

1. Úloha z prednášky-17.3.2020

Náčrtněte graf funkce f , pro kterou platí:

$D_f = \mathbb{R}$, v $x = 2$ má nespojitost 2. druhu, přičemž je zde spojitá zleva, funkce je lichá;

$$f(2) = 0, f(3) = 1, f(4) = 2, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1;$$

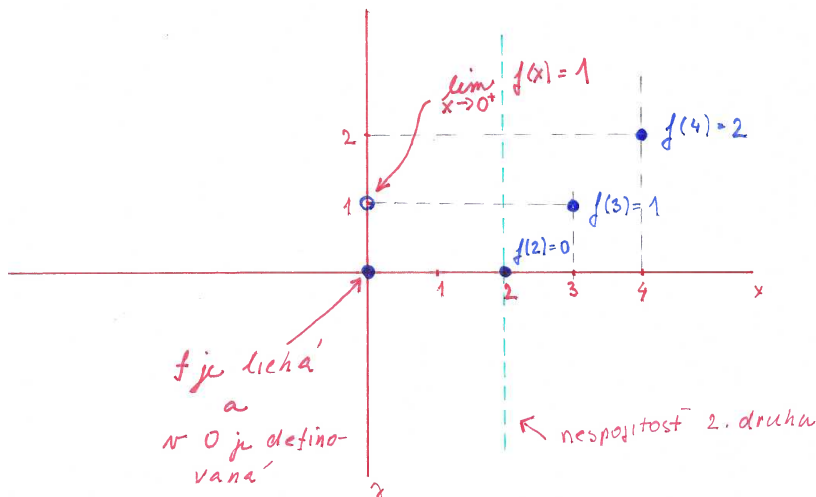
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = \infty, f'(4) = 0;$$

$f''(x) > 0$ pro $x \in (2, 3)$ a pro $x \in (4, \infty)$, $f''(x) < 0$ pro $x \in (0, 2)$ a pro $x \in (3, 4)$;

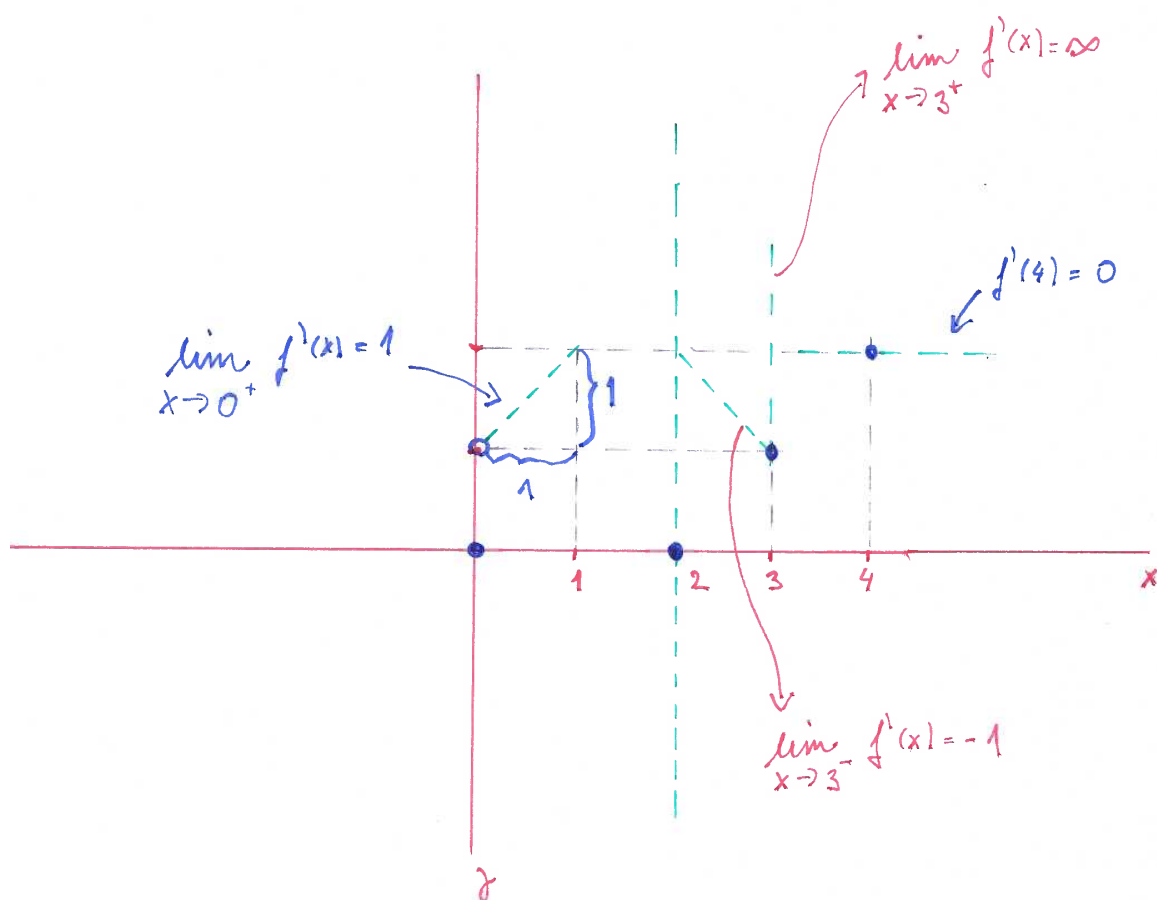
pro $x \rightarrow \infty$ má asymptotu $y = x - 5$.

