evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

MATEMATICKÁ ANALÝZA pro FIT

RNDr. Vlasta Krupková, CSc.,
RNDr. Petr Fuchs, PhD.

Tento text byl vytvořen v rámci realizace projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0156,
Inovace výuky matematických předmětů v rámci studijních programů FEKT a FIT VUT v Brně,
realizovaném na Vysokém učení technickém v Brně.

Obsah

1 Úvod **7**

1.1 Množiny . . . 9

Číselné množiny . . . 9

Reálná čísla . . . 10

Suprémum, infimum, maximum, minimum, ohraničené (omezené) množiny 12

Shrnutí . . . 13

Cvičení . . . 13

Výsledky . . . 14

1.2 Funkce, zobrazení . . . 15

Pojem a základní vlastnosti funkce . . . 16

Složená funkce . . . 17

Funkce prosté a funkce inverzní . . . 19

Algebraické operace mezi funkcemi . . . 22

Monotonní funkce . . . 22

Funkce sudé a liché, funkce periodické . . . 23

Funkce ohraničené . . . 25

Elementární funkce . . . 26

Polynomy, kořeny polynomu . . . 26

Hornerovo schéma . . . 27

Racionální lomené funkce, rozklad na parciální zlomky . . . 30

Mocninná funkce . . . 32

Exponenciální a logaritmická funkce . . . 32

Goniometrické funkce . . . 33

Cyklometrické funkce . . . 35

Hyperbolické funkce . . . 35

Posloupnosti . . . 36

Pro zájemce . . . 37

Shrnutí . . . 39

Otázky a úlohy . . . 41

Cvičení . . . 45

Výsledky . . . 49

2 Diferenciální počet **53**
2.1 Úvodní poznámky – motivace 53
2.2 Limita 54
Definice limity 56
Limita parciální funkce (relativní limita) 58
Limita posloupnosti 59
Věty o limitách 60
Věty o nevlastních limitách 64
Limita složené funkce 67
Asymptoty grafu funkce 70
Pro zájemce 71
Shrnutí 72
Otázky a úkoly 74
Cvičení 76
Výsledky 77
2.3 Spojitost 77
Definice spojitosti 77
Klasifikace nespojitostí 78
Funkce spojité na intervalu 80
Shrnutí 82
Otázky a úkoly 82
Cvičení 83
2.4 Derivace 84
Motivace 84
Derivace v bodě 85
Derivace na intervalu 87
Základní pravidla pro derivování 89
Diferenciál funkce 93
Neurčité výrazy, L'Hospitalovo pravidlo 94
Věty o přírůstku funkce 96
Pro zájemce 97
Shrnutí 99
Slovník a gramatika pro derivace 100
Otázky a úkoly 101
Cvičení 103
Výsledky 106
2.5 Derivace vyšších řádů, Taylorův polynom 106
Derivace a diferenciály vyšších řádů 107
Linearizace 108
Aproximace funkce Taylorovým polynomem 109
Shrnutí 113
Taylorovy formule pro některé funkce 114
Otázky a úkoly 114
Cvičení 115

Výsledky 116

2.6 Optimalizace 117

Lokální extrémy 117

Absolutní (globální) extrémy 120

Shrnutí 125

Otázky a úkoly 125

Cvičení 127

Výsledky 129

2.7 Průběh funkce 129

Konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body 129

Vyšetření průběhu funkce 132

Shrnutí 138

Otázky a úkoly 138

Cvičení 139

Výsledky 139

3 Integrální počet **141**

3.1 Neurčitý integrál 141

Primitivní funkce 141

Neurčitý integrál 143

3.2 Integrační metody 144

Integrace některých iracionálních funkcí 153

Integrace trigonometrických funkcí 157

Shrnutí 160

Otázky a úlohy 163

Cvičení 163

Výsledky 166

3.3 Určitý integrál 167

Určitý (Riemannův) integrál 168

Vlastnosti určitého integrálu 171

Odhad určitého integrálu, věta o střední hodnotě 172

Fundamentální věta 173

Newton-Leibnizova věta 175

Metoda per partes pro určité integrály 176

Metoda substituce pro určité integrály 177

3.4 Aplikace určitého integrálu 178

Obsah rovinné oblasti 178

Objem tělesa 178

Objem rotačního tělesa 179

Délka rovinné křivky 179

Pro zájemce 181

Shrnutí 181

Otázky a úlohy 183

Cvičení 184

Výsledky . . . 186
3.5 Nevlastní integrály . . . 186
Nevlastní integrál na neohraničeném intervalu . . . 187
Integrály z neohraničených funkcí . . . 188
Obecná definice nevlastního integrálu . . . 190
Shrnutí . . . 191
Cvičení . . . 192
Výsledky . . . 192

4 Nekonečné řady **193**
4.1 Číselné řady . . . 193
Základní pojmy . . . 193
Vlastnosti číselných řad . . . 195
Kriteria konvergence . . . 197
Absolutní konvergence . . . 201
Přerovnání řad, násobení řad . . . 202
Numerická sumace . . . 205
Pro zájemce . . . 207
Shrnutí . . . 207
Otázky a úkoly . . . 210
Cvičení . . . 211
Výsledky . . . 212
4.2 Mocninné řady . . . 212
Základní pojmy . . . 213
Poloměr konvergence . . . 214
Derivace a integrace mocninných řad . . . 216
Taylorovy řady . . . 218
Pro zájemce . . . 222
Shrnutí . . . 224
Taylorovy (Maclaurinovy) řady některých elementárních funkcí . . . 225
Otázky a úkoly . . . 225
Cvičení . . . 226
Výsledky . . . 227

5 Diferenciální počet II. **228**
5.1 Bodové eukleidovské prostory . . . 228
Vektorový a smíšený součin v $\mathbb{E}_3$ . . . 229
Pro zájemce . . . 231
Otázky a úkoly . . . 232
Cvičení . . . 232
5.2 Funkce více proměnných . . . 233
Pojem funkce dvou a více proměnných, definiční obory, graf . . . 233
Složená funkce . . . 239
Shrnutí . . . 240

Otázky a úkoly 241
Cvičení 242
Výsledky 244
5.3 Limita, spojitost 246
Vzdálenost bodů, okolí 246
otevřené, uzavřené množiny, oblasti 247
Definice limity a spojitosti 247
Věty o limitách 249
Shrnutí 253
Otázky a úkoly 253
Cvičení 254
Výsledky 255
5.4 Derivace 255
Parciální derivace 255
Geometrický význam parciálních derivací 255
Směrová derivace 257
Gradient 259
Geometrický význam gradientu 259
Diferenciál funkce více proměnných 260
Rovnice tečné roviny 260
Shrnutí 263
Otázky a úkoly 264
Cvičení 265
Výsledky 268
5.5 Derivace a diferenciály vyšších řádů, Taylorova věta 269
Diferenciál k-tého řádu 270
Aproximace funkce Taylorovým polynomem 271
Shrnutí 273
Otázky a úkoly 274
Cvičení 275
Výsledky 276
5.6 Optimalizace 276
Lokální extrémy 276
Nutná podmínka pro extrém 276
Postačující podmínka pro extrém 277
Vázané a absolutní extrémy 280
Shrnutí 287
Otázky a úkoly 288
Cvičení 290
Výsledky 291

6 Integrální počet II **292**
6.1 Dvojný a trojný integrál 292
Dvojný a trojný integrál na intervalu 292

Fubiniova věta pro interval 296
Měřitelné množiny, elementární oblasti 299
Integrály na měřitelných množinách 303
Fubiniova věta pro elementární oblast 304
Shrnutí 308
Otázky a úkoly 310
Cvičení 312
Výsledky 314
6.2 Transformace integrálů 315
Polární souřadnice 316
Cylindrické souřadnice 319
Sférické souřadnice 321
Shrnutí 325
Cvičení 326
Výsledky 327

7 Dodatek: Geometrie **328**
7.1 Bodové eukleidovské prostory 328
Vektorový a smíšený součin v $\mathbb{E}_3$ 329
Pro zájemce 330
Otázky a úkoly 331
Cvičení 332
7.2 Lineární útvary v bodových prostorech 332
Přímky a body v E_2 333
Roviny, přímky a body v E_3 336
Otázky a úkoly 340
Cvičení 341
Výsledky 343
7.3 Kvadratické útvary v bodových prostorech 344
Poznámka o lineárních a kvadratických formách 344
Kvadratické útvary v E_2 – kuželosečky 349
Kvadratické útvary v E_3 – kvadriky 351
Shrnutí 353
Kanonické tvary nedegenerovaných kuželoseček 353
Kanonické tvary degenerovaných kuželoseček 353
Kanonické tvary nedegenerovaných kvadrik 354
Kanonické tvary reálných degenerovaných kvadrik 355
Cvičení 356

8 Přehled literatury **359**

1 Úvod

MATEMATIKA pochází z řeckého slova MÁTHEMA, což znamená vědění a poznání. Matematika nejsou počty – ty jsou jen jedním z nástrojů, které navíc může často za nás vykonat počítač. Je prostředkem k popisu a formalizaci jevů v okolním světě, umožňuje odhadnout důsledky těchto jevů a najít souvislosti mezi nimi.

Tento učební text je určen studentům Bakalářského studijního programu Informační technologie na FIT a má sloužit k samostatnému studiu předmětu Matematická analýza v letním semestru prvního ročníku studia. Cílem tohoto kursu je

- získat informaci o prostředcích a metodách matematické analýzy
- získat nový přístup k matematickým metodám:
  - ne naučit se memorovat formule a jednoduše je užívat při řešení příkladů,
  - ale umět aplikovat základní myšlenky (koncept)
  - a porozumět, proč jsou správné.

Matematická analýza jistě není profilový předmět oboru Informační technologie, ovšem jisté znalosti pojmů a metod zde používaných patří mezi základní vědomosti, které by měl znát absolvent technické vysoké školy pro další praxi. Je to ovšem velmi rozsáhlá disciplina a v jednom semestru studia je možné o ní podat pouze informativní přehled. Studenti by po absolvování předmětu měli znát základní myšlenku Matematické analýzy – zkoumání chování systémů v pohybu, které je zde popsáno pomocí reálných funkcí a jejich derivací nebo integrálů.

Při rozsáhlosti celé problematiky musí být těžiště studia v samostatné práci, pro kterou je nezbytné mít k dispozici dosti podrobný a srozumitelný studijní materiál. Zavádí se zde proto pouze skutečně nezbytné pojmy a postupy, v mnoha případech uvedené motivací. Přitom ale není možné slevit z přesnosti výkladu – proto, i když je to nepopulární, postupuje se cestou „definice – věta – důkaz“. Tato cesta přes veškerou kritiku nematematiků, jíž se jí v současné době dostává, zůstává nejpřehlednější a v podstatě jedinou možnou formou matematického výkladu. Aby byl usnadněn přechod od teoretického pochopení výkladu k schopnosti získané vědomosti a dovednosti aplikovat, je zde uvedeno mnoho ilustrujících řešených příkladů a v závěru každé kapitoly cvičení pro samostudium.

Učební text je přepracovanou verzí původního elektronického textu. Změny proti původní verzi jsou především v zařazení odkazů na Maplety - na soubory vyrobené v Maplu, pomocí kterých se dá jednoduše znázornit i řešit celá řada úloh, které se zde vyskytnou. Další změny byly vedeny snahou zpřehlednit výklad - některé partie jsou vysvětlovány podrobněji, jsou zde zařazeny další řešené příklady, přičemž důkazy vět a další podrobnosti jsou vždy uvedeny až na konci každé kapitoly v částech Pro zájemce. Na konci každé kapitoly je také vždy (v rámečku) Shrnutí – stručný přehled pojmů a pravidel k příslušnému tématu.

Arthur Shopenhauer napsal: „Žádat, aby někdo všechno, co kdy četl, podržel v paměti, je jako žádat, aby v sobě nosil všechno, co kdy snědl. Žil z toho tělesně, z onoho duševně, a stal se tím, čím je. Tak jako tělo každého přijímá pouze to, co snáší, každý si zapamatuje jen to, co ho zajímá, co se hodí do jeho myšlenkové soustavy nebo k jeho účelům.“ Věříme, že něco z tohoto textu bude čtenáři k užitku. Snad přesto, že mnohé zapomene, zapamatuje si, kde to četl a aby se k textu případně později vrátil.
Uveďme ještě myšlenku Démokrita z Abdér: „Vzdělání má hořké kořeny, ale sladké ovoce.“

V našem kurzu nebudeme postupovat systematicky od úplného začátku, ale budeme navazovat na látku ze střední školy. Úvodní kapitola je věnována přehlednému opakování, popřípadě doplnění nejdůležitějších pojmů, které budeme užívat. Sledujeme i cíl upřesnit a sjednotit některé názvy a označení.

1.1 Množiny

Číselné množiny

Číselné obory se obvykle konstruují postupně tak, že se vychází od oboru ***přirozených čísel*** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Součet a součin přirozených čísel je přirozené číslo. $\mathbb{N}$ se rozšíří na obor celých čísel $\mathbb{Z}$ – ***celým číslem*** nazýváme každé číslo, které lze vyjádřit jako rozdíl přirozených čísel. Součet, součin a rozdíl celých čísel je celé číslo.

Každé číslo, které můžeme vyjádřit jako podíl celého čísla a celého čísla různého od nuly, nazýváme ***racionálním číslem***. Obor racionálních čísel značíme písmenem $\mathbb{Q}$. Součet, rozdíl, součin a podíl dvou racionálních čísel (kromě dělení nulou) je racionální číslo. Všechna racionální čísla můžeme vyjádřit ve tvaru konečných nebo nekonečných periodických desetinných zlomků. Číslo, které lze vyjádřit ve tvaru nekonečného neperiodického desetinného zlomku, nazýváme ***iracionálním číslem***. Takovými čísly jsou např. čísla $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$, π atd. Množina všech racionálních a iracionálních čísel se nazývá obor ***reálných čísel*** $\mathbb{R}$.

Množina reálných čísel není uzavřená k opperaci tvoření odmocnin – sudé odmocniny ze záporných čísel nejsou reálná čísla; např. rovnice

$$x^2 + 1 = 0, \qquad x^2 + 2x + 2 = 0 \quad \big(\text{tj. } (x+1)^2 + 1 = 0\big)$$

nejsou v $\mathbb{R}$ řešitelné.

Při hledání kořenů algebraických rovnic je však vhodné se sudými odmocninami ze záporných čísel (především s druhou odmocninou z čísla -1) počítat:

Cardanův vzorec pro rovnici $x^3 = ax + b$ má tvar

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

a má smysl pouze pro

$$c = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 \geq 0.$$

Ale například rovnice

$$x^3 = 15x + 4 \quad \text{má řešení} \quad x = 4, \quad \text{přičemž} \quad c = 2^2 - 5^3 = -121.$$

Podívejme se, co dostaneme, jestliže formálně dosadíme do Cardanova vzorce:

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} = (*)$$
$$= 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4,$$

přičemž rovnost označenou $(*)$ získáme následujícím způsobem:

$$\left(2 \pm \sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 \pm 3 \cdot 2^2 \cdot \left(\sqrt{-1}\right) + 3 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{-1}\right)^2 \pm \left(\sqrt{-1}\right)^3 =$$
$$= 8 \pm 12\sqrt{-1} - 6 \pm (-1) \cdot \sqrt{-1} = 2 \pm 11\sqrt{-1}.$$

Tedy při formálně správném výpočtu s použitím „imaginární“ odmocniny z čísla -1 dostaneme správný (a přitom reálný) výsledek $x = 4$.

Podobné úvahy vedly k zavedení oboru ***komplexních čísel*** $\mathbb{C}$. Komplexním číslem rozumíme číslo z tvaru $z = x + j\,y$, kde $x, y \in \mathbb{R}$ a j je tzv. imaginární jednotka, pro kterou platí $j^2 = -1$.

Reálná čísla

Množinu M, jejíž všechny prvky jsou čísla, nazýváme ***číselnou množinou***. Pokud neřekneme výslovně nic jiného, budeme v dalším hovořit o číselných množinách reálných čísel.

Nejčastěji užívanými množinami reálných čísel jsou ***intervaly***; připomeňme jejich definici:

Definice 1.1. Nechť platí $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Množina

1. $(a, b) = \{x | a < x < b\}$ se nazývá ***otevřený interval***,
2. $\langle a, b\rangle = \{x | a \le x \le b\}$ se nazývá ***uzavřený interval***,
3. $\langle a, b) = \{x | a \le x < b\}$ se nazývá ***zleva uzavřený a zprava otevřený interval***,
4. $(a, b\rangle = \{x | a < x \le b\}$ se nazývá ***zleva otevřený a zprava uzavřený interval***.

Vzhledem k uspořádání reálných čísel je vhodné zavést symboly $-\infty$ a ∞ předpisem

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad (-\infty < x) \wedge (x < \infty).$$

Body $-\infty$ a ∞ se nazývají ***nevlastní body*** reálné osy.

Zavedeme označení: $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = \overline{\mathbb{R}}$.

Dále definujeme následující intervaly:

1. $(a, \infty) = \{x | a < x\}$,

2. $\langle a, \infty) = \{x | a \leq x\}$,

3. $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$,

4. $(-\infty, b\rangle = \{x | x \leq b\}$.

Podobně píšeme $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Speciálním případem intervalů jsou tzv. okolí bodu:

Definice 1.2. ***Okolím bodu*** $a \in \mathbb{R}$ (také ε- okolím) rozumíme množinu

$$\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} |\ |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

bod a se nazývá ***střed okolí*** a číslo ε ***poloměr*** okolí. Množinu

$$\mathcal{U}^*(a, \varepsilon) = \mathcal{U}(a, \varepsilon) \setminus \{a\} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} |\ 0 < |x - a| < \varepsilon\}$$

budeme nazývat ***redukovaným*** (***ryzím***) ***okolím*** bodu $a \in \mathbb{R}$.

