Množiny, Funkcie

February 27, 2020

Množiny

Číselné obory

- $\mathbb{N}-$*Prirodzené čísla,*

Číselné obory

- $\mathbb{N}-$*Prirodzené čísla,*
- $\mathbb{Z}-$*Celé čísla,*

Číselné obory

- $\mathbb{N}-$*Prirodzené čísla,*
- $\mathbb{Z}-$*Celé čísla,*
- $\mathbb{Q}-$*Racionálne čísla,*

Číselné obory

- $\mathbb{N}$ – *Prirodzené čísla,*
- $\mathbb{Z}$ – *Celé čísla,*
- $\mathbb{Q}$ – *Racionálne čísla,*
- $\mathbb{R}$ – *Reálne čísla,*

Číselné obory

- $\mathbb{N}$—*Prirodzené čísla,*
- $\mathbb{Z}$—*Celé čísla,*
- $\mathbb{Q}$—*Racionálne čísla,*
- $\mathbb{R}$—*Reálne čísla,*
- $\mathbb{C}$—*Komplexné čísla.*

Reálne čísla

Intervaly

Reálne čísla

Intervaly

- **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle = \{x; a \leq x \leq b\}$

Reálne čísla

Intervaly

- **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle = \{x; a \leq x \leq b\}$
- **otvorený interval** $(a, b) = \{x; a < x < b\}$

Intervaly

- **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle = \{x; a \leq x \leq b\}$
- **otvorený interval** $(a, b) = \{x; a < x < b\}$
- **zľava otvorený a sprava uzavretý interval** $(a, b\rangle = \{x; a < x \leq b\}$

Reálne čísla

Intervaly

- **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle = \{x; a \leq x \leq b\}$
- **otvorený interval** $(a, b) = \{x; a < x < b\}$
- **zľava otvorený a sprava uzavretý interval** $(a, b\rangle = \{x; a < x \leq b\}$
- **sprava otvorený a zľava uzavretý interval** $\langle a, b) = \{x; a \leq x < b\}$

Reálne čísla

Intervaly

- **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle = \{x; a \leq x \leq b\}$
- **otvorený interval** $(a, b) = \{x; a < x < b\}$
- **zľava otvorený a sprava uzavretý interval** $(a, b\rangle = \{x; a < x \leq b\}$
- **sprava otvorený a zľava uzavretý interval** $\langle a, b) = \{x; a \leq x < b\}$

Pozor, $a < b$ **!**

Intervaly

- **uzavretý interval** $\langle a, b\rangle = \{x; a \leq x \leq b\}$
- **otvorený interval** $(a, b) = \{x; a < x < b\}$
- **zľava otvorený a sprava uzavretý interval** $(a, b\rangle = \{x; a < x \leq b\}$
- **sprava otvorený a zľava uzavretý interval** $\langle a, b) = \{x; a \leq x < b\}$

Pozor, $a < b$ **!**

Nevlastné body reálnej osi:

Intervaly

- **uzavretý interval** $\langle a,b\rangle = \{x; a \le x \le b\}$
- **otvorený interval** $(a,b) = \{x; a < x < b\}$
- **zľava otvorený a sprava uzavretý interval** $(a,b\rangle = \{x; a < x \le b\}$
- **sprava otvorený a zľava uzavretý interval** $\langle a,b) = \{x; a \le x < b\}$

Pozor, $a < b$ **!**

Nevlastné body reálnej osi: $-\infty, \infty$

Základné pojmy

Definícia

- *Nech* $f \subseteq A \times B$ *je binárna relácia. Túto reláciu* f *nazývame* **zobrazením** *z množiny* A *do množiny* B *vtedy, keď o nej platí:*

$$[a, b] \in f \wedge [a, c] \in f \Rightarrow b = c.$$

Základné pojmy

Definícia

- *Nech* $f \subseteq A \times B$ *je binárna relácia. Túto reláciu* f *nazývame* **zobrazením** *z množiny* A *do množiny* B *vtedy, keď o nej platí:*

$$[a,b] \in f \wedge [a,c] \in f \Rightarrow b = c.$$

- **Obraz množiny***:*

$$f(M) = \{b; \exists a \in M \quad f(a) = b\}.$$

Základné pojmy

Definícia

- *Nech $f \subseteq A \times B$ je binárna relácia. Túto reláciu f nazývame* **zobrazením** *z množiny A do množiny B vtedy, keď o nej platí:*