Do obrázku zakreslete asymptoty a tečny, resp. polotečny v bodech, kde je známa derivace.

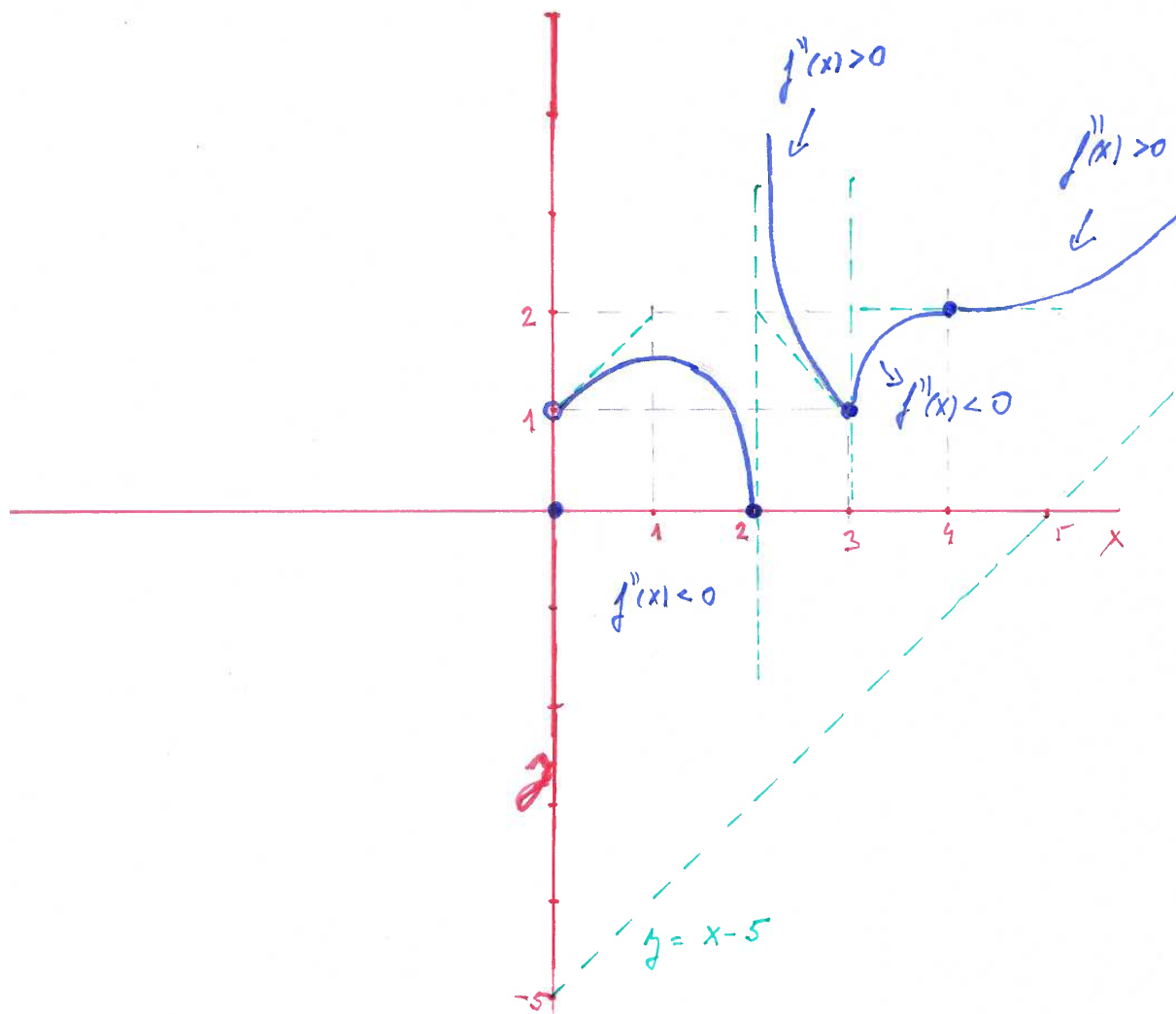
Riešenie. Túto úlohu som postupne rozkreslila, aby bol zrejmy postup. Na prvom obrázku vidíme len zaznačené funkčné hodnoty vo vybraných bodoch, teda $f(2) = 0, f(3) = 1, f(4) = 2$, ďalej zvislú asymptotu v bode 2, kde má byť nespojitost druhého typu a je tam vyznačená funkčná hodnota v bode 0, ktorá síce nebola zadaná, ale vzhľadom k tomu, že f je lichá a je definovaná aj pre $x = 0$, musí byť $f(0) = 0$, toto si premyslite. Ďalej je tam prázdny puntík v bode $(0, 1)$, lebo $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$. Plný nemôže byť, lebo plný je už v $(0, 0)$, kreslíme funkciu, na to nesmieme zaabudnúť.



