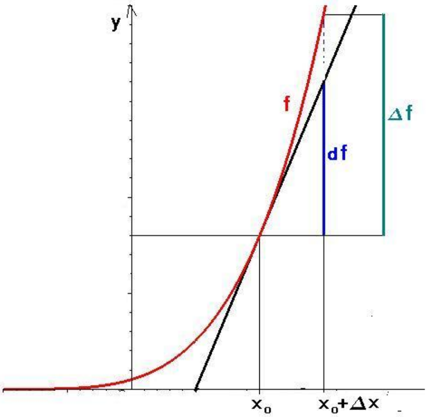
Diferenciál

(Diferenciál-prírastok po dotyčnici)

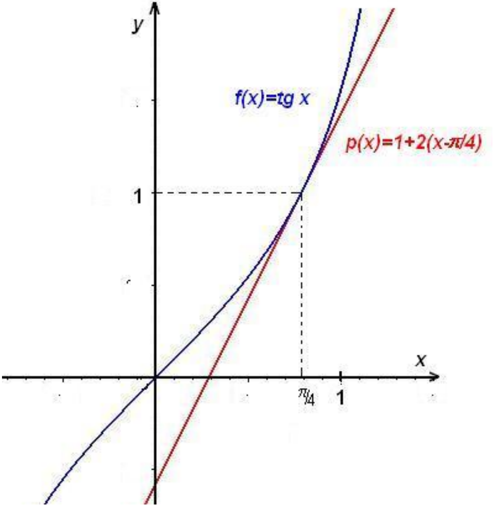
Nech funkcia f je diferencovateľná v bode x_0. Potom funkciu $f'(x_0) \cdot h$ premennej $h \in \mathbb{R}$ nazývame **diferenciál funkcie.**

(Diferenciál-prírastok po dotyčnici)

Nech funkcia f je diferencovateľná v bode x_0. Potom funkciu $f'(x_0) \cdot h$ premennej $h \in \mathbb{R}$ nazývame **diferenciál funkcie.**



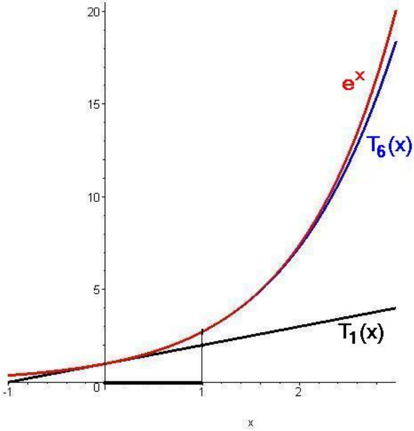
Linearizácia



Taylorov polynóm

- Ak je funkcia f $n-$krát diferencovateľná v bode x_0, potom funkciu
$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0).h^n$$
proměnnej $h \in R$ nazývame **diferenciálom n-tého rádu** funkcie f v bode x_0.
- **Taylorovým polynómom** funkcie f v bode x_0 nazývame polynóm
$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$
Pre $x_0 = 0$ se T_n nazývá **Maclaurinov polynóm**.
- Necht funkcia f je $(n+1)-$ krát diferencovateľná na nejakom okolí bodu x_0. Potom pre body toho okolia platí:
$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x);$$
$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \vartheta = x_0 + a(x - x_0); 0 < a < 1.$$

Taylorove polynómy pre funkciu $y = e^x$.



Interpolácia polynómom

Chceme nájsť polynóm

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = f(x),$$

ak poznáme:

x	x_0	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$\dots$	$f(x_n)$

Vandermondova matica

Z tabuľky zostavíme sústavu rovníc s neznámymi $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

$$\begin{array}{rcl} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n & = & f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n & = & f(x_1) \\ & \vdots & \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n & = & f(x_n) \end{array}$$

Potom dostaneme tzv. ***Vandermondovu maticu****.*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n & f(x_n) \end{array}\right)$$

