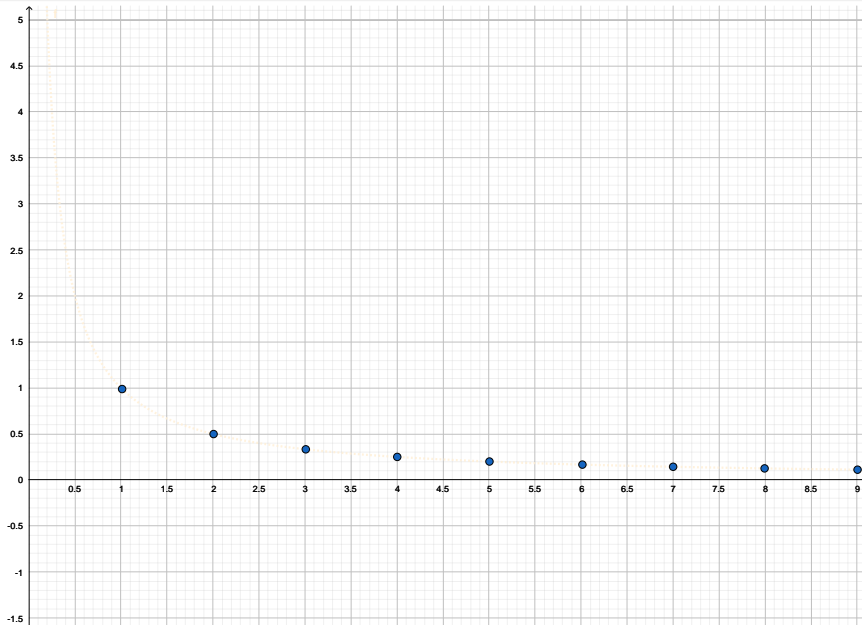


# Postupnosti a limita postupnosti

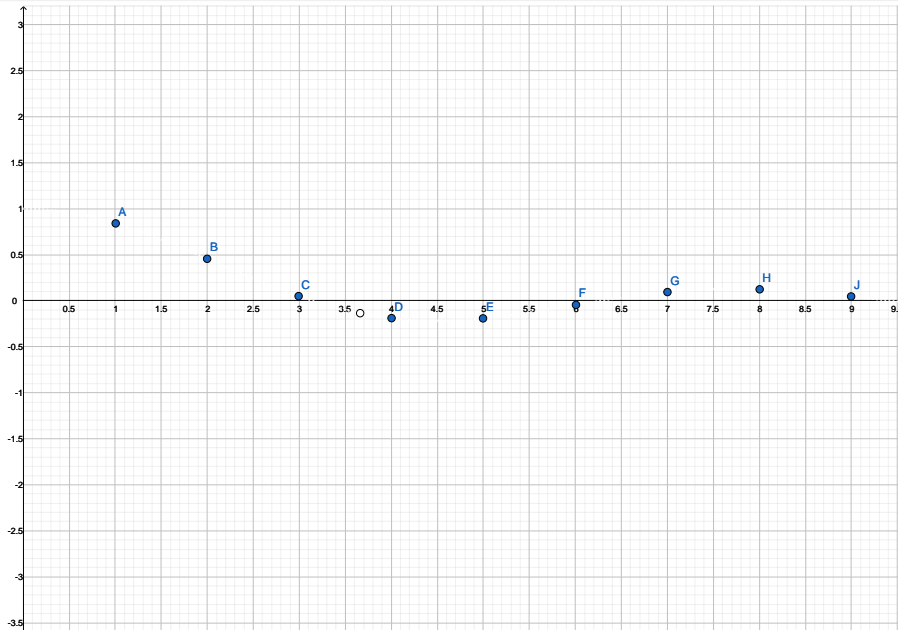
February 27, 2020

**Postupnosť** je predpis (pravidlo), ktorý každému prirodzenému číslu priraduje nejaký prvok z danej množiny  $A$ . (Pritom predpokladáme, že množina  $A$  je neprázdna, inak by sa predsa žiaden taký predpis nedal vymyslieť.) Podrobnejšie hovoríme o postupnosti prvkov množiny  $A$ . Postupnosť môžeme chápať aj ako špeciálny prípad zobrazení.