$$[a, b] \in f \wedge [a, c] \in f \Rightarrow b = c.$$

- **Obraz množiny***:*

$$f(M) = \{b; \exists a \in M \quad f(a) = b\}.$$

- **Úplný vzor množiny***:*

$$f^{-1}(P) = \{a; \exists b \in P \quad f(a) = b\}.$$

Základné pojmy

Definícia

- **Definičný obor**

$$D_f = f^{-1}(B).$$

Základné pojmy

Definícia

- **Definičný obor**
$$D_f = f^{-1}(B).$$

- **Obor hodnôt**
$$H_f = f(D_f).$$

Základné pojmy

- *rovnosť zobrazení*

$$f = g \iff D_f = D_g \wedge \forall x \in D_f; f(x) = g(x).$$

Základné pojmy

- *rovnosť zobrazení*

$$f = g \iff D_f = D_g \wedge \forall x \in D_f; f(x) = g(x).$$

- *zúženie zobrazenia na množinu* $A_1 \subseteq D_f$

$$f/_{A_1} = \{[x, y] \in f; x \in A_1\}.$$

Operácie s funkciami

- *súčet*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);\ D_{f+g} = D_f \cap D_g,$$

Operácie s funkciami

- *súčet*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);\ D_{f+g} = D_f \cap D_g,$$

- *rozdiel*

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x);\ D_{f-g} = D_f \cap D_g,$$

Operácie s funkciami

- *súčet*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);\ D_{f+g} = D_f \cap D_g,$$

- *rozdiel*

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x);\ D_{f-g} = D_f \cap D_g,$$

- *súčin*

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x);\ D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g,$$

Operácie s funkciami

- *súčet*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x);\; D_{f+g} = D_f \cap D_g,$$

- *rozdiel*

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x);\; D_{f-g} = D_f \cap D_g,$$

- *súčin*

$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x);\; D_{f\cdot g} = D_f \cap D_g,$$

- *podiel*

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)};\; D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g; g(x) \neq 0\},$$

Operácie s funkciami

- $c-$*násobok*

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x);\; D_{c \cdot f} = D_f,$$

Operácie s funkciami

- $c-$*násobok*

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x); \; D_{c \cdot f} = D_f,$$

- *skladanie*

$$f \circ g(x) = f(g(x)),$$

Operácie s funkciami

- $c-$*násobok*

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x);\ D_{c \cdot f} = D_f,$$

- *skladanie*

$$f \circ g(x) = f\left(g\left(x\right)\right),$$

- *inverzná relácia*

$$f^{-1} = \{[x, y]; [y, x] \in f\}.$$

Operácie s funkciami

- *$c-$násobok*

$$(c\cdot f)\,(x) = c\cdot f(x);\ D_{c\cdot f} = D_f,$$

- *skladanie*

$$f\circ g(x) = f\left(g\left(x\right)\right),$$

- *inverzná relácia*

$$f^{-1} = \{[x,y];[y,x]\in f\}.$$

V akom vzťahu je graf f a f^{-1}? Je f^{-1} vždy funkcia?

Definícia

- *Ak o zobrazení f platí*

$$\forall a, b \in D(f); a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b),$$

hovoríme, že je **prosté**, *alebo* **injekcia**.

Vlastnosti funkcií

Definícia

- *Ak o zobrazení f platí*

$$\forall a, b \in D(f); a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b),$$

  hovoríme, že je **prosté**, *alebo* **injekcia**.

- *Nech $f : A \to B$. Ak platí, že $H(f) = B$ hovoríme, že f je zobrazenie* **z** *množiny A* **na** *(***surjekcia***) množinu B. Ak $D(f) = A$ hovoríme, že f je zobrazenie množiny A* **do** *množiny B. Ak platí, že $D(f) = A, H(f) = B$ hovoríme, že f je zobrazenie množiny A* **na** *(***surjekcia***) množinu B.*

Vlastnosti funkcií

Definícia

- *Ak o zobrazení f platí*

$$\forall a, b \in D(f); a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b),$$

  hovoríme, že je **prosté**, *alebo* **injekcia**.