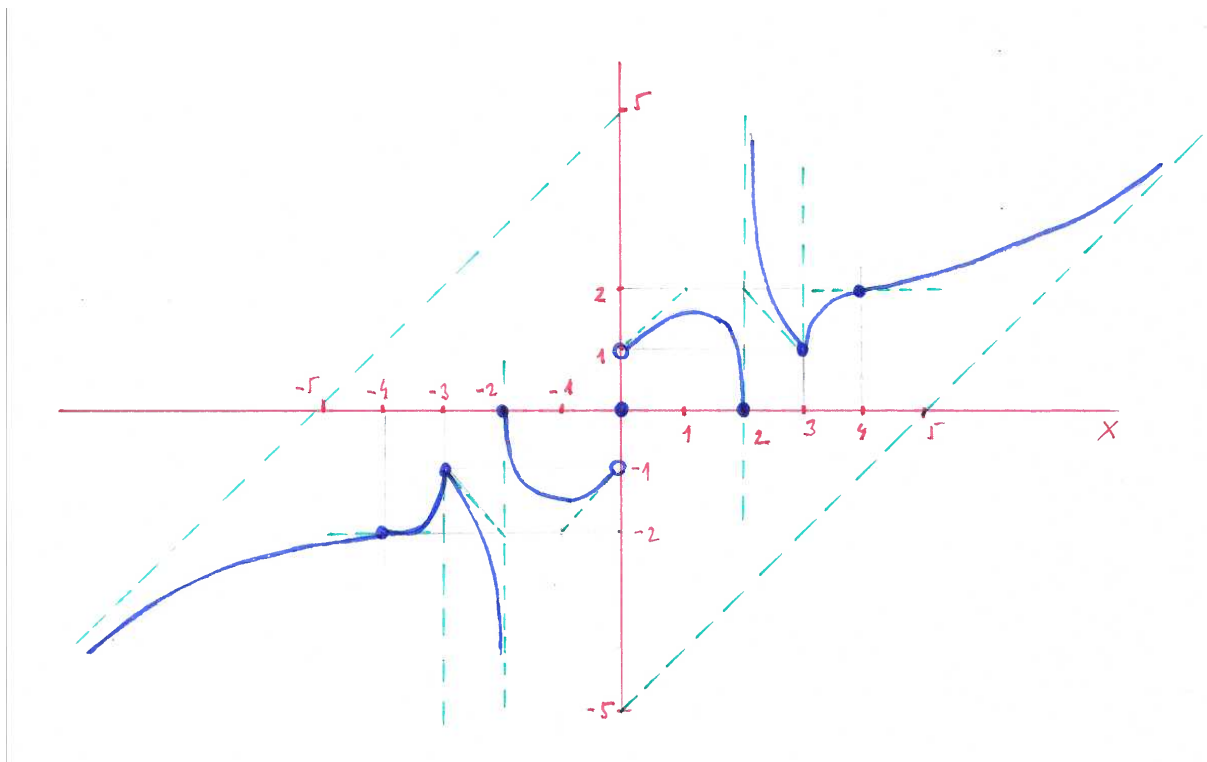
Na ďalšom obrázku máme zaznačené všetky tečny a polotečny. Teda kreslíme úsečky, ktoré prechádzajú vybranými bodmi a majú smernicu takú, aká je derivácia v príslušnom bode. Napr. $f'(4) = 0$. Vieme, že $f(4) = 2$, takže bodom $(4, f(4))$ vedieme úsečku, ktorá má smernicu 0, teda je rovnobežná s osou x .



Na nasledujúcom obrázku už máme takmer výsledok. Pridali sme asymptotu v ∞ a podľa znamienka druhej derivácie sme kreslili buď konvexnú alebo konkávnu časť funkcie. Ešte treba myslieť na to, že f je v bode 2 zľava spojitá. Tečny a polotečny z predchádzajúceho obrázku nám poslúžili ako "mantinely".



A v poslednom obrázku sme len, vzhľadom na lichosť funkcie, dokreslili zvyšnú časť grafu:



V nasledujúcich úlohách máte hneď po zadaní výsledok. Doporučujem najskôr samostatne graf nakresliť a potom porovnať.

