Limita posloupnosti, limita funkce

January 21, 2015

Příklad (Limita posloupnosti)

Ukažte, že $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \cdots \frac{n}{n+1} \cdots\}$ *konverguje k* 1.

Řešení. *Máme ukázat, že pro libovolné* $\varepsilon > 0$ *existuje také* n_0, *že pro* $n > n_0$ *je*

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Potom

$$\left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Máme

$$\frac{1}{\varepsilon} < n+1,$$

teda

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Ak $\frac{1}{\varepsilon} - 1 \geq 1$, *tak za* n_0 *stačí vzít nejbližší menší přirozené číslo.* *Jestliže je* $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < 1$, *tak* $n_0 = 1$.

Příklad (Limita posloupnosti)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3-5n^2-2n^4}{3-2n^5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n^5}-\frac{5}{n^3}-\frac{2}{n}}{\frac{3}{n^5}-2} = \frac{0-0-0}{0-2} = 0.$$

Příklad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n-1}{3n^2-2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{2+0-0}{3-0+0} = \frac{2}{3}.$$

Příklad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}$$

Příklad

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^r = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^r = \left(\frac{1}{1+0}\right)^r = 1.$$

Příklad

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Příklad

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{2}} =$$

| *použijeme substituci* $-\frac{3}{n} = a \Rightarrow n = -\frac{3}{a}, n \to \infty \Rightarrow a \to 0$|

$$\lim_{a\to 0}(1+a)^{-\frac{3}{2a}} = \lim_{a\to 0}\frac{1}{(1+a)^{\frac{3}{2a}}} = \lim_{a\to 0}\frac{1}{\left[(1+a)^{\frac{1}{a}}\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}.$$

Příklad

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n =$$

$|$ *použijeme substituci* $\frac{k}{n}=a \Rightarrow n=\frac{k}{a}, n\to\infty \Rightarrow a\to 0|$

$$\lim_{a\to 0}\left[(1+a)^{\frac{1}{a}}\right]^k = e^k.$$

Příklad

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right)^n =$$

$|$ *použijeme substitúciu* $-\frac{5}{n}=a \Rightarrow n=-\frac{5}{a}, n\to\infty \Rightarrow a\to 0|$

$$\lim_{a\to 0}(1+a)^{-\frac{5}{a}} = \lim_{a\to 0}\frac{1}{(1+a)^{\frac{5}{a}}} = \lim_{a\to 0}\frac{1}{\left[(1+a)^{\frac{1}{a}}\right]^5} = \frac{1}{e^5}.$$

Příklad

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{3}\right)=\infty$$

Příklad

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+\sin n}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2+\frac{\sin n}{n}\right)}{n\left(3-\frac{1}{n}\right)}=\frac{2}{3}$$

Příklad

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2-n}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=0$$

Příklad (Limita funkce)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{x^2}-\frac{1-2x^2}{2-3x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}{1}-\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-2}{\frac{2}{x^2}-3}=\frac{0-0}{1}-\frac{0-2}{0-3}=-\frac{2}{3}$$

Příklad

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\frac{(x+\sqrt{x^2-1})}{(x+\sqrt{x^2-1})}=$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=0$$

Příklad

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$