+1) - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right) + c.$$

Zůstává vrátit substituci $t = \sqrt[6]{x}$.

$$I = 3\cdot\sqrt[3]{x} + 2\cdot\left(\ln|\sqrt[6]{x}+1| - \frac{1}{2}\ln(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x}+1) - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[6]{x}-\frac{1}{2}\right)\right) + c.$$