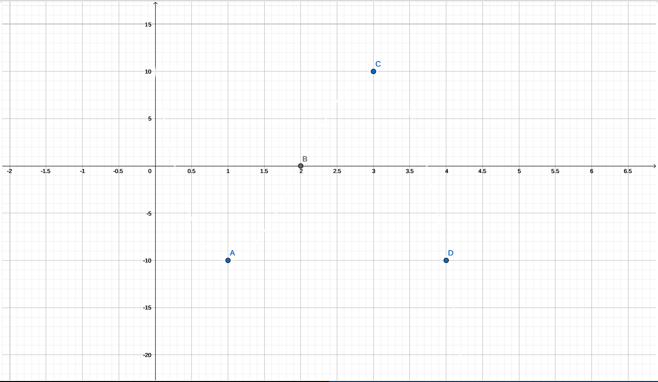
Pomocou GEM dostaneme hľadané koeficienty $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Vandermondova matica

(Príklad, zadanie)

Zostavte interpolačný polynóm pre namerané hodnoty:

x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	-10	0	10	-10



Vandermondova matica

(Príklad, riešenie)

Podľa návodu zostrojíme Vandermondovu maticu:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -10 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 10 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & -10 \end{array}\right)$$

Vandermondova matica

(Príklad, riešenie)

Aplikujeme GEM a dostaneme riešenie $\overline{a} = (10, -45, 30, -5)$*.*
Preto hľadaný interpolačný polynóm je:

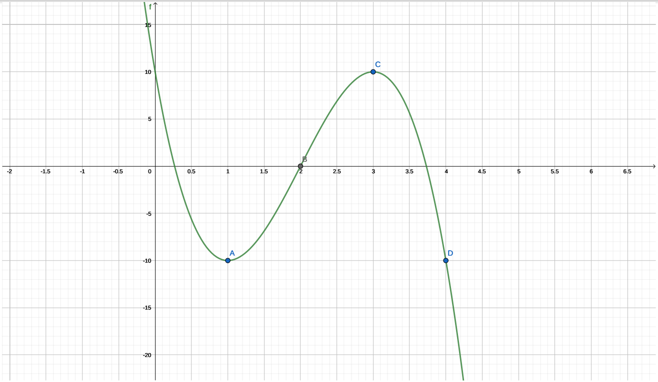
$$f(x) = 10 - 45x + 30x^2 - 5x^3.$$

Vandermondova matica

(Príklad, riešenie)

Aplikujeme GEM a dostaneme riešenie $\overline{a} = (10, -45, 30, -5)$.
Preto hľadaný interpolačný polynóm je:

$$f(x) = 10 - 45x + 30x^2 - 5x^3.$$



Lagrangeov interpolačný polynóm

Máme

x	x_0	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$\dots$	$f(x_n)$

Lagrangeov interpolačný polynóm

Máme

x	x_0	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$\dots$	$f(x_n)$

Hľadáme:

Polynóm L_n *stupňa najviac* n *taký, že* $L_n(x_0) = f(x_0)$, $L_n(x_1) = f(x_1)$, ..., $L_n(x_n) = f(x_n)$.

Lagrangeov interpolačný polynóm

Máme

x	x_0	$\ldots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$\ldots$	$f(x_n)$

Hľadáme:

Polynóm L_n *stupňa najviac* n *taký, že* $L_n(x_0) = f(x_0)$, $L_n(x_1) = f(x_1)$, ..., $L_n(x_n) = f(x_n)$.

Pomôžu nám:

Pomocné funkcie $F_i(x) \forall i \in 0, \ldots, n$ *také, že*

$$F_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i, \\ 0 & j \neq i. \end{cases}$$

Lagrangeov interpolačný polynóm

Máme

x	x_0	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$\dots$	$f(x_n)$

Hľadáme:

Polynóm L_n *stupňa najviac* n *taký, že* $L_n(x_0) = f(x_0)$, $L_n(x_1) = f(x_1)$, ..., $L_n(x_n) = f(x_n)$.

Pomôžu nám:

Pomocné funkcie $F_i(x) \forall i \in 0, \dots, n$ *také, že*

$$F_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i, \\ 0 & j \neq i. \end{cases}$$

Ako ich vymyslieť?

Lagrangeov interpolačný polynóm

Máme

x	x_0	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$\dots$	$f(x_n)$

Hľadáme:

Polynóm L_n stupňa najviac n taký, že $L_n(x_0) = f(x_0)$, $L_n(x_1) = f(x_1)$, ..., $L_n(x_n) = f(x_n)$.