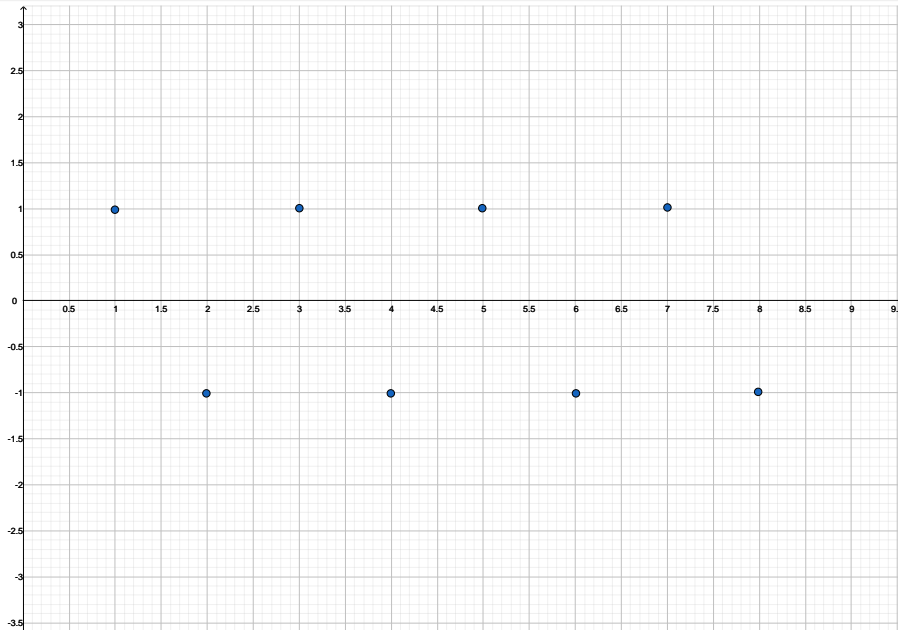
# Postupnosti



# Postupnosti



# Postupnosti



- Aritmetická postupnosť
- Geometrická postupnosť
- Rekurentne zadaná postupnosť
- Vybraná (pod)postupnosť

## Definícia (Okolie bodu)

**Okolím bodu**  $a \in \mathbb{R}$  (resp.  $\varepsilon$ -okolím) rozumieme množinu

$$\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

*bod  $a$  sa nazýva stred okolia a číslo  $\varepsilon$  polomer okolia.*

*Množinu*

$$\mathcal{U}^*(a, \varepsilon) = \mathcal{U}(a, \varepsilon) - \{a\} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < |x - a| < \varepsilon\}$$

*budeme nazývať **redukovaným (rýdzim) okolím bodu**  $a \in \mathbb{R}$ .  
(Pre naše potreby obvykle predpokladáme, že  $\varepsilon$  je ľubovoľne malé.)*

## Definícia (Hromadný bod)

*Bod  $a \in R$  je **hromadný bod** množiny  $M \subseteq R$ , ak v každom jeho redukovanom okolí leží aspoň jeden bod  $x \in M$ .*



## Definícia

$$M \leq a \quad (a \leq M) \iff \forall x \in M; x \leq a \quad (\forall x \in M; a \leq x)$$

- Ak platí  $M \leq a, a \in R$ , hovoríme, že  $a$  je **horné ohraničenie množiny  $M$**  a množina  $M$  je **zhora ohraničená**.
- Ak platí  $a \leq M, a \in R$ , hovoríme, že  $a$  je **dolné ohraničenie množiny  $M$**  a množina  $M$  je **zdola ohraničená**.
- $a \in R$  je **najväčší prvok množiny  $M$** , ak platí  $a \in M$  a  $M \leq a$ .
- $a \in R$  je **najmenší prvok množiny  $M$** , ak platí  $a \in M$  a  $a \leq M$ .

## Definícia

*Nech  $M \subset \mathbb{R}$*

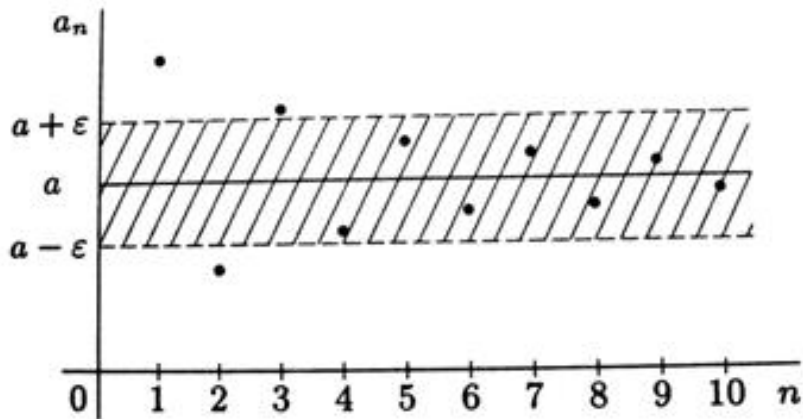
- *Najmenšie horné ohraničenie množiny  $M$  nazývame **supremum množiny  $M$** .*

$$\sup M = \min\{x \in \mathbb{R}; M \leq x\}.$$

- *Najväčšie dolné ohraničenie množiny  $M$  nazývame **infimum množiny  $M$** .*

$$\inf M = \max\{x \in \mathbb{R}; M \geq x\}.$$

# Limita postupnosti



- Hovoríme, že číslo  $a$  je **limitou postupnosti**  $a_1, a_2, \dots$  ak platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0; \quad n > n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

- Hovoríme, že číslo  $a$  je **limitou postupnosti**  $a_1, a_2, \dots$  ak platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0; \quad n > n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

- Nech ku každému číslu  $A$  existuje  $n_0$  tak, že pre každé  $n > n_0$  je  $a > A$ . Potom hovoríme, že postupnosť má **nevlastnú limitu**  $+\infty$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

