Diferenciální počet, pokračování

Příklad (Limita funkce-L'Hospitalovo pravidlo)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-5}{2x-3}=\frac{2.2-5}{2.2-3}=-1$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x-1)}=\frac{x-3}{x-1}=-1$$

Příklad

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}}=1$$

Příklad

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}(-1)}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{1+1}{1}=2$$

Příklad (Limita funkce-L'Hospitalovo pravidlo)

$$\lim_{x\to\infty}(2x)^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x}\cdot\ln 2x} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x}\ln 2x = -\lim_{x\to\infty}\frac{\ln 2x}{x} = -\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2x}\cdot 2}{1} = -\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Příklad

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln x} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Příklad (Derivace funkce, diferenciál)

Porovnejte velikost přírustku funkce $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ *s jejím diferenciálem v bodě* $x = 2$, *zvětší li se* x *o* 0.01.

Řešení:

$$\delta y = f(x + \delta x) - f(x) =$$

$$= (2 \cdot 2.01^3 + 3 \cdot 2.01^2 + 4 \cdot 2.01 + 5) - (2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2.^2 + 4 \cdot 2 + 5) =$$

$$= 0.401502$$

$$dy = f'(x) \cdot dx = (6 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 4) \cdot dx = (6 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 4) \cdot 0.01 = 0.40$$

Zkuste x *zvětšit např. o* 0.00001 *a zamyslete se nad výsledkem.*

Příklad (Lokální extrémy)

Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x) = x + 3 \cdot \sqrt[3]{(1-x)^2}$$

Příklad (Lokální extrémy)

Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x) = x + 3 \cdot \sqrt[3]{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{1-x} - 2}{\sqrt[3]{1-x}}$$

Příklad (Lokální extrémy-pokr.)

$$f'(x) = 0 \iff \sqrt[3]{1-x} - 2 = 0 \iff x = -7$$

Příklad (Lokální extrémy-pokr.)

$$f'(x) = 0 \iff \sqrt[3]{1-x} - 2 = 0 \iff x = -7$$

$$f'(x) \text{ neexistuje} \iff \sqrt[3]{1-x} = 0 \iff x = 1$$

Příklad (Lokální extrémy-pokr.)

$$f(x) \text{ roste } \iff x \in (-\infty, -7); (1, \infty)$$

$$f(x) \text{ klesá } \iff x \in (-7, 1)$$

Příklad (Lokální extrémy-pokr.)

$$f(x) \textit{ roste } \iff x \in (-\infty, -7); (1, \infty)$$

$$f(x) \textit{ klesá } \iff x \in (-7, 1)$$

$$f(x) \textit{ má lokální maximum v bodě } -7$$

$$f(x) \textit{ má lokální minimum v bodě } 1$$

Příklad (Extrémy na uzav. intervalu)

Najděte maximum a minimum funkce $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ *na intervalu* $\langle -2, 2\rangle$.

Příklad (Extrémy na uzav. intervalu)

Najděte maximum a minimum funkce $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ *na intervalu* $\langle -2, 2 \rangle$.

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x-3)(x-1)$$

Příklad (Extrémy na uzav. intervalu-pokr.)

Zajímavé body: $-2, 0, 1, 2$

Příklad (Extrémy na uzav. intervalu-pokr.)

Zajímavé body: $-2, 0, 1, 2$

Proč nás nezajímá bod 3 ?

Příklad (Extrémy na uzav. intervalu-pokr.)

$$f(-2) = -151, f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = -7$$

Příklad (Extrémy na uzav. intervalu-pokr.)

$$f(-2) = -151, f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = -7$$

$$\max = 2, \quad \min = -151$$

Byla hodnota v 0 důležitá?

Příklad (Optimalizační úlohy)

Kartón tvaru obdélnika má rozměry $60cm \times 28cm$. *V rozích nastřihneme čtverce a zbytek ohneme do otevřené krabice. Jak velká má být strana čtverce, aby objem krabice byl největší?*

Příklad (Optimalizační úlohy)

Kartón tvaru obdélnika má rozměry $60cm \times 28cm$. *V rozích nastřihneme čtverce a zbytek ohneme do otevřené krabice. Jak velká má být strana čtverce, aby objem krabice byl největší?*

$$V = (60 - 2a)(28 - 2a)a = 4 \cdot (a^3 - 44a^2 + 420a)$$

$$0 < a < 14$$

Hledáme bod, ve kterém má funkce $V_* = a^3 - 44a^2 + 420a$ *maximum.*

Příklad (Optimalizační úlohy, pokr.)

$$V_*' = 3a^2 - 88a + 420$$

$$V_*' = 0 \iff a = \frac{70}{3} \vee a = 6$$

Příklad (Optimalizační úlohy, pokr.)

$$V'_* = 3a^2 - 88a + 420$$

$$V'_* = 0 \iff a = \frac{70}{3} \vee a = 6$$

Maximum je v bodě 6 *a jeho hodnota je*

$$V = 4 \cdot (6^3 - 44.6^2 + 420.6) = 4608.$$

To, že se jedná o maximum, to jsme na přednášce ověřili.