Pomôžu nám:

Pomocné funkcie $F_i(x) \forall i \in 0, \dots, n$ také, že

$$F_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i, \\ 0 & j \neq i. \end{cases}$$

Ako ich vymyslieť?

$$F_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}.$$

Lagrangeov interpolačný polynóm

Lagrangeov interpolačný polynóm n-tého stupňa má tvar

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \; F_i(x).$$

Lagrangeov interpolačný polynóm

(Príklad, zadanie)

Nájdite Lagrangeov interpolačný polynóm pre uzly:

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	-10	0	10	-10

Lagrangeov interpolačný polynóm

(Príklad, riešenie)

Zostavíme l_0 *až* l_3, *tak, aby* l_i *pre* x_i *nadobúdalo hodnotu 1 a pre* x_j, *kde* $j \neq i$ *nadobúdalo hodnotu 0.*

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x_0-2)(x_0-3)(x_0-4)} = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} =$$

$$= \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{-6}$$

Lagrangeov interpolačný polynóm

(Príklad, riešenie)

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(x_1-1)(x_1-3)(x_1-4)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} =$$

$$= \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{2}$$

Lagrangeov interpolačný polynóm

(Príklad, riešenie)

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(x_2-1)(x_2-2)(x_2-4)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} =$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{-2}$$

(Príklad, riešenie)

$$l_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x_3-1)(x_3-2)(x_3-3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} =$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}$$

(Príklad, riešenie)

A už môžeme zostaviť Lagrangeov polynóm:

$$L_3(x) = f(x_0)\cdot l_0(x) + f(x_1)\cdot l_1(x) + f(x_2)\cdot l_2(x) + f(x_3)\cdot l_3(x) =$$

$$= -10\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{-6} + 0\cdot\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{2} +$$

$$+ 10\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{-2} + (-10)\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6} =$$

$$= \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad = -5x^3 + 30x^2 - 45x + 10$$

Lagrangeov interpolačný polynóm

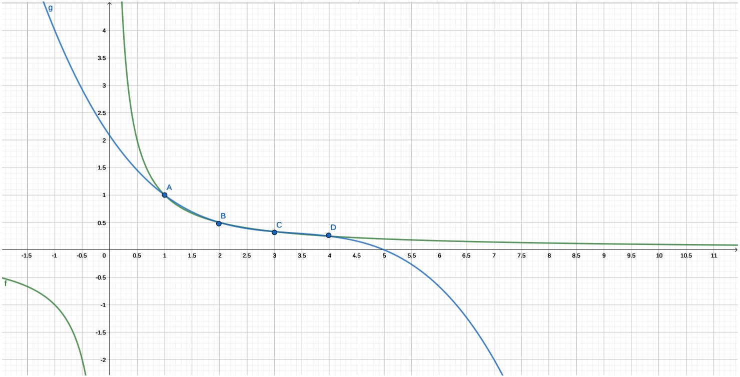
(Príklad)

x	1	2	3	4
$\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Lagrangeov interpolačný polynóm

(Príklad)

x	1	2	3	4
$\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$



Newtonov interpolačný polynóm

Máme

x	x_0	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$\dots$	$f(x_n)$

Newtonov interpolačný polynóm

Máme

x	x_0	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$\dots$	$f(x_n)$

Hľadáme interpolačný polynóm, ktorý má tvar:

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$
$$+a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$$

tzv. **Newtonov interpolačný polynóm.**

Newtonov interpolačný polynóm

Máme

x	x_0	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$\dots$	$f(x_n)$

Hľadáme interpolačný polynóm, ktorý má tvar:

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$
$$+a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$$

tzv. **Newtonov interpolačný polynóm.**

Ako vypočítame koeficienty a_i?