(Pro naše potřeby obvykle předpokládáme, že ε je libovolně malé.)

Není-li poloměr okolí ε podstatný, píšeme místo $\mathcal{U}(a, \varepsilon)$ a $\mathcal{U}^*(a, \varepsilon)$ pouze $\mathcal{U}(a)$ a $\mathcal{U}^*(a)$.

Okolím $\mathcal{U}(\infty)$ bodu ∞ budeme rozumět každý interval (K, ∞) a okolím $\mathcal{U}(-\infty)$ bodu $-\infty$ budeme rozumět každý interval $(-\infty, K)$.

Pomocí okolí můžeme definovat pojem tzv. hromadného bodu množiny, který budeme potřebovat při zavádění pojmu limity:

Definice 1.3. Bod $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je ***hromadný bod*** množiny $M \subseteq \mathbb{R}$, jestliže v každém jeho redukovaném okolí leží alespoň jeden bod $x \in M$.

Příklad 1.4.

1. Každý bod intervalu $(0, 1\rangle$ je hromadný. Navíc bod 0, který do intervalu nepatří, je jeho hromadným bodem.

2. Množina $\mathbb{N}$ má v $\overline{\mathbb{R}}$ jediný hromadný bod ∞.

3. Bod 2 množiny $M = (0, 1) \cup \{2\} \cup (3, \infty)$ není jejím hromadným bodem, neboť jeho okolí $\mathcal{U}(2) = (2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2})$ nemá s M jiný společný bod než 2. Takový bod se nazývá ***izolovaný*** bod množiny M.

Suprémum, infimum, maximum, minimum, ohraničené (omezené) množiny

Je-li $M \subset \overline{\mathbb{R}}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, zavedeme označení:

$$M \leq a \text{ (resp. } a \leq M) \Leftrightarrow \forall x \in M : x \leq a \quad \text{(resp. } \forall x \in M : a \leq x).$$

Definice 1.5.

Platí-li $M \leq a$, $a \in \mathbb{R}$, řekneme, že a je ***horní mez*** (závora, ohraničení) ***množiny*** M a že množina M je ***shora ohraničená***,

platí-li $a \leq M$, $a \in \mathbb{R}$, řekneme, že a je ***dolní mez*** (závora, ohraničení) ***množiny*** M a že množina M je ***zdola ohraničená***,

řekneme, že $a \in \mathbb{R}$ je ***největší prvek množiny*** M a píšeme $a = \max M$, jestliže platí $M \leq a \ \wedge a \in M$,

řekneme, že $a \in \mathbb{R}$ je ***nejmenší prvek množiny*** M a píšeme $a = \min M$, jestliže platí $a \leq M \ \wedge a \in M$.

Příklad 1.6. $\min\,(-2,3\rangle$ neex., $\max\,(-2,3\rangle = 3$; $\max \mathbb{N}$ neex., $\min \mathbb{N} = 1$.

Definice 1.7. Nechť $M \subset \mathbb{R}$.

Nejmenší horní mez množiny M nazýváme ***suprémum množiny*** M. Není-li množina M shora ohraničená, považujeme za její suprémum ∞. Píšeme

$$\sup M = \min \{x \,|\, x \in \overline{\mathbb{R}} \wedge M \leq x\}.$$

Největší dolní mez množiny M nazýváme ***infimum množiny*** M. Není-li množina M zdola ohraničená, považujeme za její infimum $-\infty$. Píšeme

$$\inf M = \max \{x \,|\, x \in \overline{\mathbb{R}} \wedge x \leq M\}.$$

Příklad 1.8. $\inf\,(-2,3\rangle = \max \{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, x \leq (-2,3\rangle\} = \max \{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, x \leq -2\} = -2$,

$\sup\,(-2,3\rangle = \min \{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, x \geq (-2,3\rangle\} = \min \{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, x \geq 3\} = 3$.

Příklad 1.9. $\sup \mathbb{N} = \min \{x \in \overline{\mathbb{R}} \,|\, \mathbb{N} \leq x\} = \min \{\infty\} = \infty$.

Bez důkazu uvedeme velmi důležitou větu:

Věta 1.10. *Každá podmnožina* $\mathbb{R}$ *má právě jedno suprémum a právě jedno infimum.*

Při axiomatické výstavbě oboru reálných čísel se uvádí následující Archimedův axiom:

$$\forall\, a \in (0,\infty)\, \exists\, n \in \mathbb{N} : \ a \leq n.$$

Platnost tohoto axiomu využijeme v následujícím příkladu:

Příklad 1.11. Ukážeme, že platí tvrzení: $\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Řešení.

$$\forall \varepsilon :\ \varepsilon > 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{\varepsilon} > 0 \ \Rightarrow |\text{Archimedův axiom}| \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} :\ \frac{1}{\varepsilon} < n$$

a poslední výrok je ekvivalentní s dokazovaným tvrzením. □

Shrnutí

V tomto odstavci jsme vyšetřovali číselné množiny:

- množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ a její podmnožiny: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, intervaly.

Pro obor reálných čísel jsme zavedli nové pojmy :

- rozšíření $\mathbb{R}$ o nevlastní body $\infty, -\infty$: $\overline{\mathbb{R}}$,
- okolí bodu $x \in \mathbb{R}$: interval $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$,
- redukované (ryzí) kolí bodu $x \in \mathbb{R}$: množina $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\}$,
- hromadný bod množiny: bod, v jehož libovolném redukovaném okolí leží alespoň jeden bod dané množiny,
- horní (resp. dolní) mez (závora) množiny: bod z $\mathbb{R}$, který je větší (resp. menší) nebo roven každému prvku této množiny,
- suprémum (resp. infimum) množiny: nejmenší z horních (resp. největší z dolních) mezí množiny.

Cvičení

1. Nechť $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Najděte množiny $A \cup A$, $A \cap A$, $A \setminus A$. Dají se výsledky zobecnit?

2. Nechť A je množina všech celých čísel dělitelných dvěma, B množina všech celých čísel dělitelných třemi, C množina všech celých čísel dělitelných šesti. Zjistěte, které z následujících vztahů jsou správné:

$$\begin{array}{llllll} a) & A \subset B, & b) & A \subset C, & c) & B \subset C, \\ d) & B \subset A, & e) & C \subset A, & f) & C \subset B, \\ g) & A \cup B = C, & h) & A \setminus B = C, & i) & A \cap B = C. \end{array}$$

3. Nechť M je množina všech přirozených čísel menších než 16, M_1 je její podmnožina, která obsahuje všechna sudá čísla, M_2 podmnožina, která obsahuje všechna čísla dělitelné třemi a M_3 podmnožina, která obsahuje všechna čísla dělitelná pěti. Najděte množiny:

a) $M_1 \cup M_2$,	*b*) $M_1 \cup M_2 \cup M_3$,
c) $M_2 \cap M_3$,	*d*) $M_1 \cap M_2 \cap M_3$,
e) $(M_1 \cup M_2) \cap M_3$,	*f*) $(M_1 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_3)$,
g) $M_2 \setminus M_1$,	*h*) $M_1 \setminus M_2$,
i) $(M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$,	*j*) $(M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2)$,
k) $(M_1 \cap M_2) \cup M_3$,	*l*) $(M_1 \cup M_2) \cap (M_2 \cup M_3)$.

4. Najděte suprémum a infimum množiny
   a) $M_1 = \left\{x \,|\, x = \frac{2n+1}{n} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$,
   b) $M_2 = \left\{x \,|\, x = \frac{2+(-1)^n}{n} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$,
   c) $M_3 = \{x \in \mathbb{R} \,|\; |3x-1| < x < |3x+1|\}$.

5. $M = \{0{,}5;\ 0{,}55;\ 0{,}555;\ \dots\}$. Dokažte, že $\sup M = \frac{5}{9}$.

6. Dokažte: Je-li $\emptyset \neq N \subset M$, potom
   $\inf M \leq \inf N, \quad \sup N \leq \sup M$.

7. Nechť A, B jsou neprázdné omezené množiny v $\mathbb{R}$. Označme
   $A + B = \{x + y \,|\, x \in A \wedge y \in B\}$.
   Dokažte:
   a) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$,
   b) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$,
   c) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$,
   d) $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$.

   Ukažte na příkladě, že zde nemusí platit rovnost.
   Co platí pro infima množin $A \cup B,\ A \cap B$?

Výsledky

1. A, A, $\emptyset$;

2. e), f), i);

3. a) $M \setminus \{1,5,7,11,13\}$, b) $M \setminus \{1,7,11,13\}$, c) $\{15\}$, d) $\emptyset$, e)f) $\{10,15\}$, g) $\{3,9,15\}$;

4. a) $\sup M_1 = 3$, $\inf M_1 = 2$, b) $\sup M_2 = \frac{3}{2}$, $\inf M_2 = 0$.

1.2 Funkce, zobrazení

V této kapitole se budeme věnovat základnímu pojmu, se kterým pracuje matematická analýza – pojmu funkce. Opět připomeneme pojmy známé ze střední školy a sjednotíme a upřesníme terminologii.

Připomeňme definici zobrazení (funkce), která byla uvedena v předmětu IDA v minulém semestru:

Definice 1.12. Nechť $f \subset A \times B$ je relace, pro kterou platí:

$$\forall x \in A \; \exists! y \in B : \; (x, y) \in f,$$

neboli ke každému $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$, pro které je $(x, y) \in f$. Potom řekneme, že f je ***zobrazení*** z A do B a píšeme

$$f : A \to B, \; x \mapsto y.$$

Prvek y se nazývá ***hodnota*** zobrazení f v x, nebo také ***obraz*** x a značí se $f(x)$.
Množina A se nazývá ***definiční obor*** zobrazení f a označuje se symbolem D_f nebo krátce D, množina $f(D_f) = \{f(x) | x \in D_f\}$ se nazývá ***obor hodnot*** zobrazení f a značí se symbolem H_f nebo krátce H.

Zobrazení (funkce) je tedy množina uspořádaných dvojic, jejichž první složka je prvkem definičního oboru a druhá prvkem oboru hodnot. Takovou množinu obvykle nemůžeme zadat výčtem prvků (uspořádaných dvojic); A i B jsou vesměs nekonečné množiny. V těchto případech, jak známo, používáme k charakterizaci množiny výrok – předpis, pomocí kterého se tyto uspořádané dvojice sestavují. Je zvykem chápat funkci přímo jako tento předpis a definovat zobrazení (funkci) následujícím způsobem:

Zobrazení (funkce) f množiny A do množiny B je předpis, který každému prvku $x \in A$ přiřadí právě jeden prvek $y \in B$.

Dvě zobrazení f, g ***jsou si rovna*** ($f = g$), rovnají-li se jako množiny, tedy platí-li

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (x, y) \in g,$$

neboli mají-li tentýž definiční obor D a platí $\forall x \in D : \; f(x) = g(x)$.

Definice 1.13. Jsou-li A, B množiny, definujeme:
a) ***Zúžení*** f na A (nebo též ***parciální zobrazení***) je zobrazení $f/_A$ s definičním oborem $A \cap D$, dané předpisem

$$f/_A : f/_A(x) = f(x), x \in A \cap D.$$

b) ***Obraz*** množiny A při zobrazení f – množina tvořená všemi funkčními hodnotami prvků z množiny A:

$$f(A) = \{f(x) | x \in A \cap D\}.$$

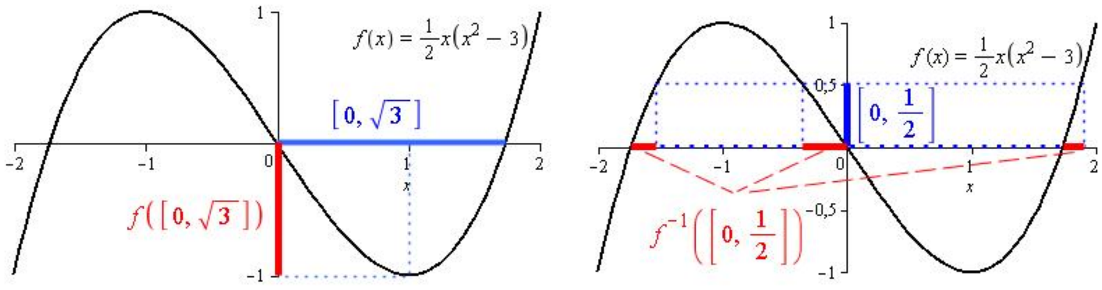
c) ***Vzor*** množiny B při zobrazení f – množina všech takových x, jejichž funkční hodnoty leží v množině B:

$$f^{-1}(B) = \{x \in D | f(x) \in B\}.$$

Poznamenejme, že a) a b) se nejčastěji používají v případech, že $A \subset D$, ale není to podmínkou.

Poznámka 1.14. Je-li $a \in \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zobrazení (funkce),
je podstatný rozdíl mezi symboly $f(a), f(\{a\})$ a $f(A)$ – je-li například $f(x) = x^2$, potom
$f(2) = 4$ – tedy číslo (funkční hodnota),
$f(\{2\}) = \{4\}$ – jednoprvková množina a
$f(\langle 1, 2\rangle) = \langle 1, 4\rangle$ – obrazem intervalu je interval a dále
$f^{-1}(2)$ neexistuje – kdyby funkce $f(x) = x^2$ měla inverzní, byla by to hodnota této inverzní funkce pro $x = 2$,
$f^{-1}(\{2\}) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ a
$f^{-1}(\langle 1, 2\rangle) = \langle -\sqrt{2}, -1\rangle \cup \langle 1, \sqrt{2}\rangle$.

Příklad 1.15. Pro funkci $f(x) = \frac{1}{2}x(x^2 - 3)$ najdeme $f(\langle 0, \sqrt{3}\rangle)$ a $f^{-1}(\langle 0, \frac{1}{2}\rangle)$:



Obr. 1.1:

V tomto učebním textu nás budou zajímat převážně zobrazení mezi číselnými množinami. V těchto případech se pro zobrazení vžil termín funkce.

Definice 1.16. ***Funkcí*** obvykle rozumíme takové zobrazení, jehož obor hodnot je číselná množina, tedy podmnožina množiny reálných (nebo komplexních) čísel.

Pojem a základní vlastnosti funkce

Definice 1.17. Zobrazení f, jehož definiční obor, stejně jako obor hodnot, jsou podmnožiny množiny $\mathbb{R}$, se nazývá ***reálná funkce jedné reálné proměnné***, dále krátce ***funkce***.

Příklad 1.18. **Důležité funkce:**

a) $[x]$ – **celá část** x **:** $[x] \le x < [x] + 1, \quad [x] \in \mathbb{Z}$

b) $\chi_M(x) = \begin{cases} 0 & x \notin M \\ 1 & x \in M \end{cases}$ – **charakteristická funkce množiny** M

speciálně $\chi(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ – **char. funkce množiny racionálních čísel** $\mathbb{Q}$

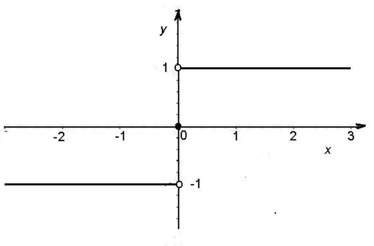
c) $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

Je-li funkce f zadána formulí, např. $f(x) = a^x$, budeme často mluvit prostě o funkci a^x. V tomto případě musí být zadán definiční obor. Dohodneme se však, že v případě, kdy definiční obor nebude výslovně uveden, budeme za něj považovat množinu všech těch čísel x, pro která má daná formule smysl. Tuto množinu pak nazýváme ***přirozeným definičním oborem*** funkce.

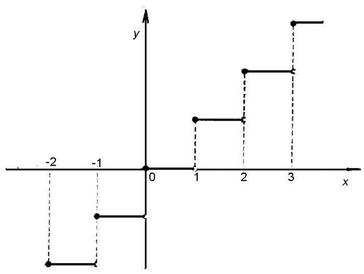
V rovině $\mathbb{R}^2$ můžeme funkci f znázornit pomocí jejího grafu:

Definice 1.19. ***Graf*** *funkce f je množina všech bodů $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ takových, že $x \in D$, $y = f(x)$. Rovnice $y = f(x)$ se nazývá* ***rovnice grafu funkce*** *f.*

Grafy funkcí z příkladu 1.18 jsou v následujících obrázcích:



Obr. 1.2: $y = \operatorname{sgn}(x)$



Obr. 1.3: $y = [x]$

Zde si můžete vyzkoušet kreslení grafů funkcí pomocí Mapletu.

Složená funkce

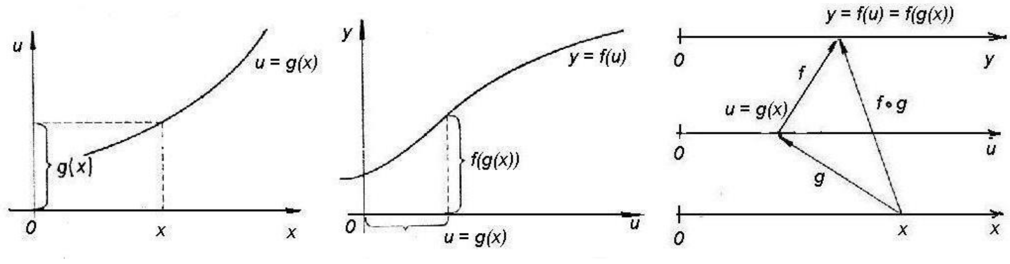
Definice 1.20. Jsou-li f, g funkce, můžeme vytvořit novou funkci $f \circ g$ (čti f po g) předpisem

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Funkce $f \circ g$ se nazývá ***složená funkce***, funkce f ***vnější složka*** a funkce g ***vnitřní složka*** složené funkce $f \circ g$.

