

NEVLASTNÝ INTEGRÁL

1. $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+x^2+2x+2} dx$

Riešenie. Najskôr upravíme menovateľ na súčin a potom integrand upravíme na parciálne zlomky:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+1)(x^2+2)} dx = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+2} dx = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+2} dx.$$

Skontrolujeme, že funkcia je na intervale $\langle 0, \infty \rangle$ ohraničená, neohraničenosť hrozí jedine v bode -1 a ten do tohto intervalu nepatrí, teda pokračujeme podľa definície nevlastného integrálu na neohraničenom intervale:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \int_0^t \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{x^2+2} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln(x^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{6} \arctan x\sqrt{2} \right]_0^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \ln|t+1| - \frac{1}{6} \ln(t^2+2) + \frac{\sqrt{2}}{6} \arctan t\sqrt{2} - \frac{1}{3} \ln|0+1| + \frac{1}{6} \ln(0^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{6} \arctan 0\sqrt{2} \right]. \end{aligned}$$

Zrejme $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \ln|t+1| = \infty$ aj $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \ln(t^2+2) = \infty$, teda tam máme limitu typu " $\infty - \infty$ " a s týmto sa vysporiadame tak, že použijeme vzťah pre rozdiel logaritmov a to nasledovne (zároveň zvládneme aj ďalšie jednoduché úpravy):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \sqrt[6]{\frac{(t+1)^2}{t^2+2}} + \frac{\sqrt{2}}{6} \arctan t\sqrt{2} - \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{6} \ln 2 - 0.$$

Limitu $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \sqrt[6]{\frac{(t+1)^2}{t^2+2}}$ počítame ako limitu zloženej funkcie, teda najskôr zistíme, že $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t+1)^2}{t^2+2} = 1$, potom aj $\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt[6]{\frac{(t+1)^2}{t^2+2}} = 1$ a teda $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln \sqrt[6]{\frac{(t+1)^2}{t^2+2}} = 0$. Potom

$$I = 0 + \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{6} \ln 2 - 0 = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{6} \ln 2.$$

To, že limita typu " $\infty - \infty$ " nemusí vyjsť vždy 0 a teda úprava na "spoločný logaritmus" je potrebná, budeme vidieť v nasledujúcich dvoch úlohách.

$$2. \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x+3} \right] dx$$

Riešenie. Skontrolujeme, že funkcia je na intervale $\langle 0, \infty \rangle$ ohraničená, neohraničenosť hrozí jedine v bodoch -2 a $-\frac{3}{2}$ a tie do tohto intervalu nepatria, teda pokračujeme podľa definície nevlastného integrálu na neohraničenom intervale:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \left[\frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x+3} \right] dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} [\ln|x+2| - \ln|2x+3|]_0^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln(t+2) - \ln(2t+3) - \ln 2 + \ln 3) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{t+2}{2t+3} - \ln 2 + \ln 3 \right) = \\ &= \ln \frac{1}{2} - \ln 2 + \ln 3 = \ln \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$3. \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x^2+3} \right] dx.$$

Riešenie. Postupujeme podobne ako v predchádzajúcich dvoch úlohách

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \left[\frac{1}{x+2} - \frac{2}{2x^2+3} \right] dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\ln|x+2| - \frac{1}{2} \ln|2x^2+3| \right]_0^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\ln(t+2) - \frac{1}{2} \ln(2t^2+3) - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3 \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{t+2}{\sqrt{2t^2+3}} - \ln 2 + \ln \frac{1}{2} 3 \right) = \\ &= \ln \frac{1}{\sqrt{2}} - \ln 2 + \ln \sqrt{3} = \ln \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$4. \int_1^{\infty} \frac{x^3-1}{x^4} dx.$$

Riešenie. Na intervale $\langle 1, \infty \rangle$ nie je integrant nespojitý (ani neohraničený), teda nemusíme interval rozdeliť, postupujeme podľa definície nevlastného integrálu na neohraničenom intervale:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{x^3-1}{x^4} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^4} \right) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\ln|x| - \frac{x^{-3}}{-3} \right]_1^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\ln t - \frac{-t^3}{-3} - \ln 1 + \frac{1}{-3} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\ln t + \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{3} \right) = \infty. \end{aligned}$$

$$5. \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx.$$

Riešenie. Znovu je situácia na intervale $\langle 0, \infty \rangle$ taká, že integrand nie je nespojitý (ani neohraničený), teda postupujeme podľa definície nevlastného integrálu na neohraničenom intervale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{\frac{(e^x)^2 + 1}{e^x}} dx =$$