Newtonov interpolačný polynóm

Existuje jednoduchý spôsob, ako určiť koeficienty a_0 *až* a_n*. Použijeme tabulku s tzv.* **pomernými diferenciami**. *V tabuľke budú diferencie* $0-$*tého až* $n-$*tého rádu. Pomerné diferencie* $0-$*tého rádu sú funkčné hodnoty v uzloch* x_i*.*
Ak označíme D_j *ako* $j-$*tu pomernú diferenciu* $k-$*teho rádu a* C_j *ako* $j-$*tu pomernú diferenciu* $(k-1)-$*teho rádu. Potom platí:*

$$D_j = \frac{(C_j - C_{j-1})}{(x_j - x_{j-k})}.$$

(Príklad, zadanie)

Nájdite Newtonov interpolačný polynóm pre uzly:

x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	-10	0	10	-10

(Príklad, riešennie)

i	x_i	$f(x_i)$	*1.rád*	*2.rád*	*3.rád*
0	*1*	**-10**	$\frac{0-(-10)}{2-1} = \mathbf{10}$	$\frac{10-10}{3-1} = \mathbf{0}$	$\frac{-15-0}{4-1} = \mathbf{-5}$
1	*2*	*0*	$\frac{10-0}{3-2} = 10$	$\frac{-20-10}{4-2} = -15$	
2	*3*	*10*	$\frac{-10-10}{4-3} = -20$		
3	*4*	*-10*			

Newtonov interpolačný polynóm

(Príklad, riešennie)

Použijeme hodnoty z prvého riadku tabuľky (tučne vyznačené) a dostaneme:

$$N_3 = -10 + 10(x - x_0) + 0(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$(-5)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$= -10 + 10(x - 1) + 0(x - 1)(x - 2) +$$

$$+(-5)(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$= -10 + 10(x - 1) + (-5)(x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Newtonov interpolačný polynóm má výhodu, že je, v porovnaní s Lagrangeovou interpoláciou, menej náročné pridať jeden uzol, protože niektoré výpočty ostanú bez zmeny.

Interpolačná chyba

Nech $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *sú uzly z intervalu* $\langle a, b\rangle$ *a nech funkcia* f *má na tomto intervale* $n+1$ *spojitých derivácií. Potom pre každé* $x \in \langle a, b\rangle$ *existuje* $\xi \in \langle a, b\rangle$ *tak, že platí*

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \pi_{n+1}(x),$$

kde $\pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$.

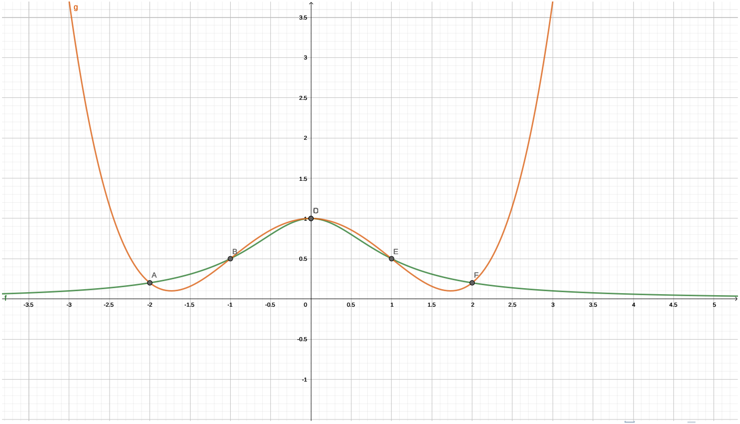
(Príklad)

x	-2	-1	0	1	2
$\frac{1}{x^2+1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

Interpolačná chyba

(Príklad)

x	-2	-1	0	1	2
$\frac{1}{x^2+1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$



(Príklad, zadanie)

x_i	3	$\frac{9}{2}$	7	9
$f(x_i)$	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$

Lineárny splajn

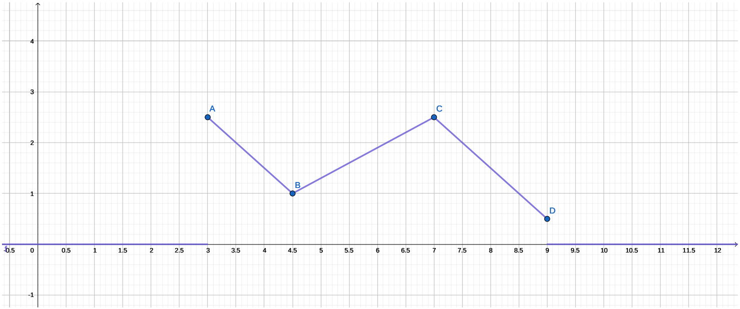
- *spojitosť a linearita*

$$x \in \left\langle 3, \frac{9}{2} \right\rangle : s_0(x) = \frac{5}{2} \cdot \frac{x - \frac{9}{2}}{3 - \frac{9}{2}} + 1 \cdot \frac{x - 3}{\frac{9}{2} - 3},$$

$$x \in \left\langle \frac{9}{2}, 7 \right\rangle : s_1(x) = 1 \cdot \frac{x - 7}{\frac{9}{2} - 7} + \frac{5}{2} \cdot \frac{x - \frac{9}{2}}{7 - \frac{9}{2}},$$

$$x \in \langle 7, 9 \rangle : s_2(x) = \frac{5}{2} \cdot \frac{x - 9}{7 - 9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x - 7}{9 - 7}.$$