Definičním oborem složené funkce je množina $D_{f\circ g} = g^{-1}(D_f) = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$.

Vznik složené funkce ilustruje následující obrázek:



Obr. 1.4: Složená funkce

Příklad 1.21. Utvoříme složené funkce $f\circ g$ resp. $f\circ g\circ h$, jestliže jsou zadány jednotlivé složky:

a)

$$\begin{array}{lll} f: & f(u) = a^u; & u \in \mathbb{R},\ (a \geq 0) \\ g: & g(y) = \cos y; & y \in \mathbb{R} \\ h: & h(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}; & x \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$f\circ g\circ h: \ f(g(h(x))) = a^{\cos \frac{1-x^2}{1+x^2}}; \quad x \in \mathbb{R}$$

b)

$$\begin{array}{lll} f: & f(y) = \sqrt{1+2y}; & y \in \langle -\frac{1}{2}, +\infty) \\ g: & g(x) = \sin x; & x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \end{array}$$

$$f\circ g: \ f(g(x)) = \sqrt{1+2\sin x};$$

Určíme $D_{f\circ g}$:

$$D_{f\circ g} = g^{-1}(D_f) = g^{-1}\left(\langle -\tfrac{1}{2},\infty)\right) = \left\{x \,|\sin x \in \langle -\tfrac{1}{2},\infty) \wedge x \in \langle -\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\rangle\right\} =$$

$$= \left| -\tfrac{1}{2} = \sin(-\tfrac{\pi}{6}) \right| = \left\langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

c)

$$f: \ f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-x & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{a} \quad g: \ g(x) = \operatorname{sgn} x$$

$$f\circ g: \ f(g(x)) = \begin{cases} 0 & \operatorname{sgn} x < 0 \\ 1-\operatorname{sgn}(x) & \operatorname{sgn} x \geq 0 \end{cases};$$

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad \text{tedy} \quad \operatorname{sgn} x \begin{cases} < 0 & x < 0 \\ \geq 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

Odtud

$$f(g(x)) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-0 & x = 0 \\ 1-1 & x > 0 \end{cases} \text{ neboli } f(g(x)) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Skládání funkcí si můžete vyzkoušet také pomocí tohoto Mapletu.

Dále připomeneme pojmy, které jsou vám jistě dobře známé ze střední školy:

Funkce prosté a funkce inverzní

Definice 1.22. Funkce f se nazývá ***prostá***, jestliže platí:

$$\forall x_1, x_2 \in D: \; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Příklad 1.23. Funkce

$$f: \; f(x) = x; \quad x \in \mathbb{R} \qquad f: \; f(x) = x^2; \quad x \in \langle 0, \infty)$$
$$f: \; f(x) = \sin x; \quad x \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle \qquad f: \; f(x) = \cos x; \quad x \in \langle 0, \pi \rangle$$

jsou prosté, avšak funkce

$$f_1: \; f_1(x) = x^2; \quad x \in \mathbb{R} \qquad f_2: \; f_2(x) = \sin x; \quad x \in \mathbb{R}$$
$$f_3: \; f_3(x) = \cos x; \quad x \in \mathbb{R}$$

nejsou prosté: Zřejmě je

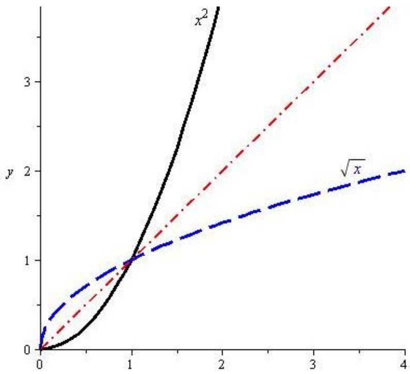
$$f_1(1) = 1^2 = f_1(-1) = (-1)^2 = 1, \quad \text{dokonce platí} \quad \forall x \in \mathbb{R}: \; f_1(x) = f_1(-x),$$

analogicky $f_2(x) = \sin x = f_2(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi)$.

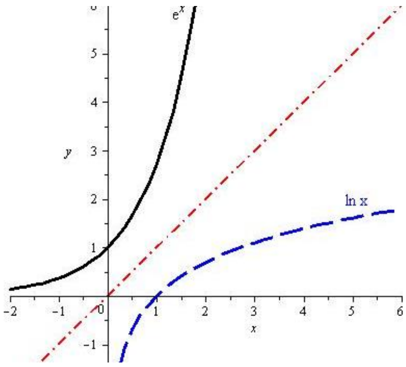
Definice 1.24. Je-li f prostá funkce, potom ***inverzní funkcí*** k funkci f rozumíme funkci f^{-1}, jejímž definičním oborem je obor hodnot funkce f a pro každou dvojici (x, y), $x \in D_f$, $y \in H_f$, platí $y = f(x)$ právě když $x = f^{-1}(y)$.

Příklad 1.25.

$$f: \; f(x) = x^2, \quad x \in \langle 0, \infty); \quad f^{-1}: \; f^{-1}(y) = \sqrt{y}, \quad y \in \langle 0, \infty)$$
$$f: \; f(y) = a^y, \quad y \in \mathbb{R}; \qquad f^{-1}: \; f^{-1}(x) = \log_a x, \quad x \in (0, \infty)$$

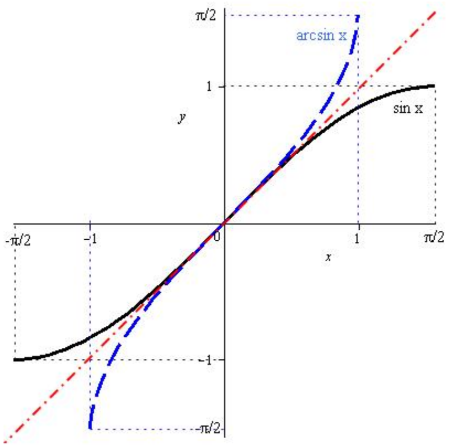


Obr. 1.5: $y = x^2, y = \sqrt{x}$

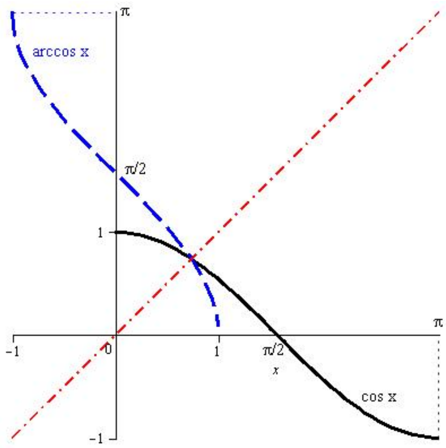


Obr. 1.6: $y = e^x, y = \ln x$

$$f: \; f(x) = \sin x, \quad x \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle; \quad f^{-1}: \; f^{-1}(x) = \arcsin x, x \in \langle -1, 1 \rangle$$
$$f: \; f(x) = \cos x, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle; \qquad f^{-1}: \; f^{-1}(x) = \arccos x, x \in \langle -1, 1 \rangle$$



Obr. 1.7: $y = \sin x, y = \arcsin x$



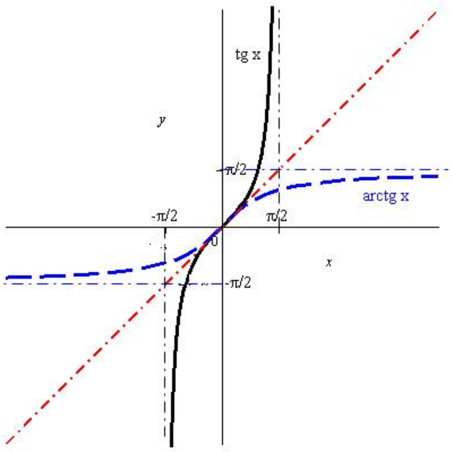
Obr. 1.8: $y = \cos x, y = \arccos x$

$$f: \; f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}); \quad f^{-1}: \; f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x, x \in \mathbb{R}$$
$$f: \; f(x) = \operatorname{cotg} x, \quad x \in (0, \pi); \quad f^{-1}: \; f^{-1}(x) = \operatorname{arccotg} x, x \in \mathbb{R}$$

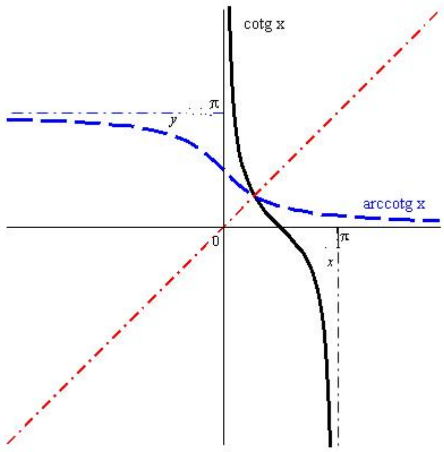
Jestliže tedy bod $[a, b]$ leží na grafu funkce f, takže $b = f(a)$, je $f^{-1}(b) = a$, tedy bod $[b, a]$ leží na grafu funkce f^{-1}; přitom body $[a, b]$, $[b, a]$ jsou symetrické podle přímky $y = x$. Platí tedy (jak se můžeme přesvědčit v obrázcích k příkladu 1.25):

Věta 1.26. *Grafy inverzních funkcí f, f^{-1} jsou symetrické podle přímky $y = x$.*

Poznámka 1.27. Inverzní funkci, jak vyplývá z definice, můžeme utvořit pouze k prosté funkci; není-li funkce prostá, dá se utvořit inverzní funkce k jejímu zúžení na vhodný interval, jak jsme viděli v předchozím příkladu na funkcích $f(x) = x^2, \quad x \in \langle 0, \infty)$ resp.

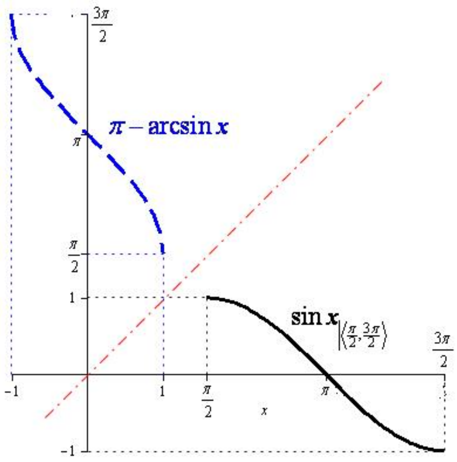


Obr. 1.9: $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{arctg} x$

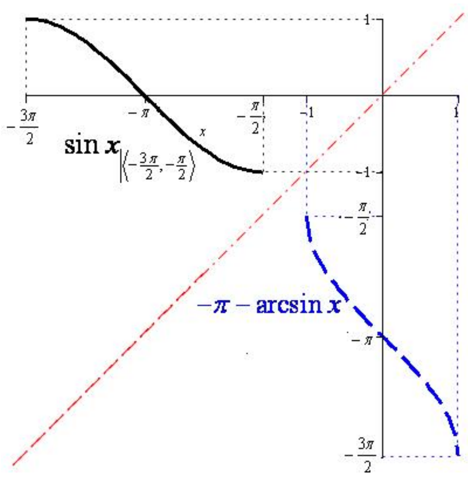


Obr. 1.10: $y = \operatorname{cotg} x$, $y = \operatorname{arccotg} x$

$f(x) = \sin x, \quad x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Jestliže se omezíme na jiný interval, na kterém je daná funkce prostá, dostaneme pochopitelně jinou inverzní funkci. Uvažujme např. dvě jiná zúžení funkce $\sin x$, a to jednak na interval $\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$, jednak na interval $\langle -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \rangle$. Příslušné funkce vidíme v následujícím obrázku:



Obr. 1.11:

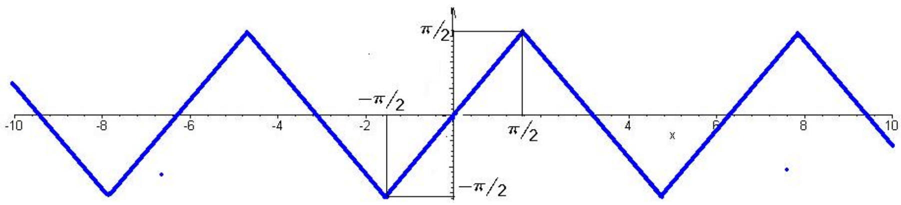


Obr. 1.12:

Poznámka 1.28. Povšimněme si, co se stane, vytvoříme-li kompozici dvou navzájem inverzních funkcí:
Zřejmě platí:

$$f^{-1}[f(x)] = x,\ x \in D_f \quad \text{a} \quad f[f^{-1}(y)] = y,\ y \in D_{f^{-1}}.$$

Pozor: je podstatné, že vnitřní složku uvažujeme pouze na té části definičního oboru, kde je tato vnitřní složka prostou funkcí, tedy tam, kde k ní sestrojujeme funkci inverzní,



Obr. 1.13: $\arcsin \sin x$

která je vnější složkou. Na obr. 1.13 můžeme na příkladu funkce $\arcsin \sin x$ vidět co se stane, když vnitřní složku uvažujeme na „větší“ množině.

K vytváření inverzních funkcí můžeme použít tento Maplet.

Algebraické operace mezi funkcemi

Definice 1.29. Jsou-li f, g funkce a c konstanta, (kterou můžeme ostatně chápat jako konstantní funkci, tj. funkci, která každému reálnému číslu přiřadí tutéž hodnotu c), můžeme definovat nové funkce $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$, cf následujícími předpisy:

$$\begin{array}{ll} f+g: \ (f+g)(x)=f(x)+g(x); & D_{f+g}=D_f\cap D_g \\ f-g: \ (f-g)(x)=f(x)-g(x); & D_{f-g}=D_f\cap D_g \\ fg: \ (fg)(x)=f(x)g(x); & D_{fg}=D_f\cap D_g \\ \frac{f}{g}: \ \frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}; & D_{\frac{f}{g}}=\{x\in D_f\cap D_g | g(x)\neq 0\} \\ cf: \ (cf)(x)=cf(x); & D_{cf}=D_f \end{array}$$

Tyto nové funkce budeme nazývat ***součet, rozdíl, součin, podíl funkcí*** f, g a ***c-násobek funkce*** f. Vzhledem k výše uvedené poznámce o konstantě, c-násobek funkce f je speciálním případem součinu funkcí.

Všimněme si dále, že zatímco definice složené funkce, prosté funkce a inverzní funkce jsou speciální případy stejných pojmů pro zobrazení, není možné převést na libovolná zobrazení definice algebraických operací mezi funkcemi, neboť zde je podstatně využito algebraické struktury množiny $\mathbb{R}$.

Monotonní funkce

Definice 1.30. Řekneme, že funkce f je na množině $M \subset D_f$

- ***rostoucí,*** jestliže $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$,
- ***klesající,*** jestliže $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$,
- ***nerostoucí,*** jestliže $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2)$,

- ***neklesající,*** jestliže $\forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \le f(x_2)$.

Rostoucí a klesající funkce se nazývají ***ryze monotónní***, funkce neklesající a nerostoucí se nazývají ***monotónní***.

Je-li f ryze monotonní na D_f, potom je jistě prostá, a proto existuje inverzní funkce f^{-1}. Předpokládejme pro určitost, že f je rostoucí. Označíme-li $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ pro $x_1, x_2 \in D_f$, je $y_1 < y_2$ právě když $x_1 < x_2$, avšak $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$, f^{-1} je tedy také rostoucí. Podobný výsledek dostaneme pro klesající funkci (viz obrázky k příkladu 1.25). Platí tedy

Věta 1.31. *Je-li f ryze monotonní na D_f, potom k ní existuje inverzní funkce f^{-1}, která je rovněž ryze monotonní a to rostoucí, je-li f rostoucí, a klesající, je-li f klesající.*

Příklad 1.32. $f: \ f(x) = 5 - \sqrt{x}$

je klesající na definičním oboru $\langle 0, +\infty)$, neboť

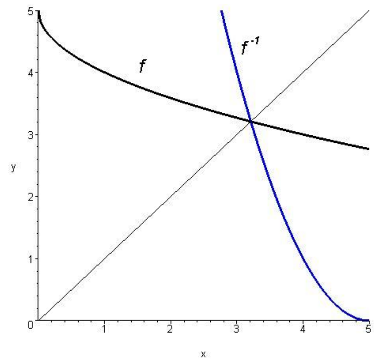
$$x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 - \sqrt{x_1} > 5 - \sqrt{x_2}.$$

Funkce

$$f^{-1}: \ f^{-1}(y) = (y-5)^2; \ y \in (-\infty, 5\rangle$$

je rovněž klesající (prověřte!) viz obr. 1.14



Obr. 1.14: $f(x)=5-\sqrt{x}, f^{-1}(x)=(x-5)^2$

Funkce sudé a liché, funkce periodické

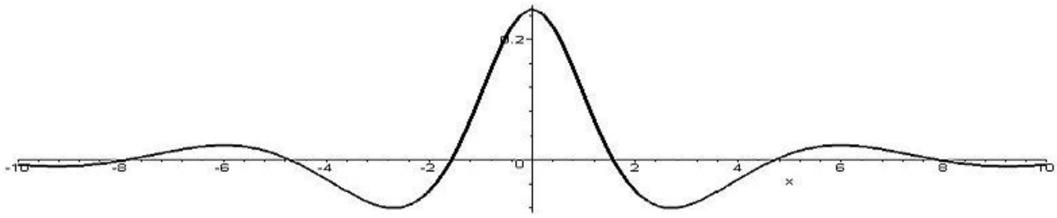
Definice 1.33. Funkci f nazýváme ***sudou*** (resp. ***lichou***), když pro všechna x z D_f platí $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).