- *Nech $f : A \to B$. Ak platí, že $H(f) = B$ hovoríme, že f je zobrazenie* **z** *množiny A* **na** *(***surjekcia***) množinu B. Ak $D(f) = A$ hovoríme, že f je zobrazenie množiny A* **do** *množiny B. Ak platí, že $D(f) = A, H(f) = B$ hovoríme, že f je zobrazenie množiny A* **na** *(***surjekcia***) množinu B.*

- *Prosté zobrazenie množiny A* **na** *množinu B nazývame* **vzájomne jednoznačným zobrazením** *A* **na** *B alebo* **bijekciou** *A* **na** *B.*

Vlastnosti funkcií

Definícia

- *Ak o zobrazení f platí*

$$\forall a, b \in D(f); a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b),$$

  hovoríme, že je **prosté**, *alebo* **injekcia**.
- *Nech $f : A \to B$. Ak platí, že $H(f) = B$ hovoríme, že f je zobrazenie* **z** *množiny A* **na** *(***surjekcia***) množinu B. Ak $D(f) = A$ hovoríme, že f je zobrazenie množiny A* **do** *množiny B. Ak platí, že $D(f) = A, H(f) = B$ hovoríme, že f je zobrazenie množiny A* **na** *(***surjekcia***) množinu B.*
- *Prosté zobrazenie množiny A* **na** *množinu B nazývame* **vzájomne jednoznačným zobrazením** *A* **na** *B alebo* **bijekciou** *A* **na** *B.*
- *Každé prosté zobrazenie je bijekciou svojho definičného oboru* **na** *svoj obor hodnôt.*

Vlastnosti funkcií

- *ohraničenosť*
  - *Funkcia je ohraničená zhora, ak*

$$\exists c \in \mathbb{R}\ \forall x \in D_f; f(x) \leq c.$$

  - *Funkcia je ohraničená zdola, ak*

$$\exists d \in \mathbb{R}\ \forall x \in D_f; f(x) \geq d.$$

  - *Funkcia je ohraničená, ak*

$$\exists c, d \in \mathbb{R}\ \forall x \in D_f; d \leq f(x) \leq c.$$

Vlastnosti funkcií

- *monotónnosť*
  - *Funkcia je rastúca na* M

$$\forall x_1, x_2 \in M; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

  - *Funkcia je klesajúca na* M

$$\forall x_1, x_2 \in M; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

  - *Funkcia je neklesajúca na* M

$$\forall x_1, x_2 \in M; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

  - *Funkcia je nerastúca na* M

$$\forall x_1, x_2 \in M; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Vlastnosti funkcií

- *parita*
  - *Funkcia je párna (sudá)*
$$\forall x \in D_f ; f(-x) = f(x),$$
  - *Funkcia je nepárna (lichá)*
$$\forall x \in D_f ; f(-x) = -f(x).$$

Pozor, definičný obor musí byť symetrický, teda

$$x \in D_f \iff -x \in D_f .$$

- *periodicita*

$$\exists p \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall x \in D_f ; f(x \pm p) = f(x).$$