2. Úloha z přednášky-17.3.2020

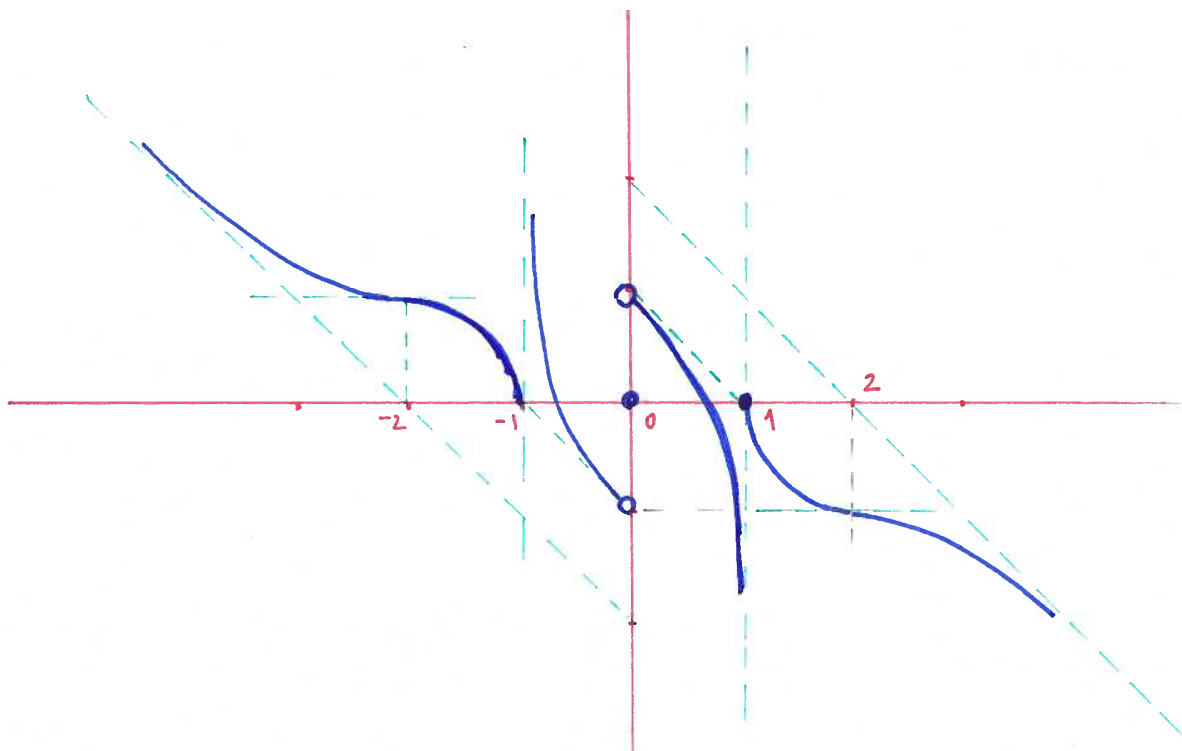
Náčtrněte graf funkce f , pro kterou platí:

$D_f = \mathbb{R}$, f je lichá, v $x = 0$ má nespojitost 1. druhu, v $x = 1$ má nespojitost 2. druhu, přičemž je zde spojitá zprava.

$$f(1) = 0, f(2) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -\infty, f'(2) = 0. f''(x) >$$

0 pro $x \in (1, 2)$, $f''(x) < 0$ pro $x \in (0, 1)$ a pro $x \in (2, \infty)$, pro $x \rightarrow \infty$ má asymptotu $y = 2 - x$. Do obrázku zakreslete asymptoty a tečny, resp. polotečny v bodech, kde je známa derivace.



3. Načtrňte graf funkce f , pro kterou platí:

$D_f = \mathbb{R}$, f v bodě $x = 1$, má nespojitost 2. druhu, přičemž je zde spojitá zleva.