Leží-li na grafu $y = f(x)$ sudé funkce bod $[x, f(x)]$, leží na něm i bod $[-x, f(x)]$. Graf sudé funkce je tedy souměrný podle osy y. Pro lichou funkci f podobně s každým bodem $[x, f(x)]$, leží na grafu $y = f(x)$ i bod $[-x, -f(x)]$, a tedy graf liché funkce je souměrný podle počátku souřadnic.

Příklad 1.34.

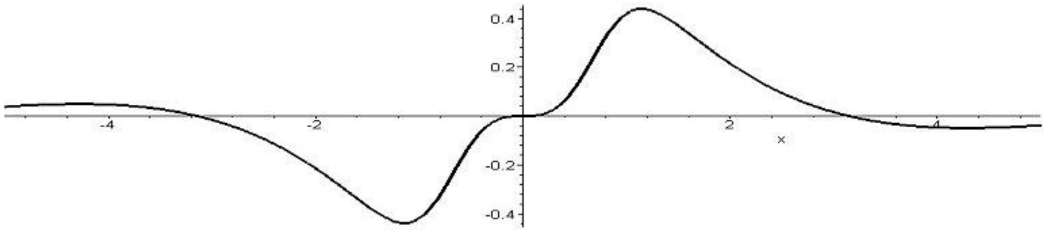
$$f: \ f(x) = \frac{\cos x}{x^2+4}; \quad x \in (-\infty, \infty) \quad \text{je sudá, neboť}$$

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{(-x)^2+4} = \frac{\cos x}{x^2+4} = f(x)$$



Obr. 1.15: Sudá funkce

$$f:\ f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}\sin x;\quad x \in (-\infty, \infty) \quad \text{je lichá, neboť}$$
$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^4+1}\sin(-x) = \frac{x^2}{x^4+1}(-\sin x) = -f(x)$$



Obr. 1.16: Lichá funkce

Definice 1.35. Funkce f se nazývá ***periodická***, existuje-li číslo $p \neq 0$ takové, že $f(x \pm p) = f(x)$ pro každé $x \in D_f$. Číslo p se nazývá ***perioda*** funkce f.

Je-li p perioda funkce f, pak kp, kde $k \neq 0$ je libovolné celé číslo, je také perioda funkce f. Existuje-li nejmenší kladné číslo p, které je periodou funkce f, nazývá se ***primitivní perioda***.

Příklad 1.36.

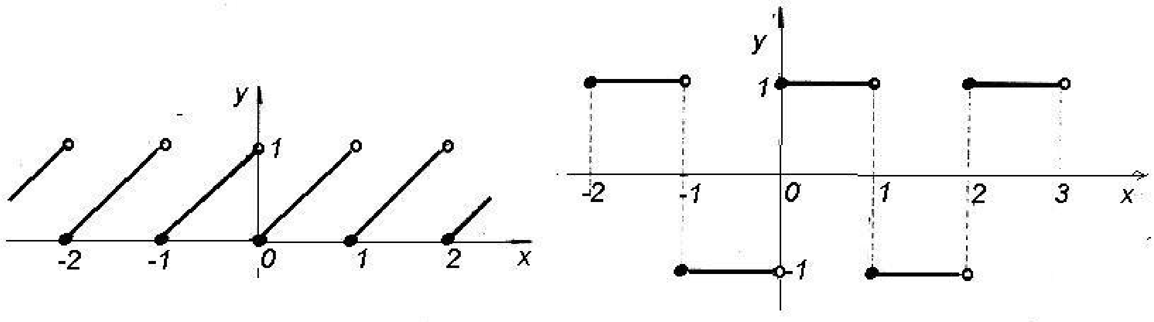
a) Funkce $f:\ y = x - [x]$ je periodická s periodou 1:

Je $[x+1] = [x]+1$, tedy $f(x+1) = (x+1)-[x+1] = x+1-[x]-1 = x-[x] = f(x)$. (Viz obr.1.17 vlevo.)

b) Funkce $g:\ y = (-1)^{[x]}$ je periodická s periodou 2:

Protože $[x+2] = [x]+2$, je $g(x+2) = (-1)^{[x+2]} = (-1)^{[x]}(-1)^2 = (-1)^{[x]} = g(x)$. (Viz obr.1.17 vpravo.)

Pro konstrukci grafu periodické funkce postačí, sestrojíme-li jej na libovolném polouzavřeném intervalu délky p. Celý graf pak dostaneme z této části jejím posunutím ve směru osy x o délku kp pro všechna celá k.



Obr. 1.17: Periodické funkce

Nejznámějšími příklady periodických funkcí jsou funkce goniometrické – $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$. Prvé dvě mají primitivní periodu 2π, druhé dvě π.
Příkladem funkce, která nemá primitivní periodu, je libovolná konstanta – její periodou je každé nenulové reálné číslo.

Funkce ohraničené

Definice 1.37.

- Funkce f se nazývá ***shora ohraničená*** na množině $M \subset D_f$, existuje-li číslo c takové, že $\forall x \in M : f(x) \leq c$.
- Funkce f se nazývá ***zdola ohraničená*** na množině $M \subset D_f$, existuje-li číslo d takové, že $\forall x \in M : d \leq f(x)$.
- Funkce f se nazývá ***ohraničená*** na množině $M \subset D_f$, je-li na ní ohraničená shora i zdola.

Označíme-li větší z čísel $|c|$, $|d|$ jako K, platí pro ohraničenou funkci $\forall x \in M : |f(x)| \leq K$.

Příklad 1.38. Funkce $f(x) = x^2$ je zdola ohraničená na svém přirozeném definičním oboru $\mathbb{R}$, protože platí
$$x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
ale není ohraničená shora – dokážeme sporem:

Předpokládejme, že existuje c tak, že platí
$$\forall x \in \mathbb{R} : \; x^2 \leq c.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $c > 1$.
Stačí najít jedno reálné číslo x_0, pro které tato podmínka neplatí, tedy pro které je $x_0^2 > c$;

položme $x_0 = c$. Potom $x_0^2 = c^2 > c$.

Naproti tomu funkce $f(x) = \sin x$ je ohraničená na svém přirozeném definičním oboru, protože platí
$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Elementární funkce

V této části uvedeme souhrnný přehled a základní vlastnosti tzv. elementárních funkcí – základních reálných funkcí reálné proměnné, které jsou vám vesměs známy ze střední školy, se kterými budeme dále pracovat (a které jsme ostatně již vyšetřovali v předchozím textu):

Polynomem nazýváme funkci f definovanou na $\mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou reálná čísla, $a_n \neq 0$. Číslo n se nazývá ***stupeň polynomu***. Pro polynom n-tého stupně používáme obvykle označení P_n.

Polynom stupně 0, tedy funkce f definovaná na $\mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = c,$$

kde c je reálné číslo, se nazývá ***konstanta.***

Je-li funkční hodnota polynomu v čísle x_0 rovna nule, tedy platí-li

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = 0,$$

nazývá se číslo x_0 ***kořenem polynomu***.

Uvedeme některé důležité vlastnosti polynomů a jejich kořenů:

- ***Základní věta algebry:*** *Každý polynom stupně $n \geq 1$ má alespoň jeden kořen.*
- ***Věta Bézoutova:*** *Číslo x_0 je kořenem polynomu P_n stupně $n \geq 1$, právě když platí*

$$P_n(x) = (x - x_0)\, Q_{n-1}(x),$$

kde Q_{n-1} je vhodný polynom stupně $n - 1$.

Výraz $(x - x_0)$ vystupující v předchozím vztahu se nazývá ***kořenový činitel*** příslušný ke kořenu x_0.

Předchozí dvě věty mají následující důsledek:

- ***Rozklad polynomu na kořenové činitele:*** *Jsou-li (reálná nebo komplexní, ne nutně různá) čísla x_1, x_2, …, x_n kořeny polynomu $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, platí*

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n).$$

Odtud plyne, že polynom stupně n má právě n (ne nutně různých) kořenů.

Poznámka 1.39. Mezi koeficienty polynomu a jeho kořeny platí následující vztah:

$$a_0 = (-1)^n a_n (x_1 x_2 \cdots x_n)$$

Jsou-li tedy koeficienty polynomu celočíselné, pak jeho celočíselné kořeny dělí absolutní člen polynomu – u polynomů vyšších řádů můžeme tak někdy některé kořeny „uhodnout“. V odstavci **Pro zzájemce** na konci kapitoly uvádíme další vztahy mezi kořeny a koeficienty polynomu.

Nalézt přesně kořeny libovolného polynomu neumíme (existují metody pro jejich přibližné určení, které se vyšetřují v numerických metodách), často nám stačí určit, zda některé známé číslo kořenem daného polynomu je nebo není – tedy určit funkční hodnotu polynomu. K tomu existuje jeden velmi jednoduchý algoritmus, který se nazývá **Hornerovo schéma** a má následující tvar:

Budeme hledat funkční hodnotu $p(x_0)$ polynomu $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ v čísle $x = x_0$. Napíšeme třířádkové schéma, ve kterém na prvním řádku jsou koeficienty polynomu $p(x)$ (úplně nalevo napíšeme číslo $x = x_0$), do druhého řádku vždy součin čísla x_0 s předchozím výsledkem, který nám vyšel ve třetím řádku, přičemž třetí řádek je součtem prvních dvou; tedy na prvním místě druhého řádku je prázdné místo a na prvním místě třetího řádku je opsán koeficient a_0. Prvky třetího řádku označíme písmeny b s příslušnými indexy. Na posledním místě třetího řádku dostaneme hledanou funkční hodnotu $p(x_0)$. Konkrétně:

$$\begin{array}{r|cccccccc} \underline{x_0} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_i & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & x_0 b_{n-1} & \cdots & x_0 b_i & \cdots & x_0 b_1 & x_0 b_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_{i-1} & \cdots & b_0 & p(x_0) \end{array}$$

Při běžných výpočtech obvykle druhý řádek vynecháváme a píšeme přímo výsledné součty ve třetím řádku.
Postup výpočtu si ukážeme na jednoduchém příkladu:

Příklad 1.40. Pro polynom $p(x) = x^4 - 2x^3 + x + 1$ máme najít $p(3)$.

Řešení. Do prvního řádku zapíšeme nejdříve číslo, v němž hledáme funkční hodnotu, a potom koeficienty příslušného polynomu (nesmíme zapomenout na nulové koeficienty!); ve druhém řádku máme na prvním místě opsané 1 (= vedoucí koeficient) a dále $3 \cdot 1 - 2 = 1$, $3 \cdot 1 + 0 = 3$, $3 \cdot 3 + 1 = 10$ a nakonec $3 \cdot 10 + 1 = 31$ – hledaná funkční hodnota.

$$\begin{array}{r|rrrrr} \underline{3} & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 3 & 10 & \underline{\mathbf{31}} \end{array}$$

Závěrem tedy dostáváme $\underline{p(3) = 31}$. □

Je-li číslo x_0 kořenem daného polynomu, vyjde pochopitelně na posledním místě druhého řádku nula. Navíc, jak se můžeme přesvědčit v odvození Hornerova schématu v části **Pro zájemce** na konci kapitoly, čísla ve druhém řádku jsou koeficienty polynomu, který vyjde při dělení daného polynomu kořenovým činitelem $x - x_0$. Uvedeme příklad:

Příklad 1.41. Je dán polynom $p(x) = x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30$. Máme najít některý jeho kořen a potom příslušný kořenový činitel z tohoto polynomu vytknout.

Řešení. Absolutní člen polynomu $a_0 = 30$, jako kořeny přicházejí v úvahu čísla $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$. Hned je vidět, že 1 není kořen, ověříme číslo 2:

$$\begin{array}{r|rrrrr} \underline{2} & 1 & -3 & -15 & 19 & 30 \\ & 1 & -1 & -17 & -15 & \underline{\mathbf{0}} \end{array}$$

Dvojka tedy je kořenem daného polynomu a dále platí:

$$x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 = (x - 2)(x^3 - x^2 - 17x - 15)$$

□

Je-li tedy některé číslo x_0 kořenem daného polynomu (na posledním místě druhého řádku vyšla jako jeho funkční hodnota nula), můžeme ve výpočtu Hornerovým schématem dále pokračovat – hledat funkční hodnotu polynomu získaného po vydělení příslušným kořenovým činitelem:

Příklad 1.42. Máme vypočítat funkční hodnotu polynomu

$$P(x) = x^7 - 6x^6 - x^5 + 70x^4 - 120x^3 - 112x^2 + 432x - 288 \quad \text{pro } x = 2.$$

Je-li $x = 2$ kořen polynomu P, máme určit jeho násobnost.

Řešení.

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} \underline{2} & 1 & -6 & -1 & 70 & -120 & -112 & 432 & -288 \\ & 1 & -4 & -9 & 52 & -16 & -144 & 144 & \underline{\mathbf{0}} \\ & 1 & -2 & -13 & 26 & 36 & -72 & \underline{\mathbf{0}} & \\ & 1 & 0 & -13 & 0 & 36 & \underline{\mathbf{0}} & & \\ & 1 & 2 & -9 & -18 & \underline{\mathbf{0}} & & & \\ & 1 & 4 & -1 & \underline{\mathbf{-20}} & & & & \end{array}$$

Vidíme, že $x = 2$ je čtyřnásobným kořenem polynomu P (čtyřikrát nám na posledním místě jako funkční hodnota vyšla nula, po páté již ne), přičemž ve druhém řádku zdola jsou koeficienty příslušného podílu, tj. platí

$$P(x) = (x - 2)^4 Q(x) = (x - 2)^4 (x^3 + 2x^2 - 9x - 18).$$

Chceme-li najít všechny kořeny polynomu P, stačí hledat kořeny polynomu Q. Jestliže jsou celočíselné, musí dělit absolutní člen – v úvahu tedy přichází $x = -2, \pm 3, \pm 6, \pm 9$. Vypočítáme příslušné funkční hodnoty pomocí Hornerova schématu:

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 2 & -9 & -18 \\ & 1 & 0 & -9 & \underline{\mathbf{0}} \end{array}$$

Číslo $x = -2$ je tedy kořen a příslušný podíl $q_1(x) = x^2 - 9$. Odtud plyne, že zbývající kořeny jsou $x = \pm 3$ a platí

$$P(x) = (x-2)^4(x+2)(x-3)(x+3).$$

□

Maplet na Hornerovo schéma je zde.

Víme, že každý polynom (s reálnými koeficienty) $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ se dá vyjádřit ve tvaru součinu kořenových činitelů

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n),$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou kořeny polynomu P_n (pro k-násobný kořen x_i se v součinu výraz $(x - x_i)$ vyskytuje k-krát). Přitom má-li polynom komplexní kořen $a + b\,j$, má také komplexní kořen $a - b\,j$ a součin příslušných dvou kořenových činitelů je roven

$$[x - (a + b\,j)][x - (a - b\,j)] = [(x-a) - b\,j][(x-a) + b\,j] = (x-a)^2 + b^2 = x^2 + px + q,$$

– je to polynom druhého stupně s reálnými koeficienty.

Polynom $P(x)$ lze tedy zapsat ve tvaru součinu

$$P(x) = a_n(x - x_i)^k \ldots (x^2 + px + q)^t \ldots,$$

kde x_i je k-násobný reálný kořen polynomu $P(x)$ a kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ s reálnými koeficienty má komplexně sdružené kořeny (tj. $p^2 - 4q < 0$), tedy polynom $P(x)$ má t-násobné komplexně sdružené kořeny.

Takové vyjádření polynomu nazýváme ***rozklad polynomu v reálném oboru***.

Příklad 1.43. Máme rozložit v reálném oboru polynom $P(x) = x^4 - x^3 - x + 1$.

Řešení.

$$x^4 - x^3 - x + 1 = x^3(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^3-1) = (x-1)(x-1)(x^2+x+1),$$

a kvadratická rovnice $x^2 + x + 1 = 0$ má komplexní kořeny, tedy

$$P(x) = (x-1)^2(x^2+x+1).$$

□

Racionální lomená funkce je dána předpisem

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

kde P_m resp. Q_n jsou polynomy stupně m resp. n. Je definovaná pro každé x, pro které je $Q_n(x) \neq 0$.
Jestliže pro stupně polynomů platí $m < n$, říkáme, že f je ***ryze lomená***; je-li $m \geq n$, říkáme, že f je ***neryze lomená*** racionální funkce. V případě neryze lomené racionální funkce, tj. pro $m \geq n$, podíl $P_m(x)$ a $Q_n(x)$ dává po vydělení

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = N(x) + \frac{\tilde{P}_i(x)}{Q_n(x)}, \quad \text{kde} \quad i < n.$$

Jmenovatel rozložíme v reálném oboru a dostaneme

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = N(x) + \frac{\tilde{P}_i(x)}{a_n(x-\alpha)^k \dots (x^2+px+q)^t \dots}.$$

Taková funkce může vzniknout součtem „jednoduchých" zlomků, např.:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{x+2}{x^2+x+3} = \frac{2x^2+2x+1}{(x-1)(x^2+x+3)}.$$

Naopak také každá ryze lomená racionální funkce, jestliže umíme najít kořeny jejího jmenovatele, se dá rozložit na součet jednoduchých zlomků určitého tvaru – budeme jim říkat ***parciální zlomky***.