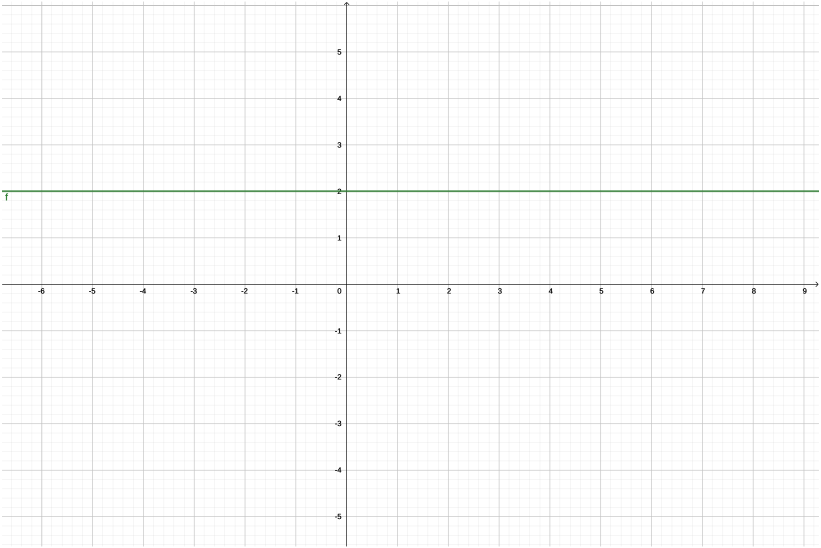
Elementárne funkcie

Polynomické funkcie

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \cdots + a_n \cdot x^n.$$

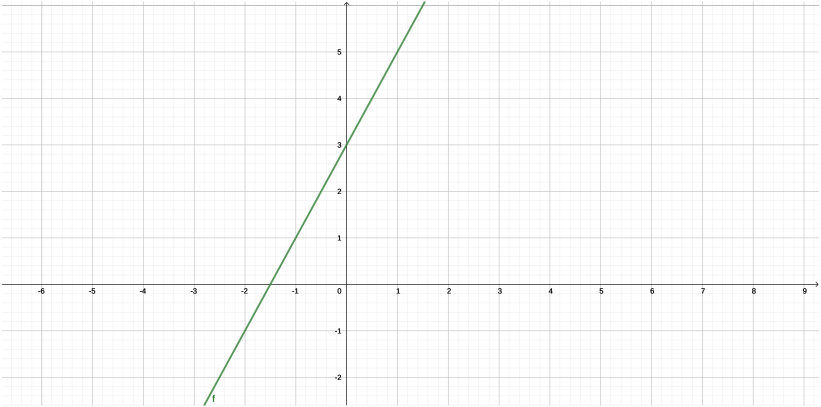
- konštantné funkcie, $n = 0$,
- lineárne funkcie, $n = 1$,
- kvadratické funkcie, $n = 2$,
- polynomické funkcie pre $n > 2$.

Konštantná funkcia: $y = 2.$



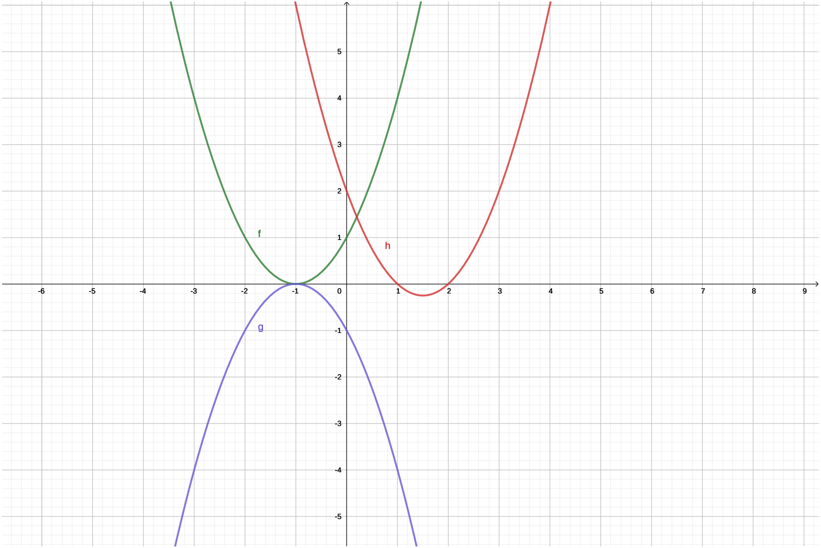
Polynomické funkcie

Lineárna funkcia: $y = 2x + 3.$

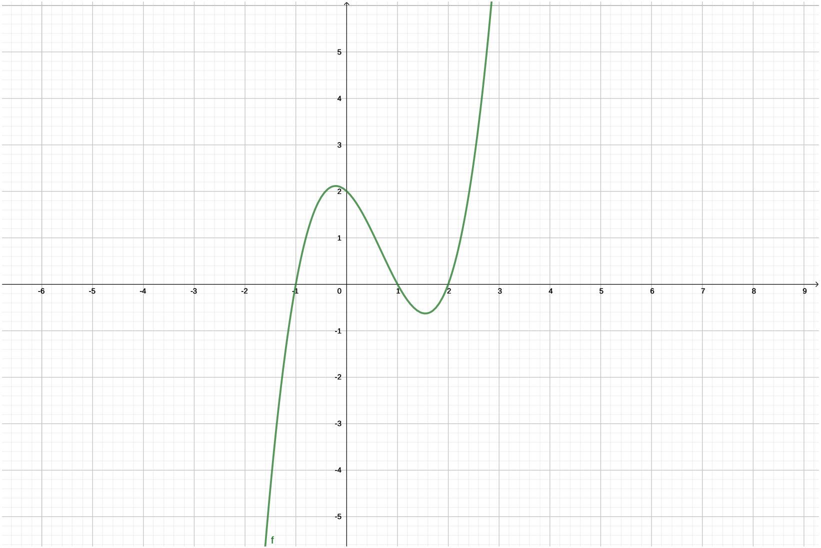


Kvadratická funkcia:

$y = (x+1)^2$, $y = -(x+1)^2$, $y = x^2 - 3x + 2$.