Lineárny splajn



Všetky časti sú kvadratické:

- *všeobecne pre 4 uzly:*

$$x \in \langle x_0; x_1 \rangle : s_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2,$$

$$x \in \langle x_1; x_2 \rangle : s_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2,$$

$$x \in \langle x_2; x_3 \rangle : s_2(x) = a_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2.$$

- *naša úloha:*

$$x \in \left\langle 3, \frac{9}{2} \right\rangle : s_0(x) = a_0 + b_0(x - 3) + c_0(x - 3)^2,$$

$$x \in \left\langle \frac{9}{2}, 7 \right\rangle : s_1(x) = a_1 + b_1 . \left(x - \frac{9}{2}\right) + c_1 \left(x - \frac{9}{2}\right)^2,$$

$$x \in \langle 7, 9 \rangle : s_2(x) = a_2 + b_2(x - 7) + c_2(x - 7)^2.$$

Ako určíme koeficienty a_i, b_i, c_i?

Kvadratický splajn

Funkčné hodnoty:

- $s_0(3) = \frac{5}{2}$,
- $s_1(\frac{9}{2}) = 1$,
- $s_2(7) = \frac{5}{2}$,
- $s_2(9) = \frac{1}{2}$.

Spojitosť

- $s_0(\frac{9}{2}) = s_1(\frac{9}{2})$,
- $s_1(7) = s_2(7)$.

Spojitosť prvej derivácie

- $s_0'(\frac{9}{2}) = s_1'(\frac{9}{2})$,
- $s_1'(7) = s_2'(7)$.

Deviata podmienka?
napr.: $s_0''(x_0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$ *(overte si to!)*

(Príklad, riešenie)

Funkčné hodnoty:

$$s_0(3) = a_0 + b_0(3-3) + c_0(3-3)^2 = a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{5}{2},$$

$$s_1\left(\frac{9}{2}\right) = a_1 + b_1\left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2}\right) + c_1(\frac{9}{2} - \frac{9}{2})^2 = a_1 \Rightarrow a_1 = 1,$$

$$s_2(7) = a_2 + b_2(7-7) + c_2(7-7)^2 = a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{5}{2},$$

$$s_2(9) = a_2 + b_2(9-7) + c_2(9-7)^2 = \frac{5}{2} + 2b_2 + 4c_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow b_2 + 2c_2 = -1.$$

Kvadratický splajn

(Príklad, riešenie)

Spojitosť

$$s_0\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{5}{2} + b_0\left(\frac{9}{2} - 3\right) + c_0(4,5-3)^2 = s_1\left(\frac{9}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow b_0 + 1,5c_0 = -1,$$

$$s_1(7) = 1 + b_1\left(7 - \frac{9}{2}\right) + c_1\left(7 - \frac{9}{2}\right)^2 = s_2(7) = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2}b_1 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 c_1 = \frac{3}{2}.$$

(Príklad, riešenie)

Hladkosť=spojitosť prvej derivácie

- $s_0'(x) = b_0 + 2c_0(x-3)$,
- $s_1'(x) = b_1 + 2c_1\left(x - \frac{9}{2}\right)$,
- $s_2'(x) = b_2 + 2c_2(x-7)$.

Dosadíme

$$s_0'\left(\frac{9}{2}\right) = b_0 + 2c_0\left(\frac{9}{2} - 3\right) = s_1'\left(\frac{9}{2}\right) = b_1 \Rightarrow b_0 + 3c_0 = b_1,$$

$$s_1'(7) = b_1 + 2c_1(7 - 4,5) = s_2'(7) = b_2 \Rightarrow b_1 + 5c_1 = b_2.$$

Kvadratický splajn

(Príklad, riešenie, pokr.)