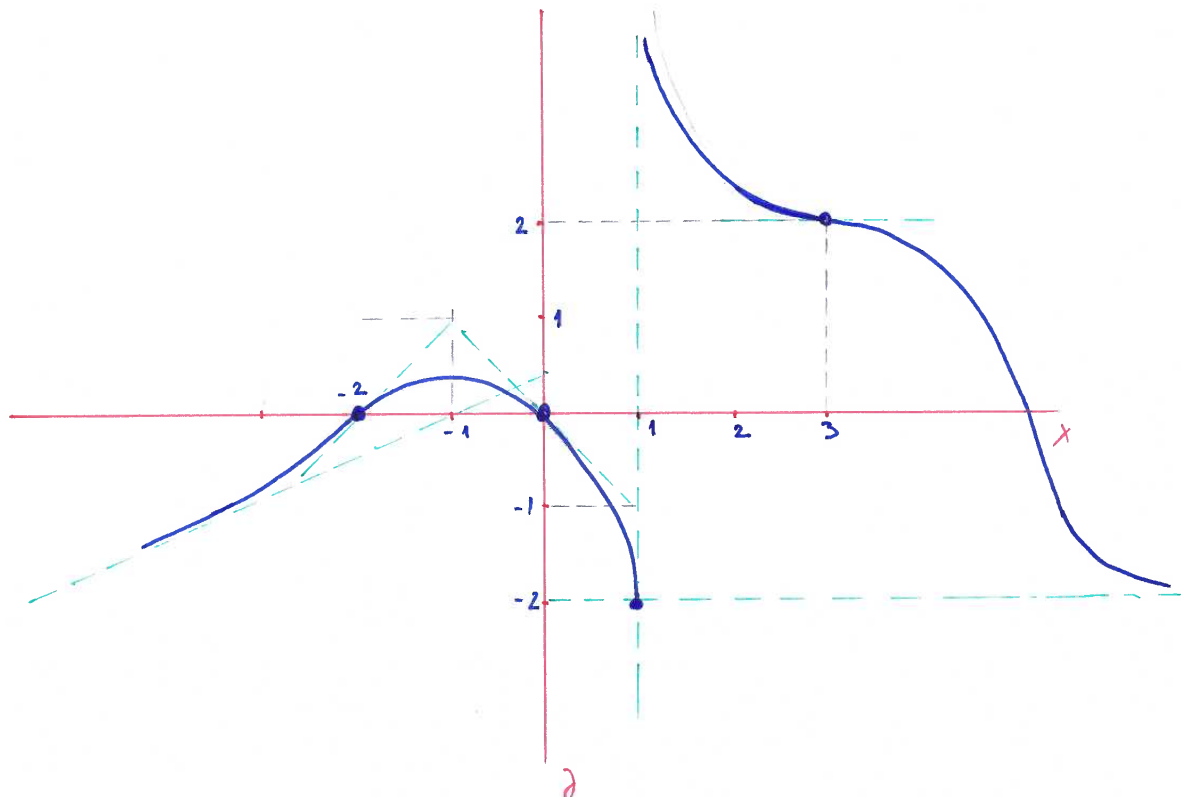
$$f(3) = 2, f(1) = -2, f(0) = f(-2) = 0, f'(0) = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty, f'(x) \leq 0 \text{ pro } x \in (1, \infty).$$

$x = -2$ a $x = 3$ jsou inflexní body, přičemž $f'(-2) = 1$, $f'(3) = 0$.

Přímka $y = -2$ je její asymptota pro $x \rightarrow \infty$, přímka $y = \frac{1}{2}(1+x)$ je asymptota pro $x \rightarrow -\infty$.

Do obrázku zakreslete asymptoty a tečny, resp. polotečny v bodech, kde je známa derivace.



4. Načtrněte graf funkce f , pro kterou platí:

$D_f = \mathbb{R}$, f v bodě $x = 1$, má nespojitost 2. druhu, přičemž je zde spojitá zleva.

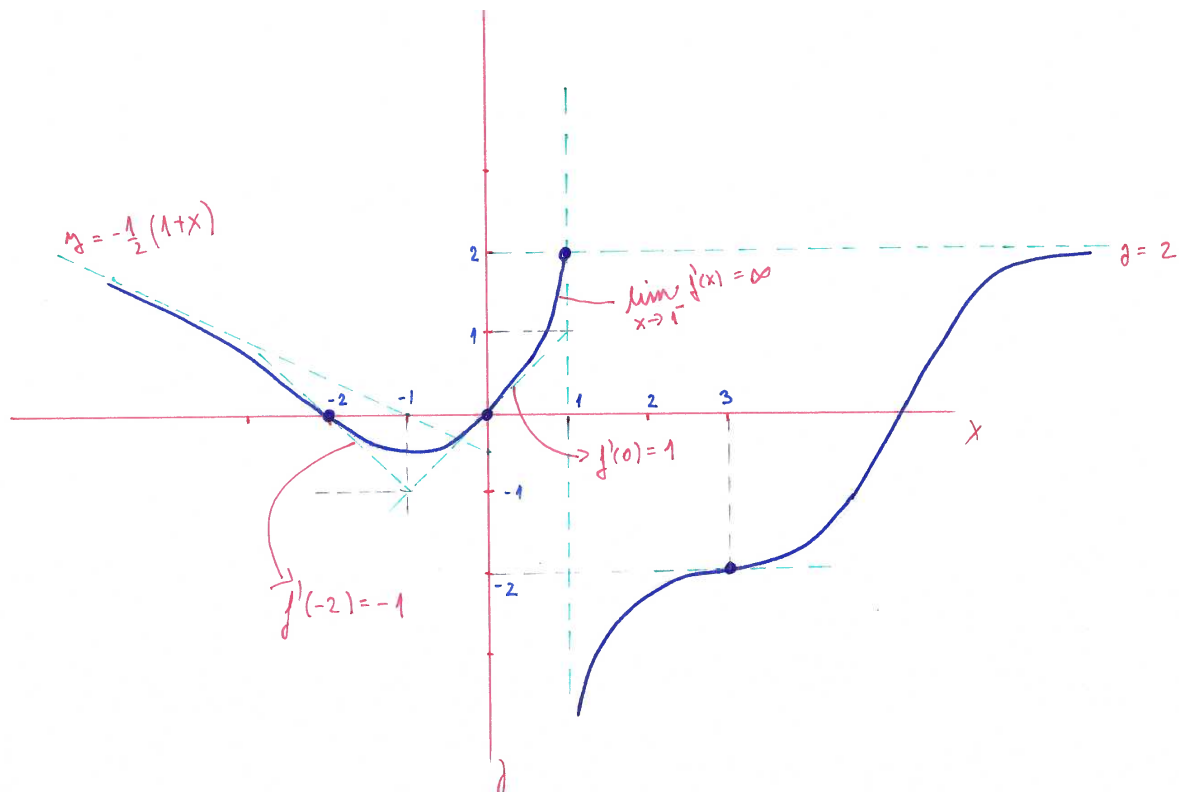
$$f(3) = -2, f(1) = 2, f(0) = f(-2) = 0, f'(0) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \infty, f'(x) \geq 0 \text{ pro } x \in (1, \infty).$$