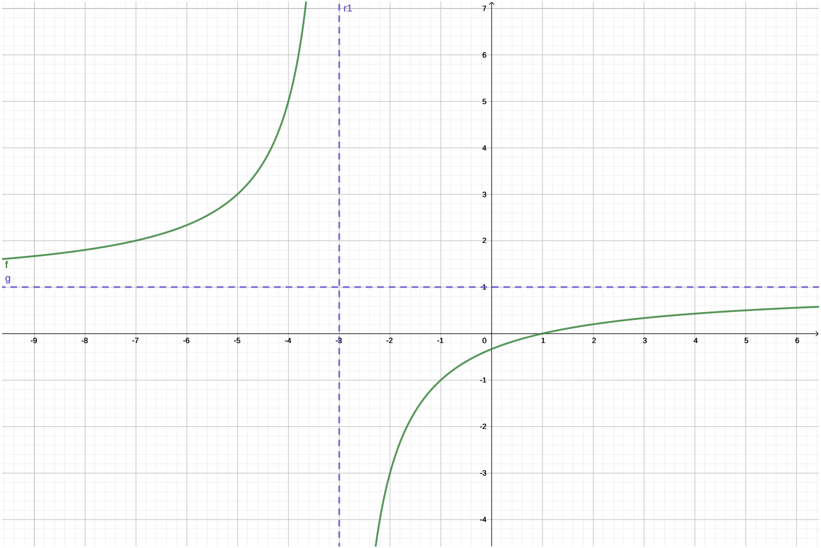
Polynomická funkcia, $n = 3$: $y = x^3 - 2x^2 - x + 2.$



$$y = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

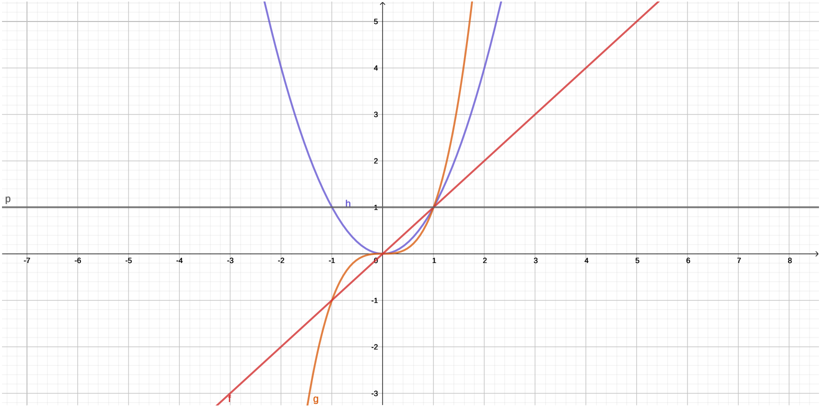
P_m- polynóm stupňa m, Q_n- polynóm stupňa n.

Racionálna lomená funkcia: $y = \frac{x-1}{x+3}$.