Věta o rozkladu racionální lomené funkce na parciální zlomky, jestliže se formuluje přesně, je velmi nepřehledná. Naznačíme postup:

V rozkladu podílu $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ na parciální zlomky odpovídá každému kořenovému činiteli jmenovatele $(x-\alpha)^k$ součet k parciálních zlomků tvaru

$$\frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{(x-\alpha)}$$

a každému faktoru $(x^2+px+q)^t$ odpovídá součet t parciálních zlomků tvaru

$$\frac{B_t x + C_t}{(x^2+px+q)^t} + \frac{B_{t-1}x + C_{t-1}}{(x^2+px+q)^{t-1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)} \quad .$$

Rozklad má tedy tvar

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \dots +$$

$$+\frac{B_t x + C_t}{(x^2+px+q)^t} + \frac{B_{t-1}x + C_{t-1}}{(x^2+px+q)^{t-1}} + \cdots + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)}.$$

Neznámé koeficienty v rozkladu vypočítáme ***metodou neurčitých koeficientů***. Tato metoda se opírá o větu o rovnosti polynomů – dva polynomy jsou si rovny, rovnají-li se jejich koeficienty u stejných mocnin. Postup naznačíme na příkladech:

Příklad 1.44.

$$R(x) = \frac{2x^3+x+2}{x^4+x^3+x^2} = \frac{2x^3+x+2}{x^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Poslední součet tří zlomků opět převedeme na společného jmenovatele, kterým je, pochopitelně, jmenovatel původně zadaného zlomku. Porovnáme čitatele:

$$2x^3+x+2 = A(x^2+x+1) + Bx(x^2+x+1) + x^2(Cx+D),$$

$$2x^3+x+2 = (B+C)x^3 + (A+B+D)x^2 + (A+B)x + A.$$

Odtud porovnáním koeficientů dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} & & B & + & C & & & = & 2 \\ A & + & B & & & + & D & = & 0 \\ A & + & B & & & & & = & 1 \\ A & & & & & & & = & 2 \end{array}$$

Soustava má řešení $A = 2$, $B = -1$, $C = 3$, $D = -1$, tj.

$$\frac{2x^3+x+2}{x^4+x^3+x^2} = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{3x-1}{x^2+x+1}.$$

Příklad 1.45.

$$R(x) = \frac{x+2}{x^3-x} = \frac{x+2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}.$$

Odtud

$$x+2 = A(x+1)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$$

a můžeme opět roznásobit a porovnat koeficienty u stejných mocnin.

Zde je ovšem výhodnější jiný postup. Vyjdeme z faktu, že jestliže se dvě funkce sobě rovnají, mají stejné funkční hodnoty pro všechna x. Porovnáme funkční hodnoty ve vhodných bodech:

$$\begin{array}{lll} x = 0: & 2 = A(-1) & \Rightarrow A = -2 \\ x = 1: & 3 = C \cdot 2 & \Rightarrow C = \frac{3}{2} \\ x = -1: & 1 = B(-1)(-2) & \Rightarrow B = \frac{1}{2} \end{array}$$

a odtud

$$\frac{x+2}{x^3-x} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x-1}.$$

Pro výpočet rozkladu racionální lomené funkce slouží tento maplet.

Mocninnou funkcí nazýváme funkci f danou předpisem

$$f(x) = x^a.$$

Přitom mohou nastat tyto případy.

a) $a \in \mathbb{N}$. Mocninná funkce s přirozeným exponentem je definovaná $\forall x \in \mathbb{R}$. Je-li a sudé číslo, jedná se o sudou funkci, která je klesající na intervalu $(-\infty, 0)$ a rostoucí na intervalu $(0, \infty)$. Je-li a liché číslo, jedná se o lichou a rostoucí funkci.

b) Pro $a = 0$ se jedná o konstantní funkci $f(x) = 1$ pro $x \neq 0$.

c) Je-li a celé záporné číslo, $a = -r$, $r \in \mathbb{N}$, je $f(x) = \frac{1}{x^r}$. Funkce je definovaná pro $x \neq 0$.

d) Pro $a = 1/r$, kde $r \in \mathbb{N}$, je

$$f(x) = x^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{x};$$

je definovaná na intervalu $\langle 0, \infty)$ pro r sudé a na intervalu $(-\infty, \infty)$ pro r liché. Je rostoucí.

e) $a \in \mathbb{Q}$, $a = \frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ a a není z a) – d). Potom je

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x^p}.$$

Pro $p/q > 0$, q sudé, je funkce f definovaná pro $x \in \langle 0, \infty)$, pro $p/q > 0$, q liché, je funkce f definovaná pro $x \in (-\infty, \infty)$; pro $p/q < 0$, q sudé, je funkce f definovaná pro $x \in (0, \infty)$, pro $p/q > 0$, q liché, je funkce f definovaná pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

f) Pro a iracionální je mocninná funkce definovaná na intervalu $\langle 0, \infty)$ pro $a > 0$ a na intervalu $(0, \infty)$ pro $a < 0$.

Exponenciální funkce je funkce definovaná předpisem

$$f(x) = a^x, \;\; a > 0.$$

Je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $0 < a < 1$. Pro $a = 1$ jde o konstantu $f(x) = 1$.

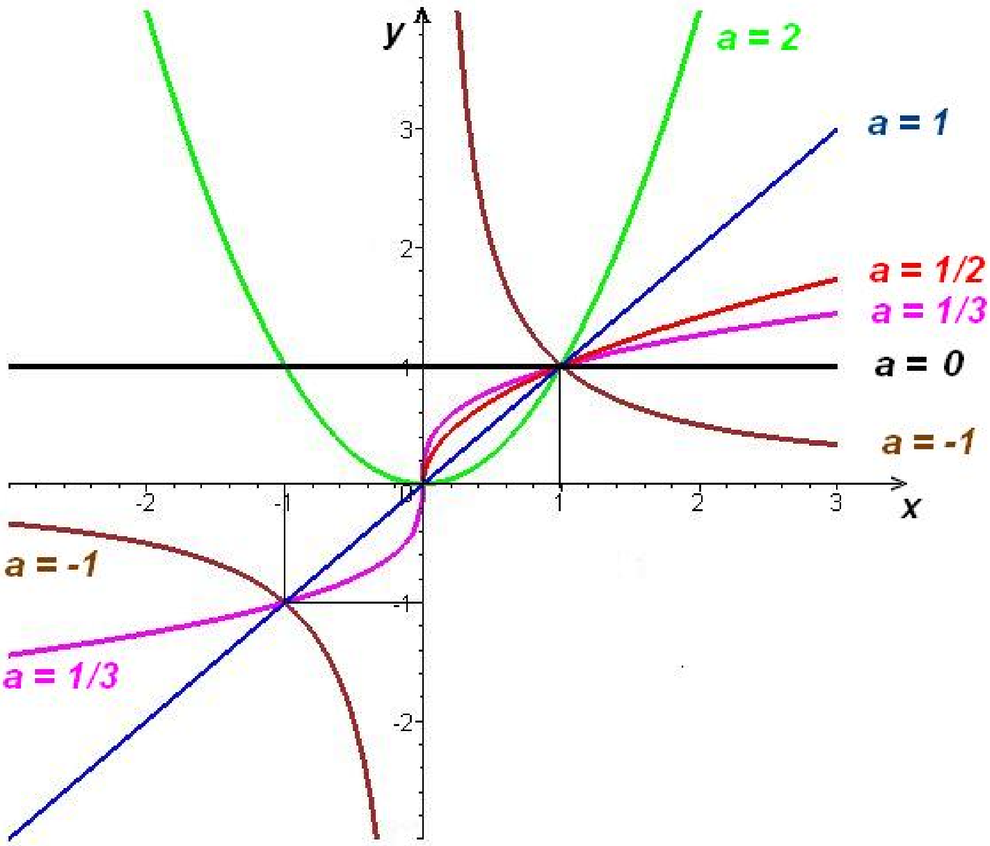
Logaritmická funkce při základu a, kde $0 < a < 1$ nebo $a > 1$ je definovaná na intervalu $(0, \infty)$ a je inverzní funkcí k exponenciální funkci $f(x) = a^x$. Označuje se předpisem

$$f(x) = \log_a x.$$

Je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $0 < a < 1$.

Logaritmická funkce při základu $e = 2{,}718281828\ldots$ se stručně nazývá jen logaritmická funkce a označuje se $\ln x$. Logaritmickou funkci při základu 10 označujeme místo $\log_{10} x$ symbolem $\log x$.

Uvedeme některé důležité převodní vztahy:



Obr. 1.18: Grafy mocninných funkcí $y = x^a$

a) Nechť je $a > 0$, potom platí $a^x = e^{x \ln a}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

b) Nechť je $a > 0$, $b > 0$, přičemž $a \neq 1$, $b \neq 1$, potom $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ $\forall x$, $x > 0$

c) Nechť a je číslo, potom platí $x^a = e^{a \ln x}$ $\forall x$, $x > 0$

Goniometrické (nebo také ***trigonometrické***) ***funkce*** reálného argumentu (úhlu vyjádřeného v obloukové míře) jsou funkce

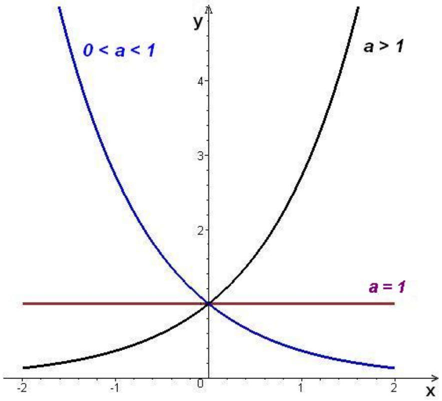
$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x, \quad f(x) = \operatorname{tg} x, \quad f(x) = \operatorname{cotg} x.$$

Lze je zavést pomocí jednotkové kružnice takto:

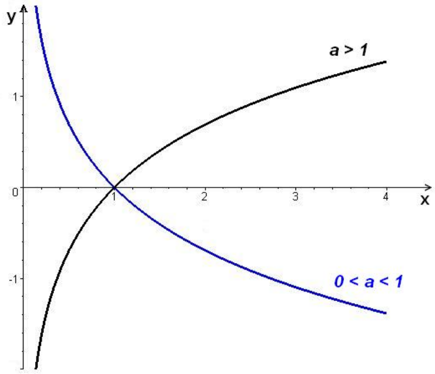
Je-li x délka oblouku na jednotkové kružnici mezi bodem $[1, 0]$ a průsečíkem této kružnice s polopřímkou, vycházející z počátku souřadnic, je $\sin x$ roven druhé souřadnici tohoto průsečíku a $\cos x$ jeho první souřadnici (viz obr.1.21 resp. 1.22, na obr. 1.23 je znázorněn tg x).

Zřejmě platí ***základní trigonometrická identita*** (plyne z Pythagorovy věty pro trojúhelník, pomocí něhož je sinus a kosinus definován)

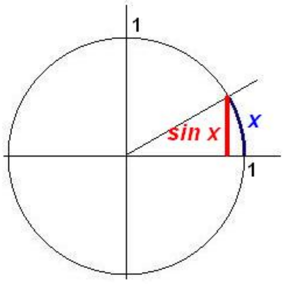
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$



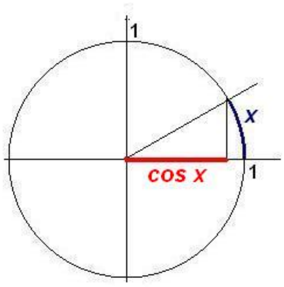
Obr. 1.19: Exponenciální funkce $f(x) = a^x$



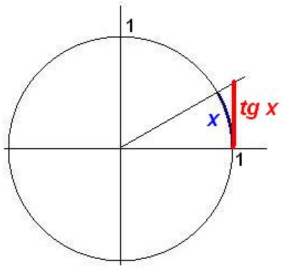
Obr. 1.20: Logaritmické funkce $f(x) = \log_a x$



Obr. 1.21: $\sin x$

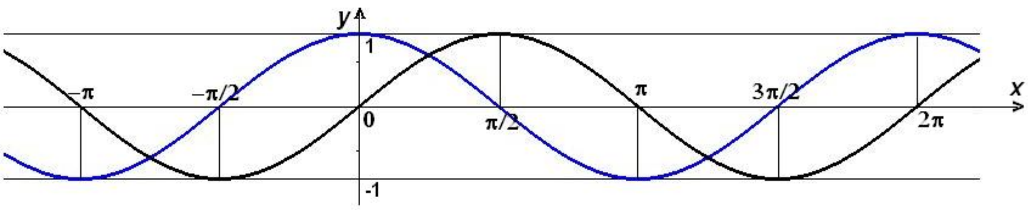


Obr. 1.22: $\cos x$



Obr. 1.23: $\operatorname{tg} x$

Funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou definovány na $\mathbb{R}$ a jsou periodické s periodou 2π. Funkce sinus je lichá a funkce kosinus sudá.

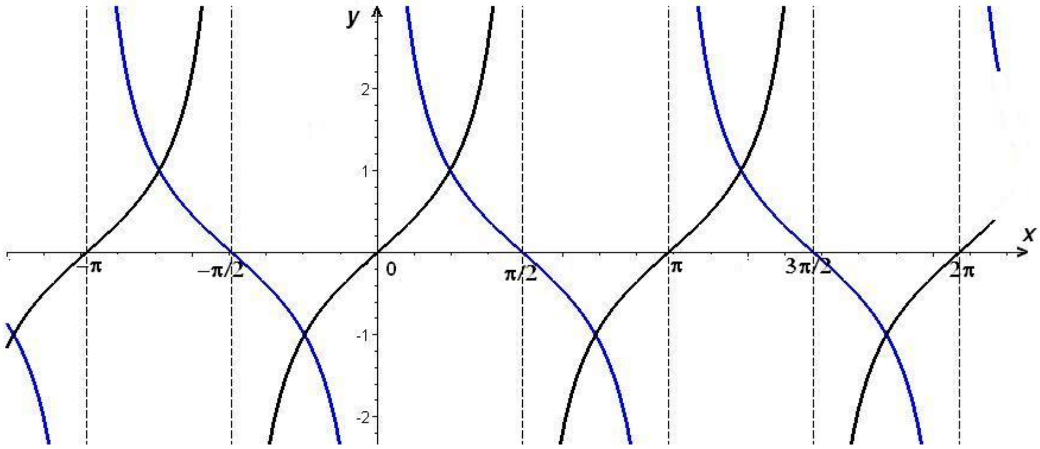


Obr. 1.24: Grafy goniometrických funkcí $y = \sin x$ $\quad y = \cos x$

Dále definujeme

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{a} \quad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Funkce $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ jsou liché funkce, periodické s periodou π.
Funkce $\operatorname{tg} x$ je definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, funkce $\operatorname{cotg} x$ je definovaná pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Obr. 1.25: Grafy goniometrických funkcí $y = \operatorname{tg} x$ $y = \operatorname{cotg} x$

Cyklometrické funkce jsou inverzní ke goniometrickým funkcím:

Funkce $f(x) = \arcsin x$
je definovaná na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ a je inverzní k funkci $\sin x$ na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$.

Funkce $f(x) = \arccos x$
je definovaná na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ a je inverzní k funkci $\cos x$ na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.

Funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x$
je definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$ a je inverzní k funkci tg x na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Funkce $f(x) = \operatorname{arccotg} x$
je definovaná na intervalu $(-\infty, \infty)$ a je inverzní k funkci cotg x na intervalu $(0, \pi)$.

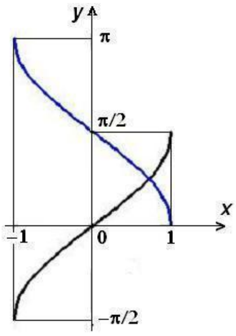
Pro cyklometrické funkce platí (pro libovolné x z definičního oboru těchto funkcí):

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$$

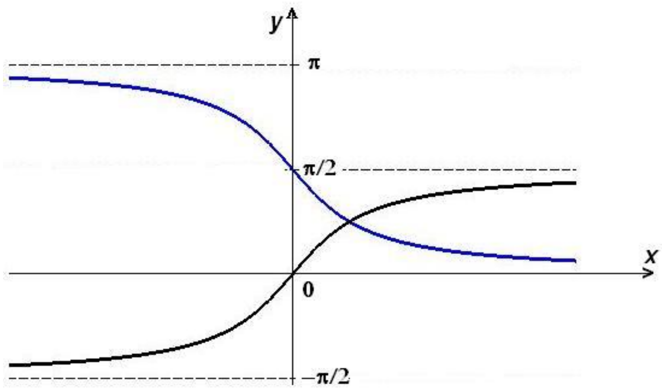
Funkce arcsin a arctg jsou rostoucí liché funkce, funkce arccos a arccotg jsou klesající funkce.

Poznámka 1.46. V odborných předmětech se dále ještě používají ***hyperbolické funkce***, se kterými se můžete seznámit v části pro zájemce na konci kapitoly.

Každou funkci, která vznikne z konečného počtu výše uvedených funkcí, tedy konstant, mocninných, exponenciálních a logaritmických funkcí, trigonometrických a cyklometrických funkcí, pomocí konečného počtu aritmetických operací (tedy sečítání, odečítání, násobení a dělení) a tvoření složené funkce, nazýváme ***elementární funkcí.***



Obr. 1.26: $\arcsin x$, $\arccos x$



Obr. 1.27: $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$

Jak se mění grafy elementárních funkcí při změně některých parametrů si můžete vyzkoušet v tomto Mapletu.

