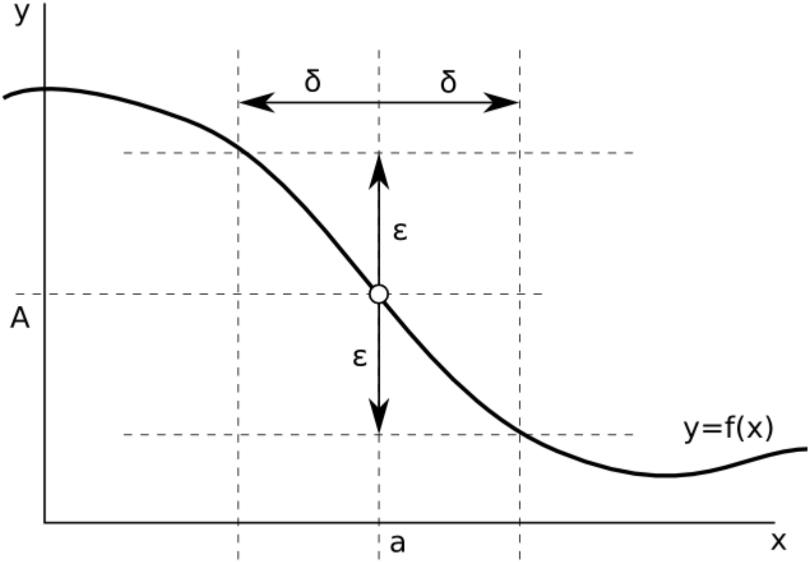
Limita funkcie, spojitosť funkcie

February 3, 2020


y
δ
δ
ε
A
ε
y=f(x)
a
x

Limita funkcie

- *Hovoríme, že číslo A je limitou funkcie $f(x)$ v bode c ak platí*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0; \quad 0 < |x - c| < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

- *Hovoríme, že číslo A je limitou sprava funkcie $f(x)$ v bode c ak platí*

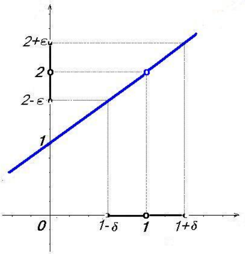
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0; \quad 0 < x - c < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

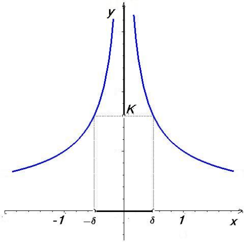
- *Hovoríme, že číslo A je limitou zľava funkcie $f(x)$ v bode c ak platí*

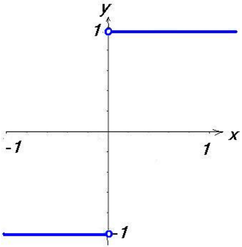
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0; \quad 0 < c - x < \delta \implies |f(x) - A| < \varepsilon.$$

- *Funkcia $f(x)$ má v bode c najviac se jednu limitu, a tiež najviac jednu limitu sprava a jednu zľava.*

Limita funkcie







Limita funkcie

(Typy limít)

- **Limita vo vlastnom bode**
  - *vlastná*
  - *nevlastná*
  - *neexistuje*
- **Limita v nevlastnom bode**
  - *vlastná*
  - *nevlastná*
  - *neexistuje*

Limita funkcie

(Formálne zápisy)

- *vlastná limita vo vlastnom bode:*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; \forall x \in D(f):\ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

- *nevlastná limita ve vlastnom bode:*

$$\forall K > 0\ \exists \delta > 0;\ \forall x \in D(f):\ 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > K.$$

- *vlastná limita v nevlastnom bode:*

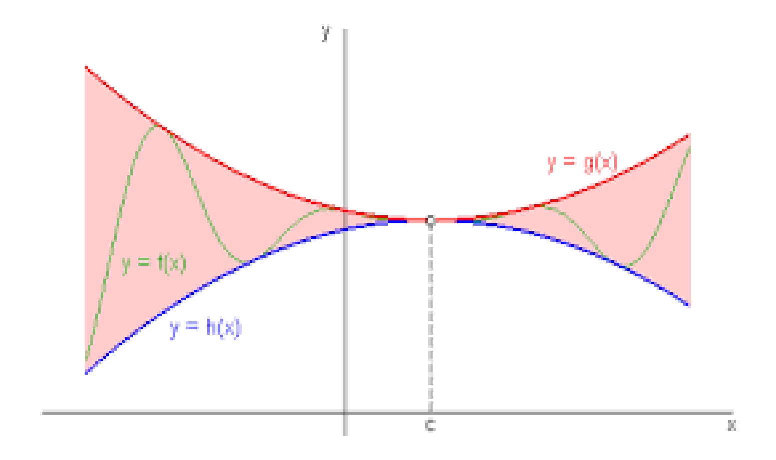
$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists K > 0;\ \forall x \in D(f):\ x > K \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

(Vety o limitách)

- *Nech* $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$, *tak*
$$\exists\, \mathcal{U}(a); \forall x \in \mathcal{U}^*(a) \cap D(f) \cap D(g); f(x) < g(x).$$
- *Ak* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ *a* $\exists \mathcal{U}(a); f(x) \leq g(x)$. *Potom*
$$b \leq c.$$
- *Ak* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ *a* $\exists \mathcal{U}(a); f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. *Potom*
$$\lim_{x\to a} g(x) = b.$$