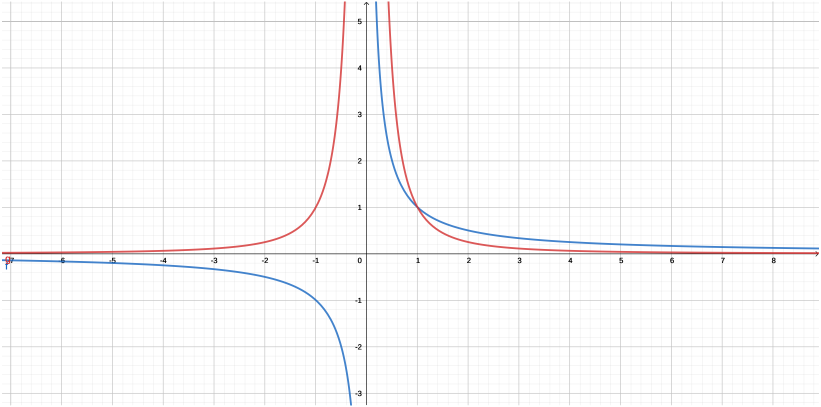
Mocninné funkcie

$$y = x^a; a \in \{0, 1, 2, 3\}$$

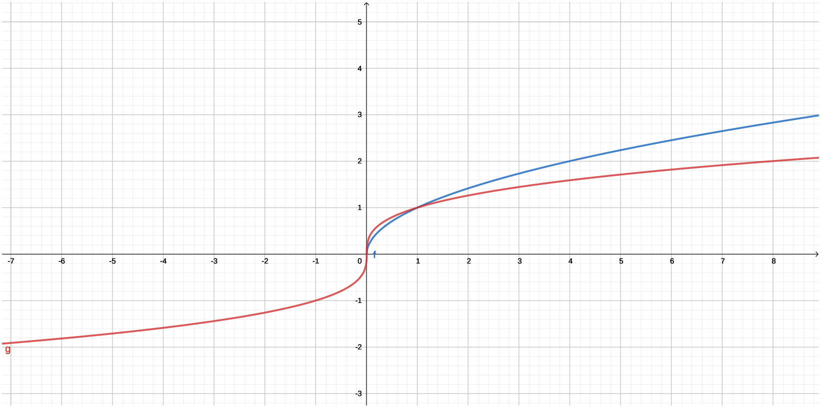


Mocninné funkcie

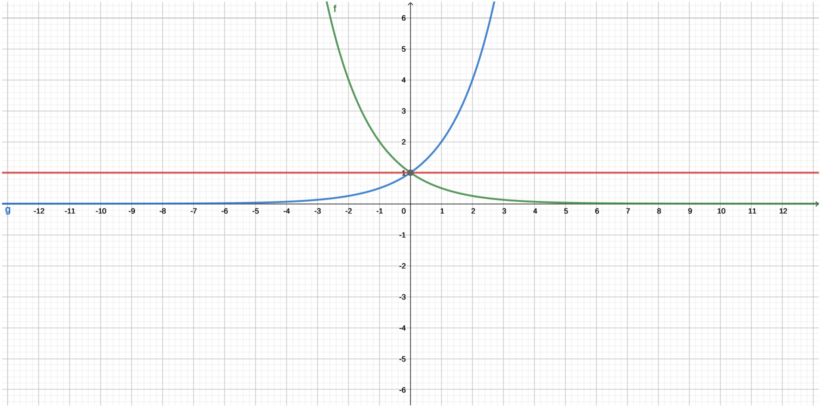
$$y = x^a; a \in \{-1, -2\}$$



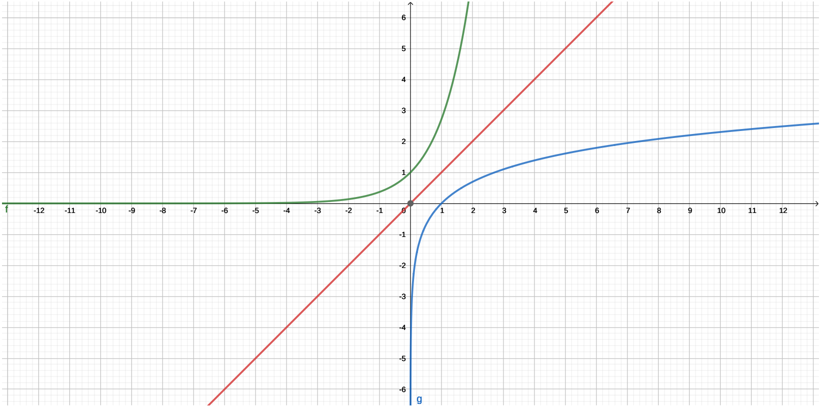
$$y = x^a; a \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\}$$