Posloupnosti

Posloupností nazýváme každou funkci, jejímž definičním oborem je množina přirozených čísel $\mathbb{N}$, tedy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost reálných čísel. Obvykle klademe

$$a_n = f(n)$$

a tuto hodnotu nazýváme ***n-tým členem posloupnosti***. Posloupnost s n-tým členem a_n označujeme symbolem $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo zkráceně (a_n).

Je-li zadán předpis pro výpočet n-tého členu posloupnosti pomocí předchozího (resp. pomocí k předchozích členů), tedy pomocí a_{n-1} (resp. a_{n-1}, a_{n-2}, $\ldots$, a_{n-k}) spolu se zadáním hodnoty a_1 (resp. hodnot a_1, a_2, $\ldots$, a_k), říkáme, že posloupnost je ***zadaná rekurentně***.

Příklad 1.47. Posloupnost daná rekurentním vztahem

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad \text{kde} \quad a_1 = a_2 = 1, \quad \text{tedy} \quad (a_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$$

se nazývá Fibonacciho posloupnost. Tato posloupnost má strukturu, kterou pozorujeme v mnohých situacích, které v sobě mají obsažen růst – ať už jde o růst rostlin nebo o růst počítačové databáze. Dá se ukázat, že pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti platí

$$a_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left[(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\right].$$

Je-li $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost a $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost přirozených čísel, potom se složené zobrazení $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ nazývá ***vybraná posloupnost*** z posloupnosti (a_n).

Příklad 1.48. Posloupnost 1, 4, 9, 16, 25, ... je vybraná z posloupnosti 1, 2, 3, 4, 5, ... Vnitřní složka příslušného složeného zobrazení je $(n_k) = (k^2)$.

Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je ***aritmetická***, existuje-li číslo d tak, že platí rekurentní vztah

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Číslo d se nazývá ***diference***.

Pro n-tý člen aritmetické posloupnosti platí $a_n = a_1 + (n-1)d$,
pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti platí $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. První tvrzení je zřejmé; jako cvičení na matematickou indukci ukážeme platnostdruhého tvrzení: Pro $n = 2$ tvrzení zřejmě platí; Nechť $n = 3$, potom

$$\begin{aligned} s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1 + d + a_3 \\ s_3 &= a_3 + a_2 + a_1 = a_3 + a_3 - d + a_1 \\ 2s_3 &= 3(a_1 + a_3) \Rightarrow s_3 = \tfrac{3}{2}(a_1 + a_3) \end{aligned}$$

Nechť platí $a_n = a_1 + (n-1)d$. Potom

$$\begin{aligned} &s_{n+1} = \tfrac{n}{2}(a_1 + a_n) + a_{n+1} \\ &s_{n+1} = a_1 + \tfrac{n}{2}(a_2 + a_{n+1}) \\ &2s_{n+1} = a_1 + \tfrac{n}{2}(a_1 + a_2 + a_n + a_{n+1}) + a_{n+1} = a_1 + a_{n+1} + \tfrac{n}{2}(a_1 + a_1 + d + a_{n+1} - d + a_{n+1}) = \\ &\quad = a_1 + a_{n+1} + \tfrac{n}{2}(2a_1 + 2an + 1) = (n+1)(a_1 + a_{n+1}) \\ &s_{n+1} = \tfrac{n+1}{2}(a_1 + an + 1 \end{aligned}$$

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá ***geometrická***, jestliže existuje číslo q tak, že platí

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Číslo q se nazývá ***kvocient***.

Pro n-tý člen geometické posloupnosti platí $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$,

pro součet prvních n členů geometické posloupnosti platí $s_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} & q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & q = 1 \end{cases}$

Pro zájemce

- ***Vietovy vzorce:*** Je-li

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n),$$

platí:

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -a_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n), \\ a_{n-2} &= a_n(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n), \\ &\vdots \\ a_0 &= (-1)^n a_n(x_1x_2 \cdots x_n). \end{aligned}$$

- ***Odvození Hornerova schématu:*** Buď P polynom a $x_0 \in \mathbb{R}$. Víme, že existují polynomy Q, R tak, že platí

$$P(x) = (x - x_0)\, Q(x) + R(x),$$

kde stupeň $R <$ stupeň $(x - x_0)$, tedy je roven nule a R je konstanta, $R \in \mathbb{R}$.
Po dosazení x_0 do předchozí rovnosti dostaneme

$$P(x_0) = R, \text{ tedy } P(x) = (x - x_0)\, Q(x) + P(x_0).$$

Nechť tedy

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \text{ a } Q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i.$$

Potom platí

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = (x - x_0) \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + P(x_0) = b_{n-1} x^n + \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i-1} - b_i x_0) x^i + P(x_0) - b_0 x_0.$$

Porovnáním koeficientů dostaneme rovnosti uvedené v levé části následující tabulky, zatímco v pravém sloupci jsou rovnosti z nich jednoduše odvozené:

$$\begin{array}{ll}
a_n = b_{n-1} & b_{n-1} = a_n \\
a_{n-1} = b_{n-2} - b_{n-1} x_0 & b_{n-2} = a_{n-1} + x_0 b_{n-1} \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
a_i = b_{i-1} - b_i x_0 & b_{i-1} = a_i + x_0 b_i \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
a_1 = b_0 - b_1 x_0 & b_0 = a_1 + x_0 b_1 \\
a_0 = P(x_0) - b_0 x_0 & P(x_0) = a_0 + x_0 b_0.
\end{array}$$

V pravém sloupci je tedy naznačen výpočet koeficientů částečného podílu Q včetně hodnoty $P(x_0)$ polynomu P v bodě x_0.

- ***Hyperbolické funkce*** jsou funkce

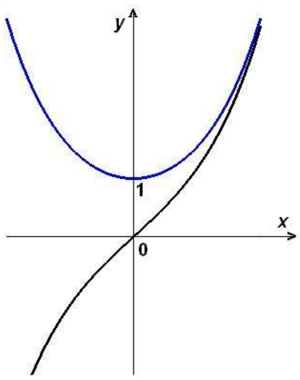
$$f(x) = \sinh x, \quad f(x) = \cosh x, \quad f(x) = \operatorname{tgh} x, \quad f(x) = \operatorname{cotgh} x.$$

Jsou definovány pomocí následujících předpisů:

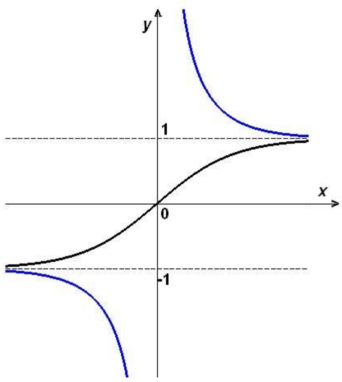
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Grafy hyperbolických funkcí jsou v obr.1.28 a 1.29.



Obr. 1.28: $\sinh x$,$\cosh x$



Obr. 1.29: tgh x,cotgh x

Shrnutí

V tomto odstavci jsme připomněli pojmy:

- funkce: předpis f, přiřazující každému prvku nějaké množiny (definičního oboru D_f) prvek jiné množiny (oboru hodnot H_f),
- graf funkce jedné proměnné: množinu bodů v rovině daných vztahem $\Gamma = \{(x, y) \mid x \in D_f,\ y = f(x)\}$,

některé typy funkcí (uvedené charakterizující vztahy vždy platí pro každé x z definičního oboru funkce f):

- monotonní funkce: rostoucí resp. klesající ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ resp. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$) a neklesající resp. nerostoucí ($x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq \leq f(x_2)$ resp. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$),
- sudé resp. liché funkce: $f(-x) = f(x)$ resp. $f(-x) = -f(x)$,
- periodické funkce: existuje číslo p (perioda) tak, že platí $f(x \pm p) = f(x)$,
- ohraničené funkce (shora, zdola): obor hodnot funkce je ohraničený (shora, zdola).

Vytváření nových funkcí z daných funkcí f, g, φ (vztahy platí pro všechna x z definičních oborů vzniklých funkcí):

- zúžení funkce: f/M je funkce s definičním oborem $D_{f/M} = D_f \cap M$ a s vlastností $f/M(x) = f(x)$,
- složená funkce: $f \circ \varphi$ (čti f po φ) je dána vztahem $(f \circ \varphi)(x) = f[\varphi(x)]$,
- inverzní funkce: f^{-1} je funkce s definičním oborem rovným oboru hodnot funkce f a s vlastností $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$,
- součet, rozdíl, součin a podíl funkcí: funkce $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ s vlastnostmi $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Dále jsme uvedli důležité funkce, se kterými budeme hlavně pracovat:

- elementární funkce: polynomy, racionální lomené funkce, obecné mocniny, exponenciální a logaritmické funkce, goniometrické, cyklometrické a hyperbolické funkce,
- posloupnosti: funkce s definičním oborem $\mathbb{N}$.

Podrobněji jsme si povšimli polynomů a racionálních lomených funkcí; popsali jsme

- rozklad polynomu v reálném oboru: vyjádření polynomu ve tvaru

$$P(x) = a_n(x-\alpha)^k \dots (x^2+px+q)^t \dots,$$

  kde α je k-násobný reálný kořen polynomu $P(x)$ a kvadratická rovnice $x^2+px+q=0$ má komplexně sdružené reálné kořeny (tj. $p^2-4q<0$), tedy polynom $P(x)$ má t-násobné komplexně sdružené kořeny,

- rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky: vyjádření racionální lomené funkce ve tvaru

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \dots + \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \dots +$$

$$+\frac{B_t x + C_t}{(x^2+px+q)^t} + \frac{B_{t-1}x + C_{t-1}}{(x^2+px+q)^{t-1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)},$$

  je-li $Q_n(x) = (x-\alpha)^k \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^t \cdot \ldots$ rozklad jmenovatele v reálném oboru.

- Pro výpočet funkční hodnoty polynomu, tedy i pro ověření, že dané číslo je kořenem, jsme si uvedli Hornerovo schéma.

Otázky a úkoly

1. Formulujte, co rozumíme pod pojmem funkce a jak je obvykle funkce zadaná.

2. Co je přirozený definiční obor funkce?

3. Najděte alespoň jednu funkci s definičním oborem D a oborem hodnot H tak, aby platilo:

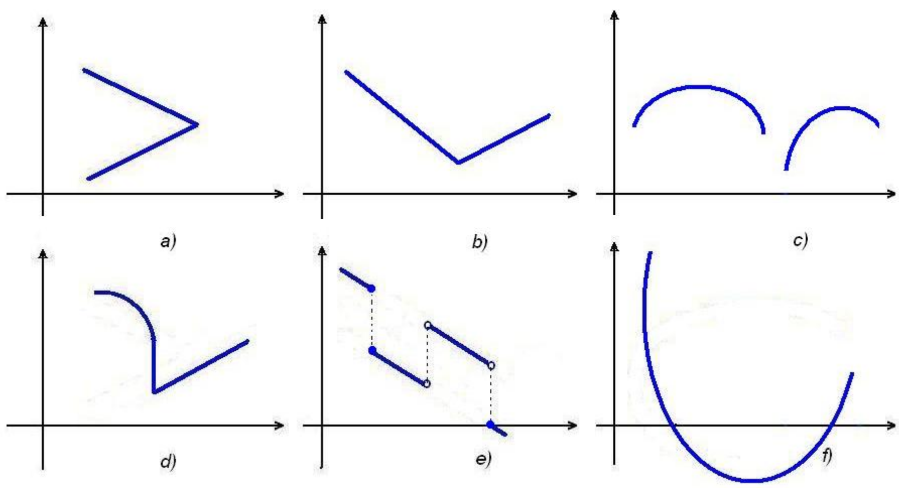
   a) $D = \mathbb{R}$ a $H = \{3, 5\}$,
   b) $D = \mathbb{N}$ a H je množina všech kladných lichých čísel,
   c) $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -2, 3\}$ a H je libovolný.

4. Napište funkční předpisy a najděte definiční obory funkcí f, pro které platí:

   a) $f(x)$ je průměr kruhu o poloměru x,
   b) $f(x)$ je plošný obsah kruhu o poloměru x,
   c) $f(x)$ je objem krychle o straně x,
   d) $f(x)$ je povrch krychle o straně x,
   e) $f(x)$ je délka přepony pravoúhlého trojúhelníka, jehož odvěsny mají délku 3 a x.

5. Co je to graf funkce?

6. V obrázcích 1.30 jsou nakresleny křivky. Ve kterém případě se může jednat o graf jisté funkce a ve kterém ne?



Obr. 1.30: Grafy

7. Známe-li graf funkce f, jak sestrojíme graf funkce g, pro kterou platí ($c, a \in \mathbb{R}$):

   a) $g(x) = f(-x)$, b) $g(x) = -f(x)$,

   c) $g(x) = f(x+c)$, d) $g(x) = f(x) + c$,

   e) $g(x) = a\, f(x)$, f) $g(x) = f(ax)$?

8. Nechť $f(x) = 2x - 3$ a $I = \langle 1, 2\rangle$. Pro který z následujících intervalů platí, že $f(I)$ je jeho podmnožinou?
   $\langle -3, 0\rangle,\ \langle -2, 1\rangle,\ \langle -1, 2\rangle,\ \langle 0, 3\rangle,\ \langle 1, 4\rangle.$

9. Nechť $f(x) = x^2 + x$ a $I = \langle -1, \frac{1}{2}\rangle$. Pro který z následujících intervalů platí, že $f(I)$ je jeho podmnožinou?
   $\langle -1, 0\rangle,\ \langle -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\rangle,\ \langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\rangle,\ \langle -\frac{1}{4}, 1\rangle,\ \langle 0, \frac{3}{2}\rangle.$

10. Jestliže pro jistou funkci g platí $g(I) \subset (1, 4)$, do kterého z následujících intervalů zobrazí interval I funkce $-g$?
    $(1, 4),\ (0, 4),\ (-4, 0),\ (-1, 4),\ (-3, 3).$

11. Jestliže pro jistou funkci h platí $h(I) \subset (1, 4)$, do kterého z následujících intervalů zobrazí interval I funkce $\frac{1}{h}$?
    $(1, 4),\ (0, 4),\ (-4, 0),\ (\frac{1}{2}, 2),\ (\frac{1}{100}, 1).$

12. Jestliže platí $f(I) \subset (0, 5)$ a $g(I) \subset (-5, 10)$, do kterého z následujících intervalů zobrazí interval I funkce $f + g$?
    $(0, 5),\ (-5, 10),\ (0, 10),\ (-5, 15),\ (0, 15).$

13. Kdy řekneme, že se dvě funkce sobě rovnají?

14. Zjistěte, které z následujících funkcí f, g resp. h (s přirozeným definičním oborem) se sobě rovnají:

    a) $f(x) = 1,\ g(x) = \frac{x}{x}$,
    b) $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = \frac{x}{x^2}$,
    c) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}},\ g(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$,
    d) $f(x) = \ln x^2,\ g(x) = 2 \ln x$,
    e) $f(x) = x,\ g(x) = \sqrt{x^2},\ h(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$.

15. Co je to zúžení funkce?

16. Najděte zúžení funkcí z příkladu 14 tak, aby se takto vzniklé funkce sobě rovnaly.

17. Jsou dány funkce f a g. Najděte jejich zúžení tak, aby platilo $f/_M = g/_M$:

    a) $f(x) = |x-1| + |x+1|,\quad g(x) = |2x|$,
    b) $f(x) = 2x^2 - 1,\quad g(x) = 1 - 3x$.

18. Funkce f a g jsou definovány tabulkou (znak N znamená, že funkce není definovaná):

x	$f(x)$	$g(x)$
a	-2	3
b	0	-1
c	1	5
d	N	-3
e	2	N

Najděte funkce $f+g,\ f-g,\ f/g,\ g/f,\ f^2-fg+3$.

19. Pro funkci f platí $\quad f(x+1) = f(x) + f(1) + 1\ \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Čemu se rovná $f(0)$?

b) Je-li navíc $f(1) = 1$, najděte
$f(2),\ f(3),\ f(-1)$.

20. Pro funkci g platí $\quad g(x+y) = g(x) + g(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Čemu se rovná $g(0)$?

b) Ukažte, že platí
$g(-x) = -g(x),\ g(2x) = 2g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Je-li navíc $g(1) = 1$, najděte
$g(2),\ g(3),\ g(\frac{1}{2})$.

21. Najděte alespoň tři příklady funkce f pro kterou platí obě následující podmínky:

a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$,

b) $f(ax) = af(x)$.

Pokuste se formulovat obecný předpis pro funkce s těmito vlastnostmi.

22. Je-li funkce f rostoucí, je nutně

a) funkce $2f$ rostoucí

b) funkce $-f$ klesající,

c) funkce f^2 rostoucí,

d) funkce $\frac{1}{f}$ klesající (pro všude nenulovou funkci f)?

23. Nechť funkce f, g jsou definovány na stejném intervalu.

a) Jsou-li funkce f i g rostoucí, je i funkce $f+g$ rostoucí?

b) Najděte rostoucí funkci f a klesající funkci g tak, aby funkce $f+g$ byla rostoucí.

24. Nechť f je lichá funkce, která je definovaná pro $x = 0$. Jakou zde má funkční hodnotu?

25. Najděte k tak, aby funkce

a) $f(x) = x^2 + kx + 1$ byla sudá,
b) $f(x) = x^3 - kx^2 + 2x$ byla lichá.