Ďalej pokračujeme metódou substitúcie:

$$e^x = z, x = 0 \Rightarrow z = 1, x = t \Rightarrow z = e^t$$

$$e^x dx = dz.$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^{e^t} \frac{dz}{z^2 + 1} = \lim_{t \rightarrow \infty} [\arctan z]_1^{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} [\arctan e^t - \arctan 1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

$$6. \int_e^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \sqrt{\ln x}} dx.$$

Riešenie. Aj v tomto prípade je na intervale $\langle e, \infty \rangle$ integrand spojitý (teda ohraničený), preto postupujeme podľa definície nevlastného integrálu na neohraničenom intervale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_e^t \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \sqrt{\ln x}} dx$$

Ďalej pokračujeme metódou substitúcie:

$$\ln x = z^2, x = e \Rightarrow z = 1, x = t \Rightarrow z = \sqrt{\ln t}$$

$$\frac{1}{x} dx = 2z dz.$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^{\sqrt{\ln t}} \frac{2z dz}{z^2 \cdot z} = 2 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^{\sqrt{\ln t}} \frac{dz}{z^2} = 2 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{z} \right]_1^{\sqrt{\ln t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{-2}{\sqrt{\ln t}} - \frac{-2}{1} \right] = 2.$$

$$7. \int_1^5 \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} dx.$$

Riešenie. Integrant je nespojitý v bode 2, teda postupujeme podľa definície nevlastného integrálu pre neohraničenú funkciu:

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} \int_1^t \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} dx + \lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^5 \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} dx.$$

Ďalej pokračujeme metódou substitúcie:

$$x - 2 = z^3, x = 1 \Rightarrow z = -1, x = 5 \Rightarrow z = \sqrt[3]{3}, x = t \Rightarrow z = \sqrt[3]{t-2}$$

$$dx = 3z^2 dz.$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_{-1}^{\sqrt[3]{t-2}} \frac{3z^2}{z} dz + \lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^{\sqrt[3]{3}} \frac{3z^2}{z} dz = \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_{-1}^{\sqrt[3]{t-2}} 3z dz + \lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^{\sqrt[3]{3}} 3z dz = \\ &= \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[\frac{3z^2}{2} \right]_{-1}^{\sqrt[3]{t-2}} + \lim_{t \rightarrow 2^+} \left[\frac{3z^2}{2} \right]_{\sqrt[3]{t-2}}^{\sqrt[3]{3}} = \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[\frac{3(\sqrt[3]{t-2})^2}{2} - \frac{3}{2} \right] + \lim_{t \rightarrow 2^+} \left[\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{9} - \frac{3(\sqrt[3]{t-2})^2}{2} \right] = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{9} - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Schválne skúste neohraničenosť integrantu odignorovať a integrál počítať bez rozdelenia intervalu. Výsledky porovnajte a zamyslite sa nad nimi.

$$8. \text{ Určte konštantu } a \text{ tak, aby } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \text{ ak } f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & x \in \langle 1, e \rangle \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Riešenie. Zrejme

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^1 0 dx + \int_1^e \frac{a}{x} dx + \int_e^{\infty} 0 dx = \int_1^e \frac{a}{x} dx = a \cdot \int_1^e \frac{1}{x} dx = \\ &= a \cdot [\ln |x|]_1^e = a \cdot (\ln e - \ln 1) = a \Rightarrow a = 1. \end{aligned}$$

$$9. \text{ Určte konštantu } a \text{ tak, aby } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \text{ ak}$$

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos x & x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Riešenie. Zrejme

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0 dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cdot \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} 0 dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \cdot \cos x dx = a \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \\ &= a \cdot [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a \cdot \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin -\frac{\pi}{2} \right) = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

10. Určte konštantu a tak, aby $\int_a^\infty f(x)dx = 1$, ak $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Riešenie. Zrejme

$$\begin{aligned}\int_a^\infty f(x)dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [-x^{-1}]_a^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (-t^{-1} - (-a^{-1})) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a} \Rightarrow a = 1.\end{aligned}$$