$$y = a^x, a > 0, a \in \left\{ 1, \frac{1}{2}, 2 \right\}$$

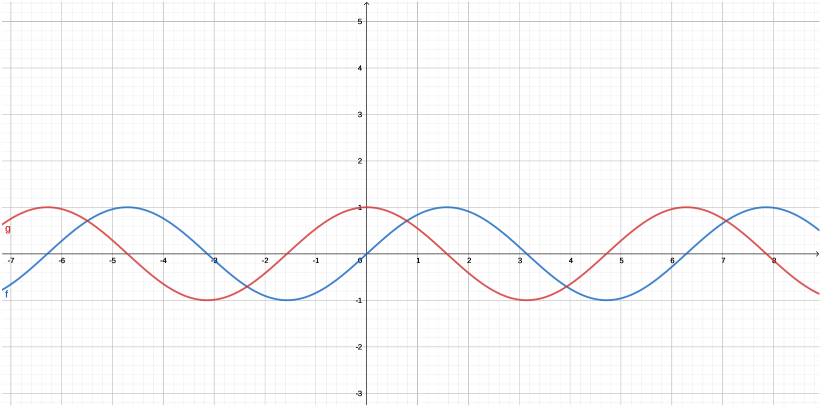


$$y = \log_a x, 0 < a < 1 \vee a > 1, (a = e).$$

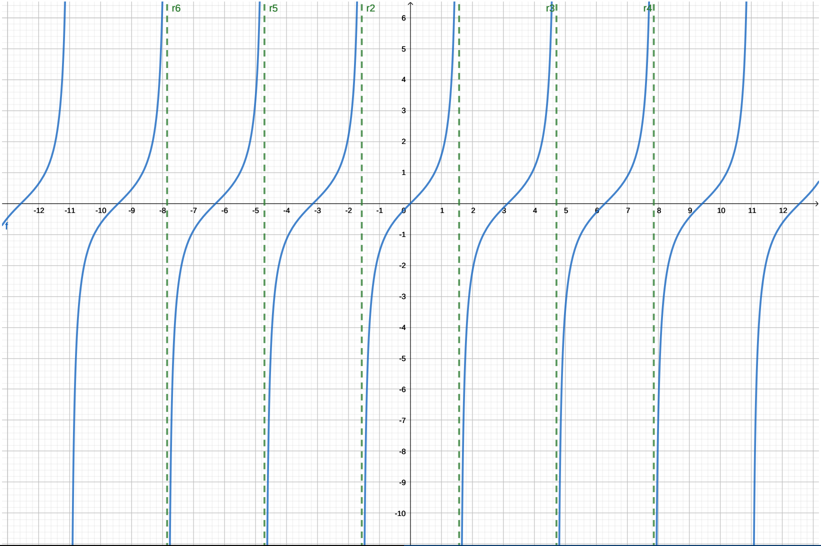


Goniometrické funkcie

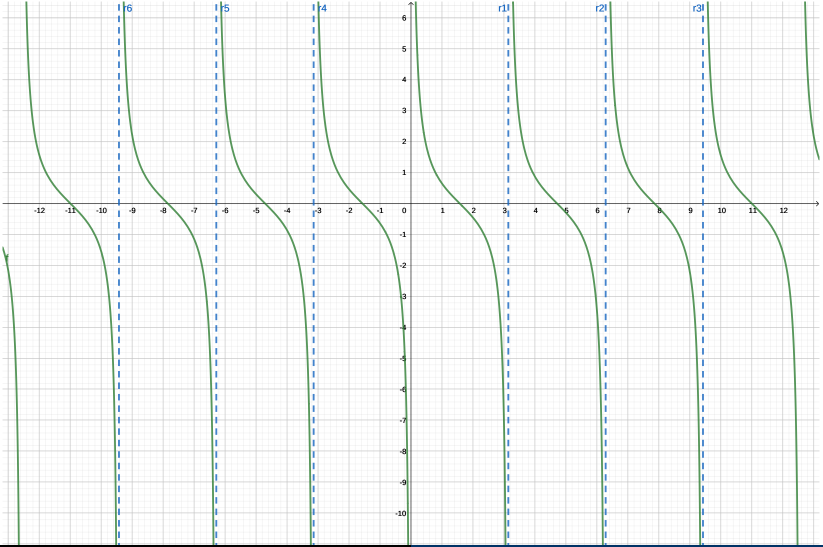
$$y = \sin x, y = \cos x.$$



$$y = \operatorname{tg} x.$$

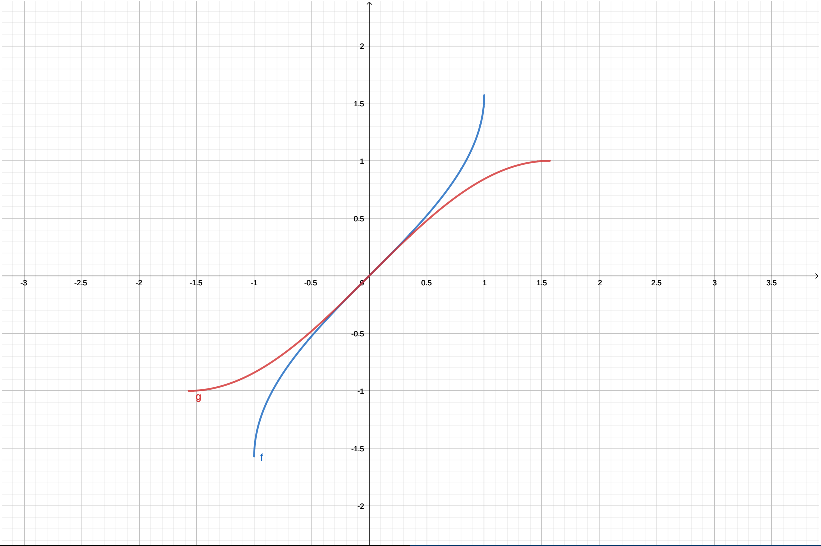


$$y = \mathrm{cotg} x.$$



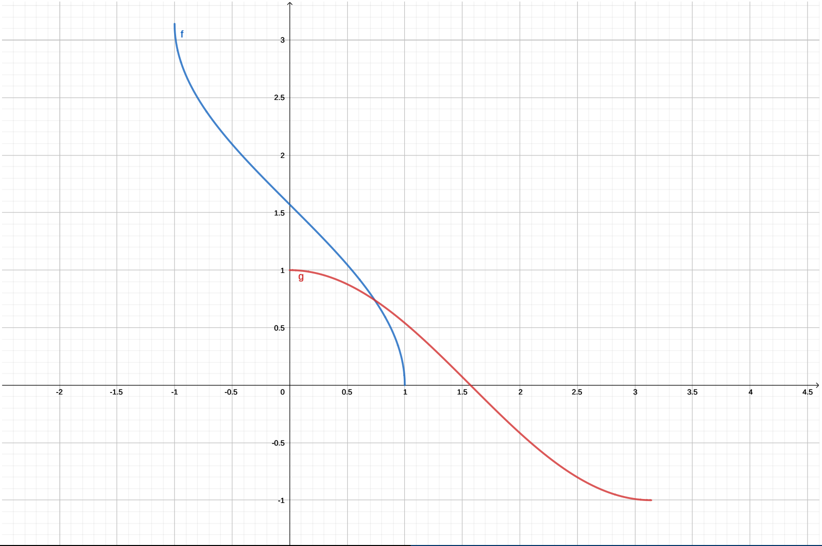
Cyklometrické funkcie

$$y = \sin x, y = \arcsin x.$$



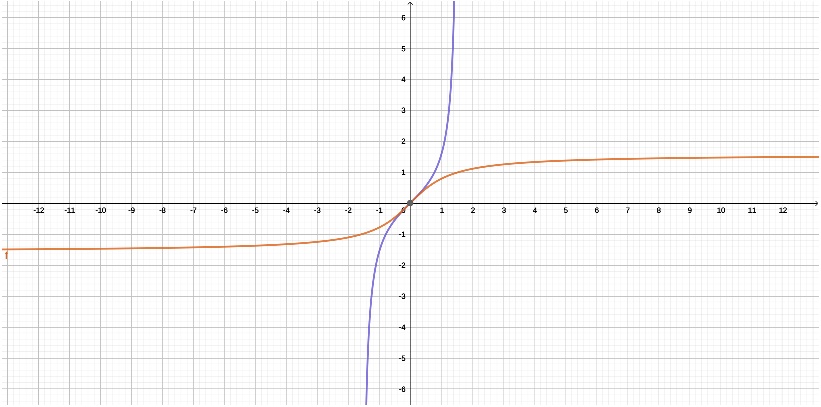
Cyklometrické funkcie

$$y = \cos x, y = \arccos x.$$

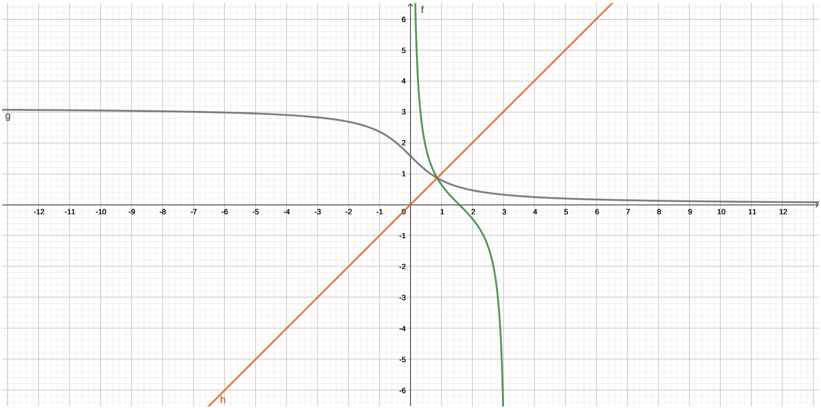


Cyklometrické funkcie

$$y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{arctg} x.$$



$$y = \mathrm{cotg} x, y = \mathrm{arccotg} x.$$



Dôležité funkcie

- **celá časť:** $[x] \leq x < [x] + 1$

Dôležité funkcie

- **celá časť:** $[x] \leq x < [x] + 1$
- **charakteristická funkcia množiny** $M : \chi(x) = \begin{cases} 0 & x \notin M \\ 1 & x \in M \end{cases}$

Dôležité funkcie

- **celá časť:** $[x] \leq x < [x] + 1$
- **charakteristická funkcia množiny** $M : \chi(x) = \begin{cases} 0 & x \notin M \\ 1 & x \in M \end{cases}$
- $\mathsf{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$