26. Ukažte, že pro libovolnou funkci f definovanou na intervalu $(-k, k)$, $k > 0$ platí, že $f(x) + f(-x)$ je sudá a $f(x) - f(-x)$ je lichá funkce.

27. Nechť jsou funkce f a g periodické se stejnou periodou. Ukažte, že funkce $f + g$, fg, f/g jsou také periodické.

28. Nechť funkce f je periodická s periodou p. Je-li $a \neq 0$, jakou periodu má funkce $f(ax)$?

29. Ukažte, že platí:

a) Všechny konstantní funkce jsou ohraničené.
b) Je-li funkce f na intervalu I ohraničená, je i funkce $-f$ na I ohraničená.
c) Jsou-li funkce f a g ohraničené na intervalu I, jsou také funkce $f + g$ a fg na intervalu I ohraničené.

30. Ve druhém sloupci najděte funkce inverzní k funkcím v prvním sloupci:

$$f_1(x) = \frac{1}{x+2}, \quad g_1(x) = \frac{x}{1-x},$$

$$f_2(x) = \frac{x}{x-1}, \quad g_2(x) = \frac{x}{x-1},$$

$$f_3(x) = 3 + \frac{1}{x}, \quad g_3(x) = \frac{1}{x} - 2,$$

$$f_4(x) = \frac{x}{2} - 2, \quad g_4(x) = \frac{1}{x-3},$$

$$f_5(x) = \frac{x}{x+1}, \quad g_5(x) = 2x + 4.$$

31. Může být funkce sama k sobě inverzní?

32. Ukažte, že inverzní funkce k prosté liché funkci je opět lichá. Co můžeme říci o inverzní funkci k prosté sudé funkci?

33. Co je to složená funkce?

34. Ověřte, že pro definiční obor složené funkce $f \circ g$ platí $D_{f \circ g} = g^{-1}(D_f)$.

35. Ukažte, že každá z následujících funkcí splňuje vztah $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = x$:

a) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$, b) $f(x) = 2 - \frac{1}{x-1}$,

c) $f(x) = -\frac{1}{x+1}$, d) $f(x) = a - \frac{1}{x+b}$, kde $a + b = 1$.

36. Nechť pro funkce f, g, h definované na intervalu I platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\forall x \in I$ a nechť jsou tyto funkce na I rostoucí. Ukažte, že platí $f(f(x)) \leq g(g(x)) \leq h(h(x))$.

37. Jsou dány funkce f a g pomocí vztahů

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{pro} \quad x < 1, \\ 2x - 1 & \text{pro} \quad x \geq 1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{pro} \quad x < 0, \\ x + 2 & \text{pro} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

a) Načrtněte jejich grafy.

b) Najděte: $f(g(0))$, $f(g(1))$, $f(g(-2))$, $f(f(-1))$, $f(f(-2))$, $g(f(0))$, $g(f(-$
$-1))$,
$g(f(-2))$, $g(g(1))$, $g(g(-1))$.

c) Řešte vzhledem k x: $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, $f(x) = x$, $g(x) = x$, $f(x) = g(x)$, $f(g(x)) = 1$, $g(f(x)) = 1$.

d) Dokažte, že $f(x) \geq 0$ pro všechna x.

e) Zjistěte, kdy je $g(x) < 0$.

f) Dokažte, že $f(g(x)) \geq 0$ pro všechna x.

g) Existuje inverzní funkce k f?

h) Existuje inverzní funkce k $g \circ f$?

i) Najděte předpis pro funkci $f \circ g$ a nakreslete její graf.

Cvičení

1. Nechť funkce f je definovaná předpisem $f(x) = \sqrt{x}$. Určete

   a) $f(9)$, b) $f(u)$, c) $f(x+1)$, d) $f(x^2)$.

2. Nechť funkce h je definovaná předpisem $h(x) = \frac{x}{x+1}$. Určete

   a) $h(-x)$, b) $h(x+1)$, c) $h\left(\frac{1}{x}\right)$, d) $h[h(x)]$.

3. Nechť funkce p je definovaná předpisem $p(x) = \frac{1}{x} - 1$. Ověřte, zda platí

   a) $p(x) + p(-x) = -2$, b) $p(2x) = \frac{1}{2}[p(x) - 1]$, c) $p(1-x) = \frac{1}{p(x)}$,

   d) $\frac{-1}{p(x+1)} = p(x) + 2$, e) $\frac{1}{p(x)+1} = p\left(\frac{1}{x}\right) + 1$.

4. Jsou dány funkce

   a) $f(x) = \arcsin(\cos x)$, b) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{pro} \quad x \in \langle -\pi, 0), \\ \sin x & \text{pro} \quad x \in \langle 0, \pi \rangle. \end{cases}$

   Najděte hodnoty
   a) $f(0)$, $f(-\pi)$, $f(3\pi)$, $f(\frac{\pi}{2})$, $f(\frac{\pi}{4})$;
   b) $f(0)$, $f(-\frac{\pi}{2})$, $f(\frac{\pi}{4})$, $f(3)$, $f(4)$.

5. Najděte funkce f, g, pro které platí

   a) $f(x) = ax + b$, $\quad f(3) = -3,\ f(-2) = 4,$

   b) $g(x) = ax^2 + bx + c$, $\quad g(0) = 1,\ g(-1) = 2,\ g(3) = 18.$

   Vypočtěte $f(\frac{1}{2})$, $f(1)$, $g(\frac{1}{2})$, $g(1)$.

6. Najděte (přirozené) definiční obory následujících funkcí f, je-li $f(x)$ rovno:

   a) $\dfrac{7x^2 + 6x + 5}{x^2 - 1}$, b) $\dfrac{2x + 3}{x^2 + 3x + 2}$,

   c) $\sqrt{x^2 - 4}$, d) $\sqrt{(3x - 2)^2}$,

   e) $\dfrac{1}{\sqrt{x - 3}}$, f) $\dfrac{3}{\sqrt{x^2 - 25}}$,

   g) $\sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$, h) $\sqrt{(x - 2)(x + 3)}$,

   i) $\dfrac{x}{|x|}$, j) $|x| + [x]$,

   k) $\dfrac{x}{[x]}$, l) $\dfrac{x}{x - [x]}$,

   m) $\dfrac{2x^2}{x + |x|}$, n) $\dfrac{2}{x + |x| - 2}$,

   o) $|x|\sqrt{\dfrac{4 - x^2}{|4 - x^2|}}$, p) $|x|\sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{|4 - x^2|}}$,

   q) $(x^2 + x - 6)^{\sqrt{2}}$, r) $\frac{1}{2^{\frac{x}{x-1}} - 3^{\frac{x}{x-1}}}$,

   s) $\ln(\sqrt{x - 3} - 2)$, t) $\ln(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$,

   u) $\ln \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x + 1}$, v) $\operatorname{tg} \sqrt{2x}$,

   w) $\arcsin(3 - \sqrt{4 - x^2})$, x) $\ln(2 \cos x - \sqrt{3})$,

   y) $\sqrt{\sin x} + \sqrt{9 - x^2}$, z) $\sin\left(\ln \frac{1}{3x+1}\right)$.

7. Pomocí známých grafů funkcí a) $y = |x|$, b) $y = x^2$, c) $y = \sin x$, d) $y = \ln x$ a d) $y = \mathrm{e}^x$ sestrojte grafy funkcí

   a) $y = -|x|,\ y = 1 + |x|,\ y = |x| - 2,\ y = |x + 1|,\ y = |x - 2|,\ y = |x + 1| - 2,$ $y = 2|x|;$

   b) $y = 4x^2,\ y = \frac{1}{4}x^2,\ y = -x^2,\ y = -2x^2,\ y = x^2 + 2,\ y = x^2 - 1,$ $y = (x + 2)^2,\ y = (x - 1)^2,\ y = \frac{1}{2}(x - 1)^2,\ y = 2(x + 2)^2,\ y = x^2 + 4x + 2,$ $y = 4x^2 + 8x + 12;$

c) $y = |\sin x|,\ y = -\sin x,\ y = 2\sin x,\ y = \sin(x+3),\ y = 2\sin\frac{x}{2};$

d) $y = \ln(2-x),\ y = \ln x^2,\ y = 3\ln 2x,\ y = \ln\frac{1}{x};$

e) $y = \mathrm{e}^{-x},\ y = -\mathrm{e}^{x},\ y = -e^{-x},\ y = 1+\mathrm{e}^{x},\ y = \mathrm{e}^{x-1},\ y = \frac{1}{10}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$

8. Načrtněte grafy funkcí

a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro} \quad x \in \langle 0,1), \\ 3-x & \text{pro} \quad x \in \langle 1,3); \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad |x| > 1, \\ 1+x & \text{pro} \quad -1 \le x \le 0, \\ 1-x & \text{pro} \quad 0 < x \le 1. \end{cases}$

9. Pro zadané funkce f a g najděte $|f|,\ f+g,\ f-g,\ fg,\ g/f$:

a) $f(x) = 3x,\ \ g(x) = 2-x,$

b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x},\ \ g(x) = \dfrac{1}{x},$

c) $f(x) = \sqrt{x+2},\ \ g(x) = \dfrac{1}{x+2},$

d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \le 0, \\ x & \text{pro} \quad x > 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \le 0, \\ -x^2 & \text{pro} \quad x > 0. \end{cases}$

10. Zjistěte, které z uvedených funkcí jsou sudé resp. liché:

a) $f(x) = 2,$ b) $f(x) = \sqrt{x},$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x},$

d) $f(x) = x - x^2,$ e) $f(x) = x^3 - x,$ f) $f(x) = \frac{1}{2x},$

g) $f(x) = \frac{x+2}{x-2},$ h) $f(x) = \frac{x^2}{1+2x^2},$ i) $f(x) = \frac{x}{|x|},$

j) $f(x) = \frac{x}{[x]},$ k) $f(x) = (-1)^{[x]},$ l) $f(x) = x^4 + \frac{1}{\sqrt[4]{x^2}},$

m) $f(x) = \chi(x),$ n) $f(x) = \chi(x)[1-\chi(x)],$ kde χ je Dirichletova funkce,

o) $f(x) = 2^x,$ p) $f(x) = x^2 + \sin x^2,$ q) $f(x) = \frac{a^x+1}{a^x-1},$

r) $f(x) = \frac{1}{4+\operatorname{cotg}^2 x},$ s) $f(x) = \cos(\pi - x),$ t) $f(x) = \frac{\sin x}{x},$

u) $f(x) = x\cosh x,$ v) $f(x) = \frac{x+\operatorname{tgh} x}{2+3\cos x},$ w) $f(x) = \sin x + \cos x,$

x) $f(x) = x\log|x|,$ y) $f(x) = \log\frac{2-x}{2+x},$ z) $f(x) = \frac{\sinh x}{\sin x}.$

11. Zjistěte, které z následujících funkcí jsou periodické, a najděte jejich periodu:

a) $f(x) = 3$, b) $f(x) = (-1)^{[x-1]}$,

c) $f(x) = \frac{3^{[x]}+(-3)^{[x]}}{3^{[x]}}$, d) $f(x) = \operatorname{sgn}(x - [x] - \frac{1}{2})$,

e) $f(x) = 2 + \cos x + \cos^2 x$, f) $f(x) = x \sin x$,

g) $f(x) = \sin \frac{2x}{3}$, h) $f(x) = \cos x^2$,

i) $f(x) = 5 \cos 2\pi x$, j) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$,

k) $f(x) = \arcsin(\sin x)$, l) $f(x) = 3 \cos x - 5 \sin 4x$,

m) $f(x) = \ln(\cos x + \sin x)$, n) $f(x) = \sin 2x + \operatorname{tg} \frac{x}{2}$,

o) $f(x) = 2^{3+2\sin x}$, p) $f(x) = [x] \arccos([x])$.

12. Zjistěte, které z následujících funkcí jsou prosté a najděte k nim inverzní funkce:

a) $f(x) = 3x$, b) $f(x) = (x - 2)(2 + x)$,

c) $f(x) = 2 + 3\sqrt{x}$, d) $f(x) = \frac{3-\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}$,

e) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$, f) $f(x) = \frac{x^3}{x^3+1}$,

g) $f(x) = 4^{\sin x}$, h) $f(x) = 3^{\frac{x}{x-1}}$,

i) $f(x) = 3 + \arccos(2x - 1)$, j) $f(x) = 1 + \sqrt{3 + \mathrm{e}^{2x}}$,

k) $f(x) = 2^{1+\ln\sqrt{x-2}}$, l) $f(x) = 2^{3+\operatorname{arctg} x}$,

m) $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$, n) $f(x) = \operatorname{tg}(1 - 2 \operatorname{arctg} x)$,

o) $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x < 0 \\ 2x & \text{pro} \quad x \geq 0, \end{cases}$ p) $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{\pi}{2}} & \text{pro} \quad |x| \geq 1, \\ \arcsin x & \text{pro} \quad |x| < 1. \end{cases}$

q) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{pro} \quad x < -1, \\ x & \text{pro} \quad |x| \leq 1, \\ \sqrt{x} & \text{pro} \quad x > 1. \end{cases}$ r) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro} \quad x < -1, \\ x & \text{pro} \quad |x| \leq 1, \\ \sqrt{x} & \text{pro} \quad x > 1. \end{cases}$

13. Ukažte, že každá z následujících funkcí je sama k sobě inverzní:

a) $f(x) = x$, b) $f(x) = -x$,

c) $f(x) = \frac{1}{x}$, d) $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$,

e) $f(x) = 2 + \frac{1}{x - 2}$, f) $f(x) = -\frac{x}{x + 1}$,

g) $f(x) = \frac{ax + b}{x - a}$, h) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ pro $x \geq 0$.

14. Najděte funkce f , pro které platí:

a) $f(2x) = x$, b) $f(x+1) = x$,

c) $f(1-x) = x$, d) $f(x^2) = x$,

e) $f(\frac{1}{x}) = x$, f) $f(1+x) = 4x - 1$,

g) $f(2x) = 4x - 1$, h) $f(x^2) = 4x - 1$,

i) $f(1-x) = 4x - 1$, j) $f(\frac{1}{x}) = 4x - 1$.

15. Následující polynomy rozložte v reálném oboru:

a) $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$, b) $x^5 - 5x^3 + 4x$,

c) $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$, d) $x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$,

e) $x^5 + x^4 - x^3 - x^2$, f) $x^7 - 6x^5 + 9x^3 - 4x$,

g) $x^3 + x^2 + x + 1$, h) $x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 16x^2 + 11x - 3$,

i) $x^4 + 1$, j) $x^6 - 4x^5 + x^4 + 6x^3 + 20x^2 - 56x + 32$,

k) $x^6 - 64$, l) $x^6 - 5x^5 + 6x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 24x + 16$.

16. Následující racionální lomené funkce rozložte na parciální zlomky:

a) $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$, b) $\dfrac{3x^2 + 30x - 120}{(x-2)(x+2)(x-5)}$,

c) $\dfrac{x-1}{(x+1)(x+2)^2}$, d) $\dfrac{3x-4}{(x-2)(x-1)^3}$,

e) $\dfrac{5x^2 - 14x + 17}{(x-5)^2(x-1)^2}$, f) $\dfrac{x^3 + x - 1}{x(x^2+1)}$,

g) $\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$, h) $\dfrac{1}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 2x + 2)}$,

i) $\dfrac{192}{x^6 - 64}$, j) $\dfrac{4 + 3x^4}{x^2(x^2+1)^2}$,

k) $\dfrac{1}{x^4 + 1}$, l) $\dfrac{x^3 - 6x^2 + 10x - 2}{(x-3)^2(x^2 - 4x + 5)}$.