- Hovoríme, že číslo  $a$  je **limitou postupnosti**  $a_1, a_2, \dots$  ak platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0; \quad n > n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

- Nech ku každému číslu  $A$  existuje  $n_0$  tak, že pre každé  $n > n_0$  je  $a > A$ . Potom hovoríme, že postupnosť má **nevlastnú limitu**  $+\infty$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

- Nech ku každému číslu  $A$  existuje  $n_0$  tak, že pre každé  $n > n_0$  je  $a < A$ . Potom hovoríme, že postupnosť má **nevlastnú limitu**  $-\infty$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

- *Limita môže byť:*
  - *vlastná,*
  - *nevlastná.*
- *Postupnosť, ktorá má vlastnú limitu, sa nazýva **konvergentná**. Postupnosť, ktorá má nevlastnú limitu alebo nemá žiadnu limitu, sa nazýva **divergentná**.*

- Každá postupnosť má najviac se jednu limitu.
- Bod  $b$  sa nazýva **hromadnou hodnotou** postupnosti  $(a_n)$ , ak pre každé okolie  $\mathcal{U}(b)$  je  $a_n \in \mathcal{U}(b)$  pre nekonečne mnoho indexov  $n$ .
- **Horná limita**- $\limsup a_n$ -najväčšia z hromadných hodnôt postupnosti  $(a_n)$
- **Dolná limita**- $\liminf a_n$ -najmenšia z hromadných hodnôt postupnosti  $(a_n)$



- *Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.  
Každá ohraničená postupnosť je konvergentná?*

- *Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.  
Každá ohraničená postupnosť je konvergentná?*
- *Monotónna a ohraničená postupnosť je konvergentná.*

- *Každá konvergentná postupnosť je ohraničená. Každá ohraničená postupnosť je konvergentná?*
- *Monotónna a ohraničená postupnosť je konvergentná.*
- *Nech  $(a_n)$  je konvergentná postupnosť. Každá jej vybraná podpostupnosť je konvergentná a má s ňou rovnakú limitu.*

- Ak  $\lim a_n = a$ ,  $\lim b_n = b$ ,  
je

$$\lim(a_n + b_n) = a + b,$$

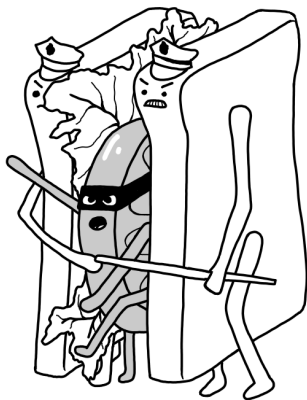
$$\lim a_n \cdot b_n = a \cdot b,$$

ak  $b \neq 0$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

- Nech existuje  $\lim a_n = a$ . Potom  $\lim |a_n| = |a|$

# Veta o dvoch policajtoch (sandwich theorem)



Autor obrázku: Zuzka Hliněná



# Veta o dvoch policajtoch (sandwich theorem)

- *(O dvoch policajtoch) Nech  $\lim a_n = \lim b_n = a$ , a nech existuje  $n_1 \in \mathbb{N}$  tak, že pro  $n > n_1$  je  $a_n \leq c_n \leq b_n$ . Potom existuje limita  $(c_n)$  a  $\lim c_n = a$ .*

# Veta o dvoch policajtoch (sandwich theorem)

- (O dvoch policajtoch) Nech  $\lim a_n = \lim b_n = a$ , a nech existuje  $n_1 \in \mathbb{N}$  tak, že pro  $n > n_1$  je  $a_n \leq c_n \leq b_n$ . Potom existuje limita  $(c_n)$  a  $\lim c_n = a$ .
- Nech  $\lim a_n = 0$ , a  $(b_n)$  je ohraničená postupnosť. Potom  $\lim a_n \cdot b_n = 0$ .

# Veta o dvoch policajtoch (sandwich theorem)

- (O dvoch policajtoch) Nech  $\lim a_n = \lim b_n = a$ , a nech existuje  $n_1 \in \mathbb{N}$  tak, že pro  $n > n_1$  je  $a_n \leq c_n \leq b_n$ . Potom existuje limita  $(c_n)$  a  $\lim c_n = a$ .
- Nech  $\lim a_n = 0$ , a  $(b_n)$  je ohraničená postupnosť. Potom  $\lim a_n \cdot b_n = 0$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty \wedge a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ .



# Věta o dvou policajtech (sandwich theorem)

- (O dvou policajtech) Nech  $\lim a_n = \lim b_n = a$ , a nech existuje  $n_1 \in \mathbb{N}$  tak, že pro  $n > n_1$  je  $a_n \leq c_n \leq b_n$ . Potom existuje limita  $(c_n)$  a  $\lim c_n = a$ .
- Nech  $\lim a_n = 0$ , a  $(b_n)$  je ohraničená postupnost. Potom  $\lim a_n \cdot b_n = 0$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty \wedge a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0 \wedge$  takmer všetky  $a_n$  sú kladné (záporné)  
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  ( $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ).

# Veta o dvoch policajtoch (sandwich theorem)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828 \dots$$