$$x = -2 \text{ a } x = 3 \text{ jsou infl. body, přičemž } f'(-2) = -1, f'(3) = 0.$$

Přímka $y = 2$ je její asymptota pro $x \rightarrow \infty$, přímka $y = -\frac{1}{2}(1+x)$ je asymptota pro $x \rightarrow -\infty$.

Do obrázku zakreslete asymptoty a tečny, resp. polotečny v bodech, kde je známa derivace.



5. Načtněte graf funkce f , pro kterou platí:

Funkce f je spojitá na $\mathbb{R} - \{1\}$.

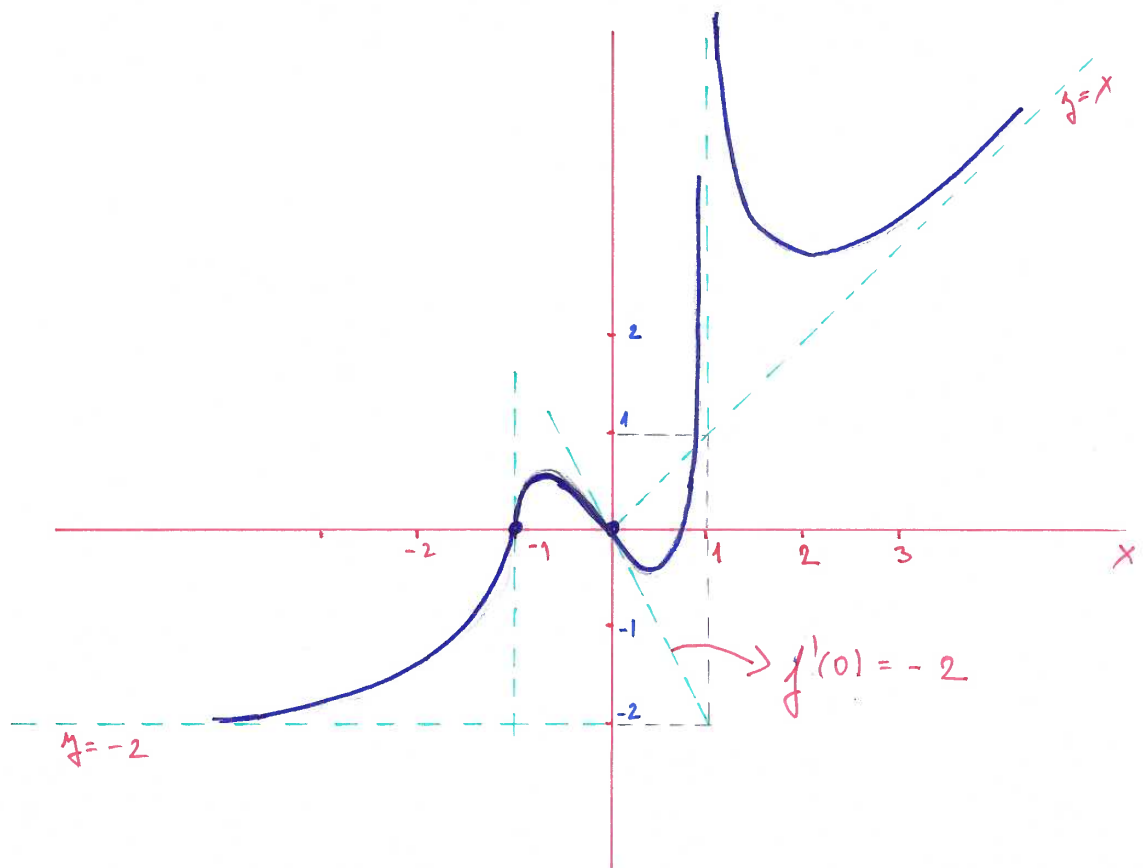
$$f(0) = f(-1) = 0, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2.$$

$$f'(0) = -2, \lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \infty,$$

$f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -1), x \in (0, 1)$ a $x \in (1, \infty)$, $f''(x) < 0$ pro $x \in (-1, 0)$.

Přímka $y = x$ je její asymptota pro $x \rightarrow \infty$.

Do obrázku zakreslete asymptoty a tečny, resp. polotečny v bodech, kde je známa derivace.