Příklad (Optimalizace)

Kus drátu délky a máme rozdělit na dvě části, ze kterých se první ohne do tvaru čtverce a druhá do tvaru kruhu. Kde máme udělat řez, aby součet obsahu čtverce a obsahu kruhu byl nejmenší?

Řešení. *Označme si délku první části drátu x , druhá část má délku $a-x$. Z části délky x vyrobíme čtverec (délku jeho strany označíme b) a ze zbytku kruh (poloměr označme r). Potom:*

$$x = 4b \wedge a - x = 2\pi r \Rightarrow b = \frac{x}{4} \wedge r = \frac{a-x}{2\pi}.$$

Pro obsahy čtverce a kruhu dostaneme:

$$s_1 = \frac{x^2}{16} \wedge s_2 = \frac{(a-x)^2}{4\pi}.$$

Účelová funkce je

$$U(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(a-x)^2}{4\pi} \wedge x \in (0, a).$$

Příklad (Optimalizace, pokr.)

Hledáme minimum této funkce:

$$U'(x) = \frac{2x}{16} + \frac{2(a-x)(-1)}{4\pi} = \frac{2x\pi - 8(a-x)}{16\pi}.$$

Minimum je v bodě, kde je $U'(x) = 0$ *nebo, kde* $U'(x)$ *neexistuje. Derivace naší funkce existuje pro každé reálné číslo, proto nás zajímá jenom případ* $U'(x) = 0$*.*

$$U'(x) = 0 \iff 2x\pi - 8(a-x) = 0 \iff x = \frac{4a}{\pi+4}.$$

Na přednášce bylo ukázáno, že $x = \frac{4a}{\pi+4} \in (0, a)$ *a byl vysvětlen postup na ověření toho, že se jedná o minimum. Ověřte si to!*

Příklad (Průběh funkce)

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

Příklad (Průběh funkce)

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$$

Def. obor je R, funkce je lichá:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{\sqrt{(-x)^4+1}} = \frac{-x^3}{\sqrt{x^4+1}} - f(x)$$

Příklad (Průběh funkce, pokr.)

$$f'(x) = \frac{3x^2.\sqrt{x^4+1} - x^3\frac{1}{2}(x^4+1)^{-\frac{1}{2}}(4x^3)}{x^4+1} =$$

Po úpravě

$$= \frac{x^2 \cdot (x^4+3)}{\sqrt{(x^4+1)^3}}$$

Příklad (Průběh funkce, pokr.)

$$f'(x) = \frac{3x^2.\sqrt{x^4+1} - x^3\frac{1}{2}(x^4+1)^{-\frac{1}{2}}(4x^3)}{x^4+1} =$$

Po úpravě

$$= \frac{x^2 \cdot (x^4+3)}{\sqrt{(x^4+1)^3}}$$

- $$\text{\textit{Zřejmě} } f'(x) \geq 0, \forall x \in R.$$
- $$f'(x) = 0 \iff x = 0$$
- $$\text{\textit{Funkce} } f(x) \text{ \textit{je rostoucí,} } \forall x \in R.$$

Příklad (Průběh funkce, pokr.)

$$f''(x) = \frac{(6x^5 + 6x).(x^4 + 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^4 + 1)^{\frac{1}{2}}.4x^3.(x^6 + 3x^2)}{(x^4 + 1)^3} =$$

Upravíme:

$$= \frac{6x(1 - x^4)\sqrt{x^4 + 1}}{(x^4 + 1)^3}$$

Příklad (Průběh funkce, pokr.)

$$f''(x) = \frac{(6x^5+6x).(x^4+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^4+1)^{\frac{1}{2}}.4x^3.(x^6+3x^2)}{(x^4+1)^3} =$$

Upravíme:

$$= \frac{6x(1-x^4)\sqrt{x^4+1}}{(x^4+1)^3}$$

- $$\textit{Zřejmě } f''(x) = 0 \iff x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1.$$
- $$\textit{Body inflexe } : -1, 0, 1$$
- $$\textit{Konk. oblast} : (-1,0), (1,\infty)$$
- $$\textit{Konv. oblast} : (-\infty,-1), (0,1)$$

Příklad (Průběh funkce, pokr.)

Šikmá asymptota: ...

$y = ax + b; a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}; b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - ax.$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x.\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x.\sqrt{x^4(1+\frac{1}{x^4})}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} - 1.x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x.\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x^4+1}} \cdot \frac{x^3 + x.\sqrt{x^4+1}}{x^3 + x.\sqrt{x^4+1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^6 - x^2(\sqrt{x^4+1})^2}{\sqrt{x^4+1}\cdot(x^3 + x.\sqrt{x^4+1})} -$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{\sqrt{x^4+1}\cdot(x^3 + x.\sqrt{x^4+1})} = 0$$

Asymptota: $y = x$ *je společná pro* $\pm\infty$