Limita funkcie

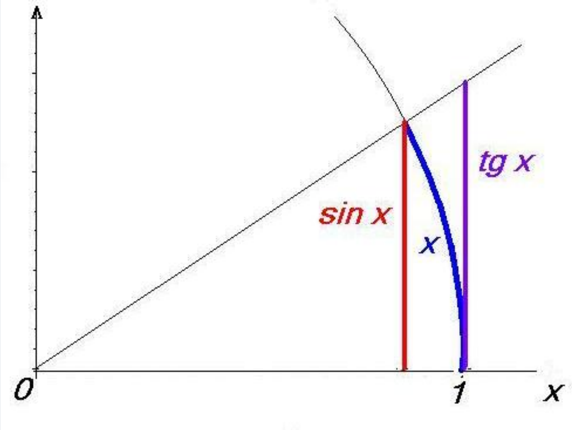
(Veta o dvoch policajtoch)



Limita funkcie

(Aplikácia vety o dvoch policajtoch)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



Limita funkcie

(Aritmetické operácie a limity)

Nech f, g *majú vlastné limity v bode* a, *a* $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{x\to a} g(x) = c$. *Potom*

- $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = b + c$
- $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = b - c$
- $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = b \cdot c$
- *ak* $c \neq 0$, *tak* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$

Limita funkcie

(Vety o nevlastných limitách)

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \iff \lim\limits_{x \to a} -f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \infty$
- $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \infty \iff \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \wedge g(x)$ *je ohraničená* $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \infty$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \wedge g(x) \geq c > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} [f(x).g(x)] = \infty$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \wedge g(x)$ *je ohraničená* $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} [f(x).g(x)] = 0$

Limita funkcie

(Limita zloženej funkcie)

Nech

- a *je hromadný bod množiny* $D(f)$, *kde* $f = h \circ g$,
- *existujú limity*

$$c = \lim_{x \to a} g(x), \quad d = \lim_{t \to c} h(t),$$

- *na istom okolí bodu* a *je pre* $x \neq a$ *aj* $g(x) \neq c$ *(pre spojité funkcie môžeme vynechať).*
- *Potom* $\lim_{x \to a} f(x) = d$.

Spojitosť funkcie

- *Funkcia sa nazýva* **spojitá v bode** a, *ak platí*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

- *Funkcia sa nazýva* **spojitá sprava v bode** a, *ak platí*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a).$$

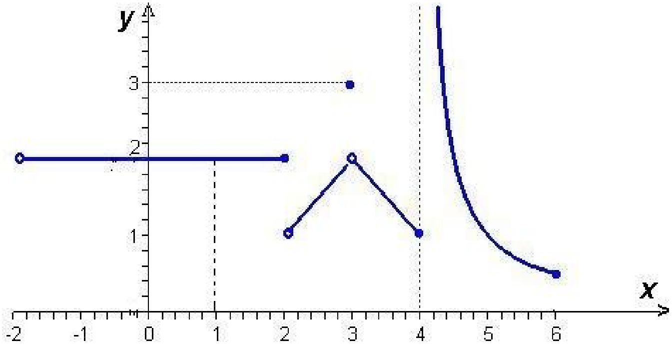
- *Funkcia sa nazýva* **spojitá zľava v bode** a, *ak platí*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a).$$

(Klasifikácia nespojitostí)

- *nespojitosť* **prvého druhu**
  - *skok nespojitosti*
  - *odstrániteľná nespojitosť*
  - *skoková nespojitosť*
- *nespojitosť* **druhého druhu**

Spojitosť funkcie



Spojitosť funkcie

(Spojitosť funkcie na intervale)

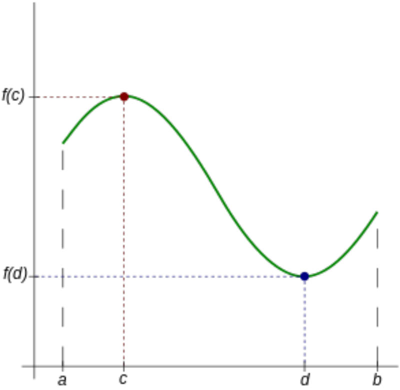
- *Funkcia sa nazýva* **spojitá na intervale** (a, b), *ak je spojitá v každom jeho bode.*
- *Funkcia sa nazýva* **spojitá na uzavretom intervale** $\langle a, b \rangle$, *ak je spojitá na otvorenom intervale* (a, b) *a navyše je v bode* a *spojitá sprava a v bode* b *je spojitá zľava.*

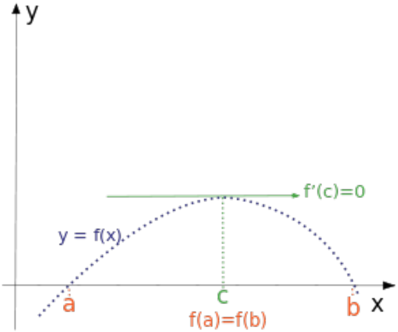
Spojitosť funkcie

(Spojitost funkce na uzavretom intervale)

- *Ak f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, tak je na ňom ohraničená.*
- **Weierstrassova veta** *Ak f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, tak v nejakých bodoch intervalu $\langle a, b\rangle$ nadobúda svoje maximum a minimum.*
- *Ak f je spojitá na $\langle a, b\rangle$, tak nadobúda na tomto intervale všetky hodnoty medzi svvojim maximom a minimom.*

Spojitosť funkcie





Aplikácie limít

(Asymptoty grafu funkcie)

- *zvislá (bez smernice)*

  $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ *alebo* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$
- *šikmé (so smernicou)*

  $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ *alebo* $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$
  - $a = \lim \frac{f(x)}{x}$, *kde* $\lim$ *je* $\lim\limits_{x\to\infty}$ *alebo* $\lim\limits_{x\to-\infty}$
  - $b = \lim[f(x) - ax]$, *kde* $\lim$ *je* $\lim\limits_{x\to\infty}$ *alebo* $\lim\limits_{x\to-\infty}$

Asymptoty grafu funkcie