6. Úloha z prednášky-17.3.2020
 Vyšetrite priebeh funkcie

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}.$$

Riešenie.

- Def. obor je \mathbb{R} . V menovateli nehrozí nula a pod odmocninou tiež žiadne záporné číslo nebude, lebo $x^4 + 1 \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Funkcia je lichá (nepárna):

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{\sqrt{(-x)^4 + 1}} = \frac{-x^3}{\sqrt{x^4 + 1}} = -f(x).$$

- Monotónnosť.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2 \cdot \sqrt{x^4 + 1} - x^3 \frac{1}{2}(x^4 + 1)^{-\frac{1}{2}}(4x^3)}{x^4 + 1} = \\ &= \frac{3x^2 \cdot \sqrt{x^4 + 1} - \frac{2x^6}{\sqrt{x^4 + 1}}}{x^4 + 1} = \frac{\frac{3x^2(x^4 + 1) - 2x^6}{\sqrt{x^4 + 1}}}{x^4 + 1} = \frac{3x^6 + 3x^2 - 2x^6}{(x^4 + 1)\sqrt{x^4 + 1}}. \end{aligned}$$

Teda po úprave

$$f'(x) = \frac{x^2 \cdot (x^4 + 3)}{\sqrt{(x^4 + 1)^3}}.$$

Zrejme

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ a } f'(x) = 0 \iff x = 0.$$

Preto funkcia f je rastúca $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Konvexnosť a konkávnosť.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(6x^5 + 6x) \cdot (x^4 + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^4 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 4x^3 \cdot (x^6 + 3x^2)}{(x^4 + 1)^3} = \\ &= \frac{6x(x^4 + 1)(x^4 + 1)^{\frac{3}{2}} - x^2(x^4 + 3)6x^3(x^4 + 1)^{\frac{1}{2}}}{(x^4 + 1)^3} = \\ &= \frac{6x(x^4 + 1)^{\frac{1}{2}} [(x^4 + 1)^2 - x^4(x^4 + 3)]}{(x^4 + 1)^3} = \frac{6x(x^4 + 1)^{\frac{1}{2}} [x^8 + 2x^4 + 1 - x^8 - 3x^4]}{(x^4 + 1)^3}. \end{aligned}$$

Posledná úprava:

$$f''(x) = \frac{6x(1 - x^4)\sqrt{x^4 + 1}}{(x^4 + 1)^3}.$$

Zrejme

$$f''(x) = 0 \iff x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1.$$

Na znamienko druhej derivácie majú vplyv len výrazy x a $1 - x^4$. Teda druhá derivácia je záporná na intervaloch $(-1, 0)$, $(1, \infty)$ a preto f je na týchto intervaloch konkávna. Na intervaloch $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$ je druhá derivácia kladná, teda funkcia f je tam konvexná. Všimnite si, že zmena konvexnosti na konkávnosť (a naopak) nastáva v bodoch $-1, 0, 1$, preto sú to inflexné body.

- Asymptoty.

Funkcia nemá zvislé asymptoty, lebo nemá body nespojitosti (pozri def. obor).

Ak existuje šikmá asymptota v nekonečne, tak platí

$$y = ax + b; a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax.$$

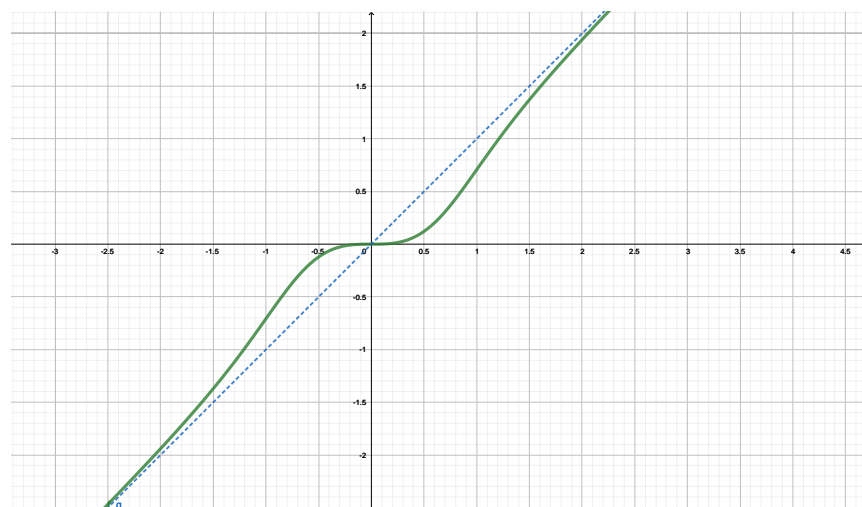
Podobne by sme zisťovali asymptotu v $-\infty$, ale funkcia f je lichá, tak nám stačí informácia pre $+\infty$. Teda

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x \cdot \sqrt{x^4 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x \cdot \sqrt{x^4(1 + \frac{1}{x^4})}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}} = 1$$

