(Definičný obor)

Príklad. *Určte definičný obor funkcie:* $y = \sqrt{-x^2 + 8x - 12}$.
Riešenie. *Pod odmocninou máme výraz, ktorý nadobúda aj záporné hodnoty, preto treba určiť len také* $x \in R$, *pre ktoré je daný výraz nezáporný. Teda*
$-x^2 + 8x - 12 \geq 0.$
Upravíme
$x^2 - 8x + 12 \leq 0 \iff (x-6)\cdot(x-2) \leq 0.$
Grafom $y = x^2 - 8x + 12$ *je parabola a z predošlého rozkladu vidíme, že* $x-$*ovú os pretína v bodoch* $2, 6$. *Po nakreslení obrázku (na prednáške bolo nakreslené) vidíme, že našej požiadavke vyhovuje* $x \in \langle 2, 6\rangle$.

(Definičný obor)

Príklad. *Určte definičný obor funkcie:*
$y = \log(\sqrt{-x^2 + 8x - 12} - \sqrt{3})$.

Riešenie. *Z predošlého príkladu vieme, že* $\sqrt{-x^2 + 8x - 12}$ *je definovaná pre* $x \in \langle 2, 6 \rangle$. *Druhá odmocnina definovaná je, teda ešte treba zabezpečiť, aby bol definovaný logaritmus, teda musí platiť* $\sqrt{-x^2 + 8x - 12} - \sqrt{3} > 0$. *Teda* $\sqrt{-x^2 + 8x - 12} > \sqrt{3}$. *Pracujeme na intervale* $\langle 2, 6 \rangle$, *preto umocnenie bude ekvivaletná úprava*
$-x^2 + 8x - 12 > 3 \iff -x^2 + 8x - 15 > 0 \iff$
$x^2 - 8x + 15 < 0 \iff (x - 5) \cdot (x - 3) < 0.$
Grafom $y = x^2 - 8x + 15$ *je parabola a z predošlého rozkladu vidíme, že* $x-$*ovú os pretína v bodoch* $3, 5$. *Po nakreslení obrázku (na prednáške bolo nakreslené) vidíme, že našej požiadavke vyhovuje* $x \in (3, 5) \cap \langle 2, 6 \rangle = (3, 5)$.

(Inverzná funkcia)

Príklad. *Daná je funkcia* $y = \sqrt{3x-2}$. *Zistite, či k nej existuje inverzná funkcia, ak áno, nájdite jej predpis.*

Riešenie. *Funkcia je prostá lebo: ak* $x_1 \neq x_2$, *tak* $3x_1 \neq 3x_2$ *a aj* $3x_1 - 2 \neq 3x_2 - 2$ *a potom aj* $\sqrt{3x_1-2} \neq \sqrt{3x_2-2}$, *teda* $f(x_1) \neq f(x_2)$. *Určíme ešte* D_f, H_f. *Výraz pod odmocninou musí byť nezáporný, preto* $D_f = \langle \frac{2}{3}, \infty)$, *funkčné hodnoty sú z intervalu* $\langle 0, \infty)$, *preto* $H_f = \langle 0, \infty)$. *Treba si uvedomiť, že* $D_{f^{-1}} = \langle 0, \infty), H_{f^{-1}} = \langle \frac{2}{3}, \infty)$. *Predpis pre inverznú funkciu získame zámenou* x *a* y *a následnou úpravou:*
$x = \sqrt{3y-2} \Rightarrow x^2 = 3y - 2 \Rightarrow y = \frac{x^2+2}{3}$.
Pozor! Inverzná funkcia má síce predpis $y = \frac{x^2+2}{3}$, *ale treba si uvedomiť, že nás zaujíma iba na intervale* $\langle 0, \infty)$.

(Skladanie funkcií)

Príklad. *Dané sú funkcie* $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^2$. *Určte* $g \circ f(x), f \circ g(x)$.

Riešenie. *Určíme* $g \circ f(x)$*: Funkcia* f *je definovaná na intervale* $\langle 0, \infty)$ *a aplikovaním na* x *dostaneme* $\sqrt{x}$. *Potom na* $\sqrt{x}$ *aplikujeme funkciu* g*, teraz nemusíme riešiť definičný obor, lebo* g *je definovaná na celej množine* R. *Výsledok zloženia je* $(\sqrt{x})^2 = x$*, ale pozor-vnútorná zložka (fcia* f*) je definovaná na* $\langle 0, \infty)$*, preto aj výsledná funkcia je definovaná iba na tomto intervale. Druhú zloženinu určíme podobne, po aplikovaní funkcie* g *na z* x *dostaneme* x^2 *(def. obor je* R*) a potom aplikujeme funkciu* f *a dostaneme* $\sqrt{x^2} = |x|$ *a def. obor je aj po aplikovaní vonkajšej zložky* R.

(Skladanie funkcií)

Príklad. *Dané sú funkcie*

$$f(x) = |\sin(\tfrac{1}{2}x)|, g(x) = \begin{cases} 1 & x \in \langle 0, 1\rangle \\ \ln(\mathrm{tg}(x)) & \textit{inak} \end{cases}.$$ *Určte* $g \circ f(x)$

Riešenie. *Úloha vypadá strašidelne, ale stačí sa dobre pozrieť na vnútornú zložku (funkciu* f*), tá totiž nadobúda iba hodnoty z intervalu* $\langle 0, 1\rangle$*, preto výsledok zloženia je konštantná funkcia* $g \circ f(x) = 1$ *a definičný obor je* R.