Diferenciální počet, příklady

January 11, 2016

Příklad (Derivace funkce, tečna)

Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = x^2$ *v jejím bodě* $A = [2, ?]$.

Řešení (Derivace funkce, tečna)

Určíme y*-ovou souřadnici bodu* A*, teda* $A = [2, 2^2] = [2, 4]$*. Má platit* $A \in t$*, kde* t *je tečna (její rovnice je* $y = kx + q$*). Proto* $4 = 2k + q$*. Dále víme, že parabola má mít právě jeden společný bod s tečnou a teda:*

$$x^2 = kx + q \Rightarrow x^2 - kx - q = 0 \wedge D = 0.$$

Potom $D = k^2 + 4q = 0$*. Máme soustavu:*

$$4 = 2k + q \wedge k^2 + 4q = 0.$$

Řešením je

$$k = 4 \wedge q = -4.$$

proto rovnice tečny je $y = 4x - 4$*.*

Řešení (Derivace funkce, tečna-pokr.)

Úloha se dala řešit pomocí derivace. Víme, že derivace v bodě je směrnice tečny v daném bodě, proto

$$f'(x) = 2x \implies f'(2) = 4$$

Pro rovnici tečny platí

$$y - y_0 = k.(x - x_0)$$

a

$$x_0 = 2, y_0 = 4, k = f'(x_0) = 4,$$

proto rovnice tečny je

$$y - 4 = 4(x - 2) \iff y = 4x - 4.$$

Příklad (Derivace funkce, tečna, normála)

Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \ln(x+1)$ *v jejím bodě* $A = [0, ?]$.

Řešení (Derivace funkce, tečna, normála)

Víme, že derivace v bodě je směrnice tečny v daném bodě, proto

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \implies f'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$$

Pro rovnici tečny platí

$$y - y_0 = k.(x - x_0)$$

a

$$x_0 = 0, y_0 = \ln(0+1) = \ln 1 = 0, k = f'(x_0) = 1,$$

proto rovnice tečny je

$$y - 0 = 1(x - 0) \iff y = x.$$

Rovnici normály v tomto případě zřejmě nemusíme dlouho zjišťovat

$$y = -x.$$

Příklad (Derivace funkce, tečna, normála)

Najděte rovnici tečny k parabole $y = x^2 - 2x + 3$, *která je rovnoběžná s přímkou* $3x - y + 5 = 0$.

Řešení (Derivace funkce, tečna, normála)

Víme, že rovnoběžné přímky mají stejnou směrnici (k), *upravíme si proto rovnici přímky na směrnicový tvar:*

$$y = 3x + 5,$$

proto $k = 3$. *Derivace v bodě je směrnice tečny v daném bodě, proto hledáme na parabole bod* $[x_0, y_0]$, *ve kterém je směrnice tečny* $k' = 3$. *Tedy*

$$y' = 2x - 2$$

$$2x_0 - 2 = 3 \Rightarrow x_0 = \frac{5}{2}, \; y_0 = \frac{17}{4}.$$

Rovnice tečny je

$$y - \frac{17}{4} = 3(x - \frac{5}{2}).$$

Příklad (Derivace funkce)

Zderivujte:

- $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}; |x| \leq 1$
- $f_2(x) = \left(x - \sqrt{1 - x^2}\right)^2; |x| \leq 1$
- $f_3(x) = (1 + 2x) \cdot (3 - 4x^2)$
- $f_4(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$
- $f_5(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- $f_6(x) = x^{\frac{1}{x}}$

Příklad (Derivace funkce)

- $f_1'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $f_2'(x) = 2 \cdot \left(x - \sqrt{1 - x^2}\right)^1 \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)\right] =$
  $= 2 \cdot \left(x - \sqrt{1 - x^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) =$
  $= 2 \cdot \frac{(x-\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-x^2}+x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2(2x^2-1)}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $f_3'(x) = 2 \cdot (3 - 4x^2) + (1 + 2x) \cdot (-8x) = -24x^2 - 8x + 6$,
- $f_4'(x) = 1 \cdot (x-2) \cdot (x-3) + (x-1) \cdot 1 \cdot (x-3) + (x-1) \cdot (x-2) \cdot 1 =$
  $\ldots = 3x^2 - 12x + 11$,
- $f_5'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} =$
  $= \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

Příklad (Derivace funkce)

Úlohu budeme řešit dvěma spůsoby.

- *Uvědomíme si, že* $x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x}$ *Potom* $f_6'(x) = e^{\frac{1}{x}\cdot\ln x} \cdot \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2}$ *pro* $x > 0$
- *Logaritmické derivování:* $f_6(x) = x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln f_6(x) = \ln x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln f_6(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln x.$ *Zderivujeme* $\frac{f_6'(x)}{f_6(x)} = \frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow f_6'(x) = f_6(x) \cdot \frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow f_6'(x) = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2}$ *pro* $x > 0$