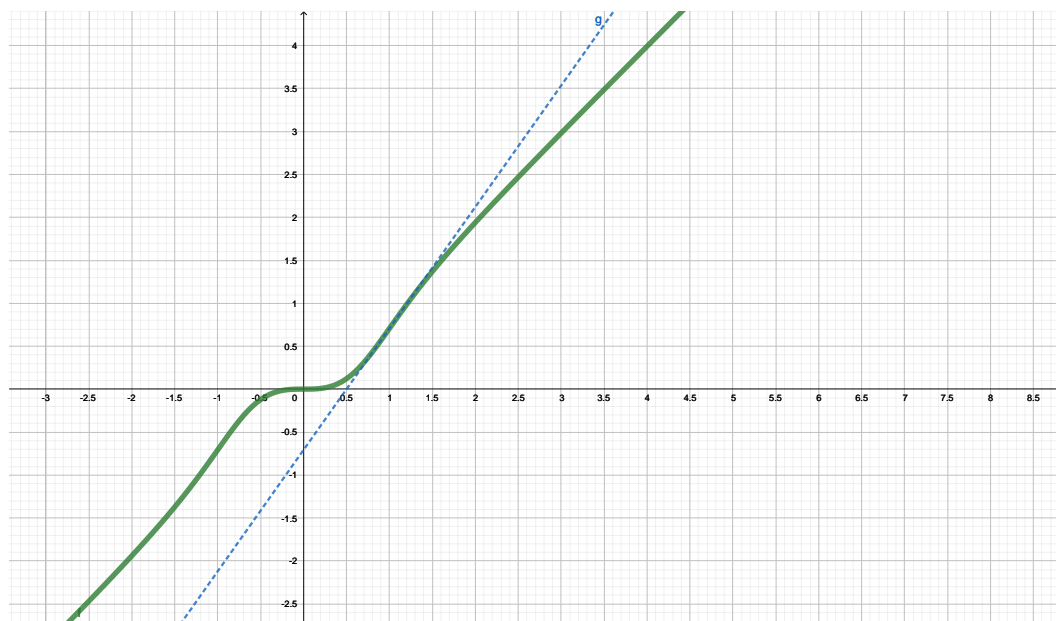
$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}} - 1 \cdot x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x \cdot \sqrt{x^4 + 1}}{\sqrt{x^4 + 1}} \cdot \frac{x^3 + x \cdot \sqrt{x^4 + 1}}{x^3 + x \cdot \sqrt{x^4 + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - x^2(\sqrt{x^4 + 1})^2}{\sqrt{x^4 + 1} \cdot (x^3 + x \cdot \sqrt{x^4 + 1})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{\sqrt{x^4 + 1} \cdot (x^3 + x \cdot \sqrt{x^4 + 1})} = 0 \end{aligned}$$

Asymptota má predpis $y = x$, vďaka tomu, že f je lichá, bude spoločná aj pre $-\infty$ (toto si premyslite).

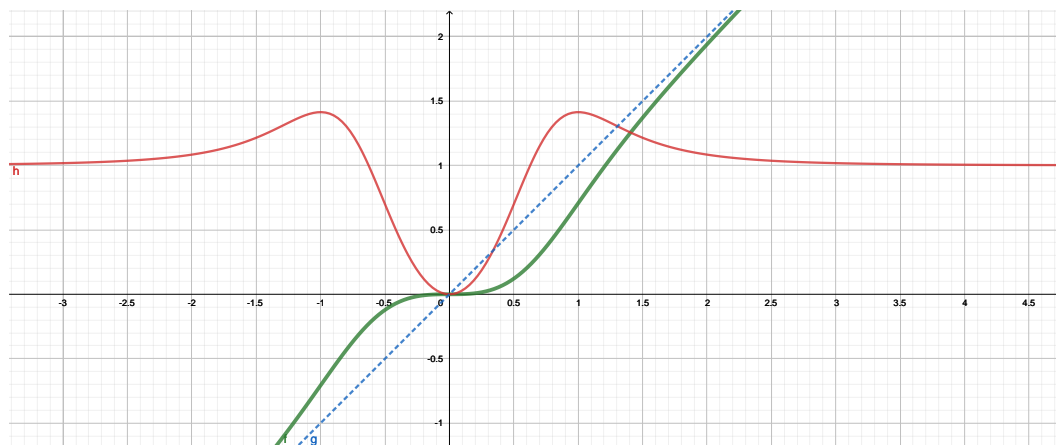
- Graf funkcie, aj s asymptotou je:



- Detail inflexného bodu 1, aj s dotyčnicou je na nasledujúcom obrázku. Všimnite si, že konvexná časť funkcie je nad dotyčnicou a konkávna pod dotyčnicou.



- Na nasledujúcom obrázku je zelenou farbou nakreslená funkcia f a červenou farbou jej prvá derivácia:



- Na poslednom obrázku je okrem funkcie f , jej prvej derivácie aj druhá derivácia (oranžová farba):