Určili sme 4 koeficienty (a_0, a_1, a_2, c_0) *a máme 5 rovníc:*

$$b_2 + 2c_2 = -1$$

$$b_0 + 3c_0 = b_1$$

$$b_1 + 5c_1 = b_2$$

$$b_0 + \frac{3}{2}c_0 = -1$$

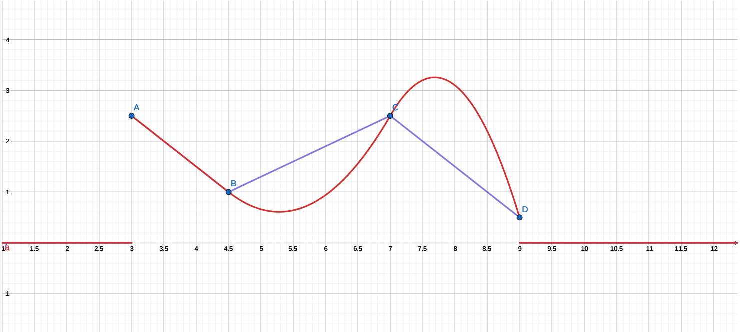
$$\frac{5}{2}b_1 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 c_1 = \frac{3}{2}$$

Kvadratický splajn

(Príklad, riešenie, pokr.)

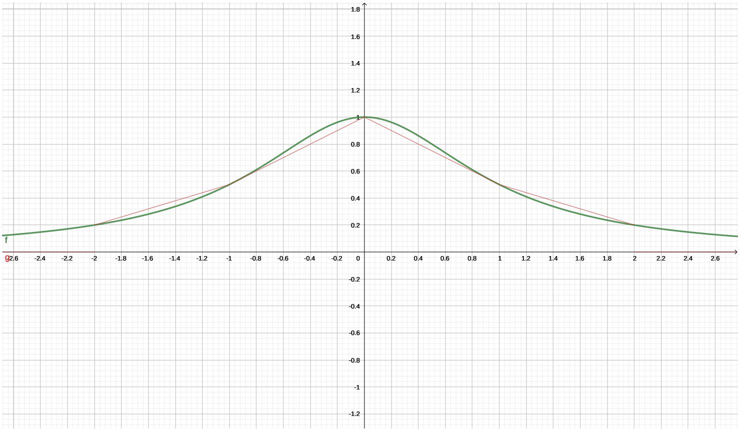
Dostaneme:

- $x \in \langle 3; \frac{9}{2} \rangle : s_0(x) = \frac{5}{2} - (x - 3)$
- $x \in \langle \frac{9}{2}; 7 \rangle : s_1(x) = 1 - (x - \frac{9}{2}) + \frac{16}{25}(x - \frac{9}{2})^2$
- $x \in \langle 7; 9 \rangle : s_2(x) = \frac{5}{2} + \frac{11}{5}(x - 7) - \frac{8}{5}(x - 7)^2$



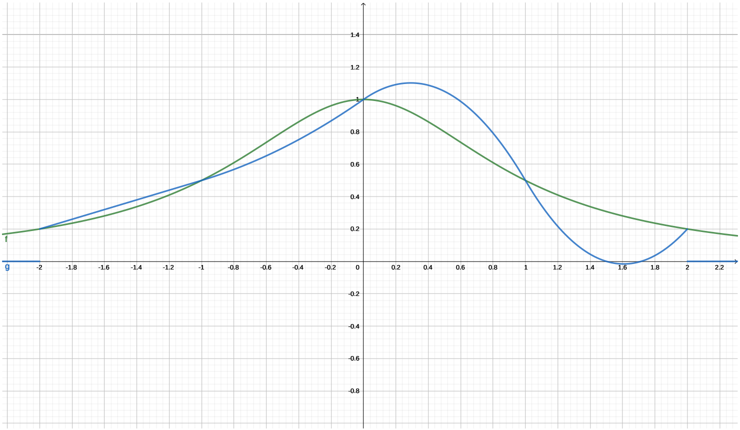
Lineárny splajn

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$



Kvadratický splajn

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$



Kubický splajn

- *spojitosť*
- *hladkosť=spojitosť prvej derivácie*
- *spojitosť druhej derivácie*

Kubický splajn

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$