Výsledky

1. a) 3, b) $\sqrt{u}$, c) $\sqrt{x+1}$, d) $|x|$;

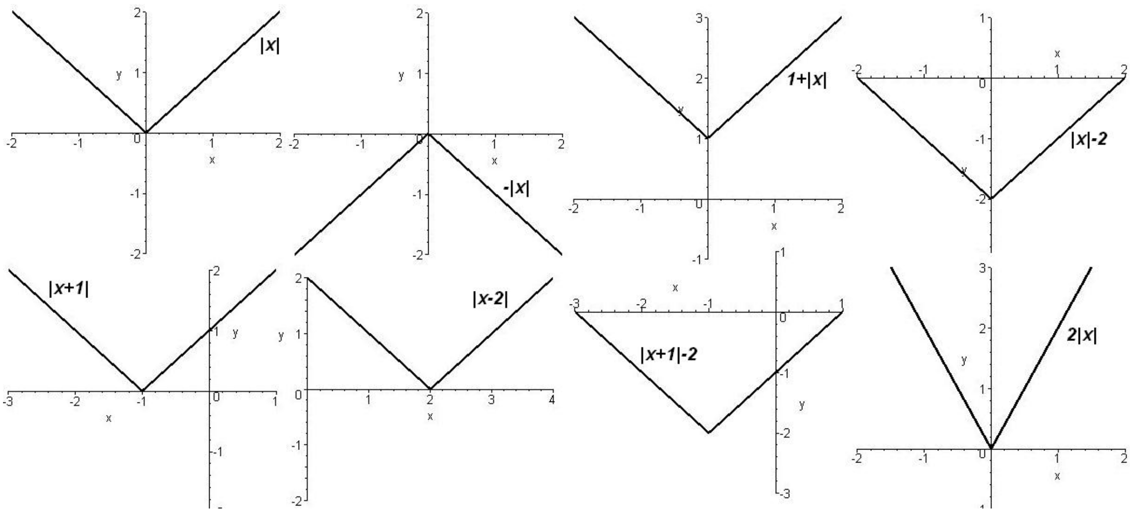
2. a) $\frac{x}{x-1}$, b) $\frac{x+1}{x+2}$, c) $\frac{1}{1+x}$, $x \neq 0$, d) $\frac{x}{2x+1}$, $x \neq -1$;

3. a),b) ano, c) ne (ano pro $x \neq 1$), d) ne (ano pro $x \neq -1$), e) ano;

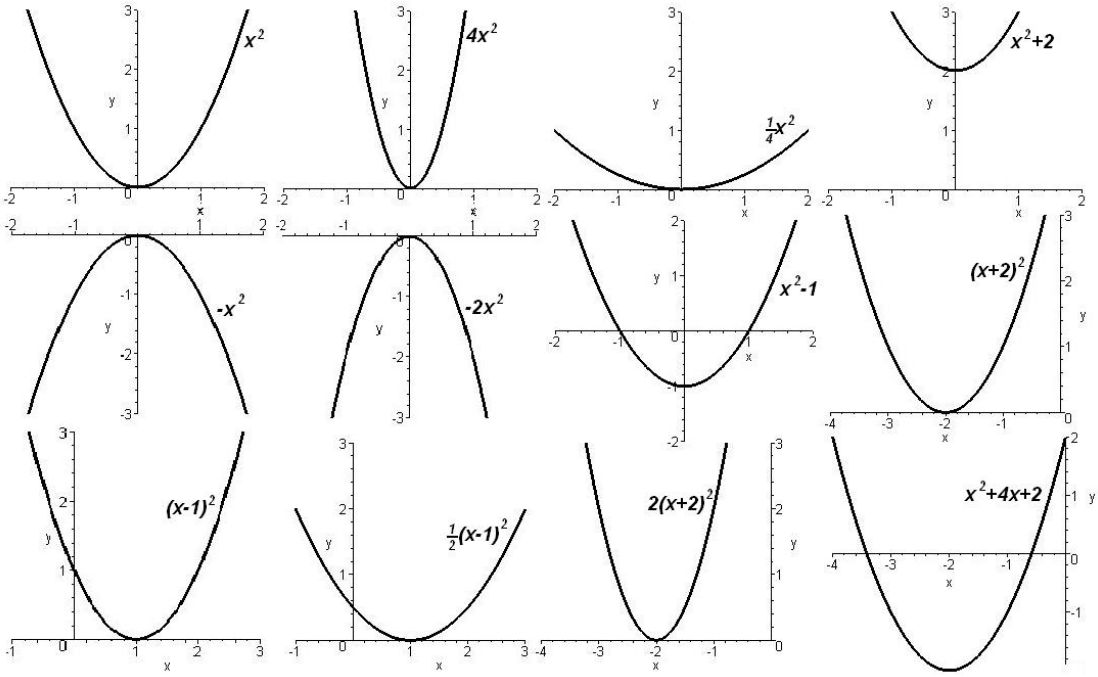
4. a) $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{4}$, b) $0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin 3$, není def.; **5.** a) $f(x) = \frac{1}{5}(6 - 7x)$, b) $g(x) = \frac{1}{3}(5x^2 + 2x) + 1$;

6. a) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, b) $\mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$, c) $(-\infty, -2\rangle \cup \langle 2, \infty)$, d) $\mathbb{R}$, e) $(3, \infty)$, f) $(-\infty, -5) \cup (5, , \infty)$, g) $(-\infty, -1\rangle \cup (1, \infty)$, h)

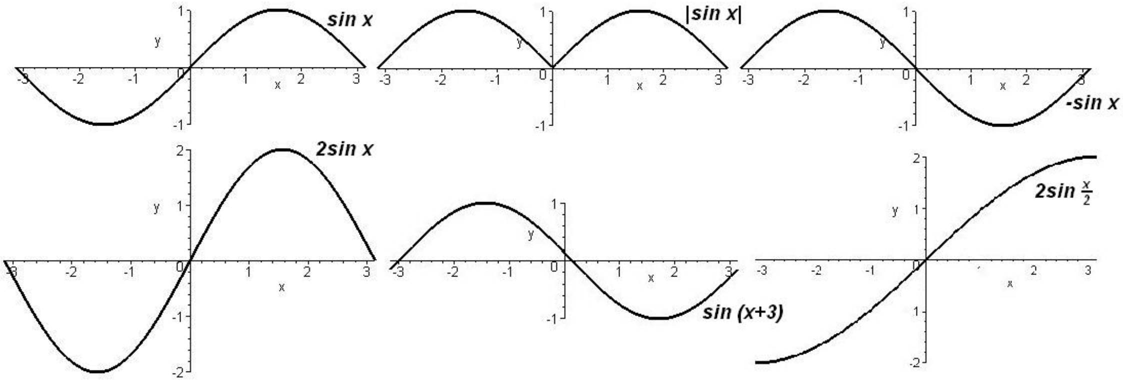
$(-\infty,-3\rangle \cup \langle 2,\infty)$, i) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, j) $\mathbb{R}$, k) $\mathbb{R}\setminus\langle 0,1)$, l) $(-\infty,0)$, m) $(0,\infty)$, n) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, o) $(-2,2)$, p) $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$, q) $(-\infty,-3)\cup(2,\infty)$, r) $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, s) $(7,\infty)$, t) $(0,\infty)$, u) $(-\infty,2)\cup(3,\infty)$, v) $\langle 0,\infty)\setminus\{x\,|\,x=\frac{\pi^2}{8}\,(1+2k)^2, k\in\mathbb{Z}\}$, w) $\{0\}$, x) $(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$, y) $\langle 0,3\rangle$, z) $(-\frac{1}{3},\infty)$;



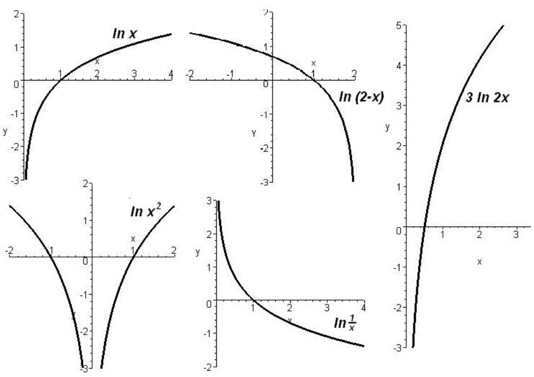
Obr. 1.31: 7. a)



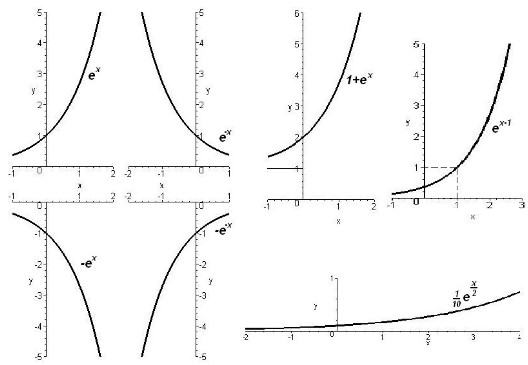
Obr. 1.31: 7. b)



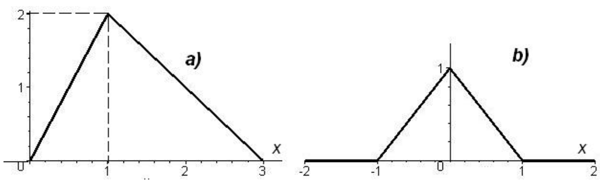
Obr. 1.32: 7. c)



Obr. 1.33: 7. d)



Obr. 1.34: 7. e)



Obr. 1.34: 8. a), b)

9. b) $(f+g)(x)=1,\ x\neq 0$, , $(g/f)(x)=\frac{1}{x-1},\ x\neq 0$, d) $|f|=f$, $(f+g)(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x-x^2 & x>0\end{cases}$, $(f-g)(x)=$ $=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x+x^2 & x>0\end{cases}$, $(fg)(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ -x^3 & x>0\end{cases}$, $(g/f)(x)=-x,\ x>0$;

10. a),h), l), m),n),p),r),s),t),z) sudé, c),e),f),i),q),u),v),x),y) liché;

11. a) $\forall p\in\mathbb{R}$, b) 2, c) 2, d) 1, e) 2π, g) 3π, i) 1, k),l),m),n),o) 2π;

12. a) $\frac{x}{3}$, b) není prostá, c) $\frac{1}{9}(x-2)^2,\ x\ge 2$, d) $\frac{(x-3)^2}{(2x-1)^2},\ x\in(\frac{1}{2},3\rangle$, e) není prostá, f) $-\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}$, g) není prostá, h) $\frac{\ln x}{\ln x-\ln 3}$, i) $\frac{1}{2}(1+\cos(x-3)),\ x\in\langle 0,\pi\rangle$, j) $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x-2)$, k) $2+\mathrm{e}^{2(x-1)}$, l) $\operatorname{tg}\left(\frac{\ln x}{\ln 2}-3\right)$, m) $2^{x-1}-2^{1-x}$, n) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(1-\operatorname{arctg}x)$, o) x pro $x<0$, $\frac{x}{2}$ pro $x\ge 0$, p) $\sin x$ pro $|x|<\frac{\pi}{2}$, $\frac{2}{\pi}x$ pro $|x|\ge 2$, q) není prostá, r) $\frac{x}{2}$ pro $x<-2$, x pro $|x|\le 1$, x^2 pro $x>1$;

14. a) $\frac{x}{2}$, b) $x-1$, c) $1-x$, d) $\sqrt{x}$ pro $x\ge 0$, $-\sqrt{|x|}$ pro $x<0$, e) $\frac{1}{x}$ pro $x\neq 0$, 0 pro $x-0$, f) $4x-5$, g) $2x-1$, h) $4\sqrt{x}-1$ pro $x\ge 0$, $-4\sqrt{|x|}-1$ pro $x<0$, i) $3-4x$, j) $\frac{4}{x}-1$ pro $x\neq 0$, -1 pro $x=0$;

15. a) $x(x-1)(x-2)(x-3)$, b) $x(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$, c) $(x+2)^2(x+1)$, d) $(x-1)^3(x-2)$, e) $x^2(x-1)(x+1)^2$, f) $x(x-1)^2(x+1)^2(x-2)(x+2)$, g) $(x^2+1)(x+1)$, h) $(x-1)^3(x^2+2x+3)$, i) $(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{x}+1)$, j) $(x-1)(x-2)^3(x^2+3x+4)$, k) $(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$, l) $(x-1)(x-2)^3(x^2+2x+2)$;

16. a) $\frac{1}{2x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+2)}$, b) $\frac{4}{x-2}-\frac{6}{x+2}+\frac{5}{x-5}$, c) $\frac{2}{x+2}+\frac{3}{(x+2)^2}-\frac{2}{x+1}$, d) $\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}$, e) $\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{9}{2(x-5)^2}$, f) $1-\frac{1}{x}\,\frac{x}{x^2+1}$, g) $\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{4(x+1)^2}+\frac{1-2x}{4(x^2+1)}-\frac{x}{2(x^2+1)^2}$, h) $\frac{1}{52(x-4)}-\frac{1}{20(x-2)}+\frac{4x+11}{130(x^2+2x+2}$, i) $\frac{1}{(x-2}-\frac{1}{x+2}+\frac{x-4}{x^2-2x+4}-$ $-\frac{x+4}{x^2+2x+4}$, j) $\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x^2+1}-\frac{7}{(x^2+1)^2}$, k) $\frac{2-x\sqrt{2}}{4(x^2-x\sqrt{2}+1)}+\frac{2+x\sqrt{2}}{4(x^2+x\sqrt{2}+1)}$, l) $\frac{1}{2(x-3)^2}-\frac{2x-1}{2(x^2-4x+5)}$.

2 Diferenciální počet

2.1 Úvodní poznámky – motivace

Při řešení úloh z fyziky, chemie, technických a jiných vědních oborů, při matematické formulaci zákonů v přírodních vědách užíváme často pojmy jako např. derivace, integrál, diferenciální rovnice. Uveďme několik příkladů:

Příklad 2.1. Problém nalézt rozměry čtvercového otevřeného bazénu daného objemu V tak, aby na obložení jeho stěn bylo zapotřebí co nejméně materiálu, vede k úloze určit nejmenší hodnotu funkce

$$S = \frac{4V}{x} + x^2, \qquad x > 0,$$

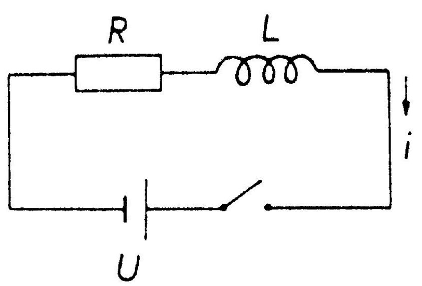
kde S je celkový plošný obsah stěn bazénu, x strana čtvercového dna; hloubka bazénu je $y = V/x^2$. Řešením úlohy vychází

$$x = \sqrt[3]{2V}, \quad y = \sqrt[3]{\tfrac{1}{4}V}.$$

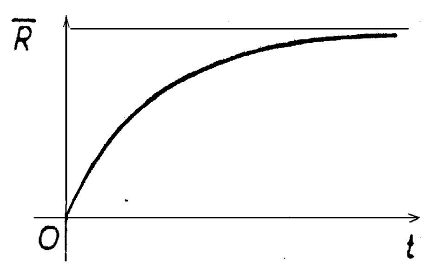
Hodnotu x jsme získali jako kořen rovnice

$$-\frac{4V}{x^2} + 2x = 0,$$

jejíž levá strana je derivací funkce S podle proměnné x.



Obr. 2.1: RL obvod



Obr. 2.2: $i(t) = \frac{U}{R}(1 - e^{-(R/L)t})$

Příklad 2.2. V obrázku 2.1 je schematicky znázorněn elektrický obvod s rezistorem odporu R a induktorem indukčnosti L připojený na zdroj konstantního napětí U. Po zapnutí spínače začne obvodem protékat proud i. Pro jeho průběh v závislosti na čase dostaneme užitím Kirchhoffova zákona vztah

$$Ri + L\frac{\mathbf{d}i}{\mathbf{d}t} = U.$$

Druhý člen na levé straně této rovnice, zvané diferenciální, tj. součin indukčnosti L a derivace $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ funkce $i = i(t)$, udává indukované napětí na induktoru. Řešením diferenciální rovnice je funkce

$$i(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right).$$

Průběh proudu je znázorněn na grafu této funkce v obrázku 2.2.

Příklad 2.3. Konáme-li sadu měření např. nějaké fyzikální veličiny, je každé jednotlivé měření zatíženo chybou, jejíž příčiny neznáme a pokládáme ji za tzv. náhodnou veličinu. Pravděpodobnost P, že chyba určitého měření leží v intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$, je dána vzorcem

$$P(-\varepsilon, \varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-x^2/(2\sigma^2)}\, dx,$$

kde výraz $\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-x^2/(2\sigma^2)}\, dx$ se nazývá určitý integrál funkce $e^{-x^2/(2\sigma^2)}$, σ je střední kvadratická chyba měření.

Již z těchto několika málo příkladů je patrné, že pomocí výše použitých pojmů můžeme formulovat úlohy nebo vytvořit matematický model situací v různých oborech technické praxe a jejich řešením získat údaje, které nás zajímají. Vytváření takového aparátu, odvozování a vyšetřování jeho vlastností patří do vědního oboru zvaného ***matematická analýza*** .

2.2 Limita

Při vyšetřování průběhu funkce v celém jejím definičním oboru je především třeba charakterizovat její lokální vlastnosti, tj. chování funkce v okolí jednotlivých bodů. Zajímá nás např. chování dané funkce f, blíží-li se hodnoty argumentu x k některému bodu a. Může se stát, že se při tomto blížení funkční hodnoty blíží k některému číslu b, což budeme vyjadřovat formulací „funkce f má v bodě a limitu rovnu b“. Proces „blížení“ je ovšem nutno matematicky precizovat, což učiníme v této kapitole. Nejprve uvedeme některé problémy, které k této situaci vedou.

V matematické analýze hraje např. důležitou úlohu podíl

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a},$$

kde φ je daná funkce, a pevný bod. Tento podíl tzv. přírůstku funkce $\varphi(x) - \varphi(a)$ k přírůstku argumentu $x - a$ může značit např. průměrnou rychlost pohybu bodu po přímce, jehož zákon dráhy je dán vztahem $y = \varphi(x)$, kde y je dráha, kterou bod urazí za čas x. Zajímá nás, jak se mění hodnota tohoto podílu – jinak řečeno, jak se mění hodnota funkce f dané vztahem

$$f(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a},$$

jestliže se hodnoty argumentu x blíží k číslu a, což často značíme $x \to a$. V uvedeném fyzikálním významu daného podílu se ptáme, jak se mění průměrná rychlost pohybu, když se časový úsek zkracuje.

Je zřejmé, že musí být stále $x \neq a$ a že jmenovatel se blíží k nule; obvykle se blíží k nule i čitatel. Jakých hodnot však při tom nabývá podíl, tj. jaké jsou hodnoty funkce $f(x)$? Uvedeme několik příkladů.

Příklad 2.4. a) Nechť $\varphi(x) = x^2$, $a = 1$. Potom

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Pro $x \neq 1$ je hodnota funkce f rovna

$$f(x) = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1.$$

Když $x \to 1$ (přičemž stále $x \neq 1$), pak $f(x) \to 2$ (viz obr. 2.3).

Jinak formulováno: K libovolně malému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé x, pro něž je $0 < |x - 1| < \delta$, platí $|f(x) - 2| < \varepsilon$, neboli

pro $x \in (1 - \delta, 1 + \delta), x \neq 1$ platí $f(x) \in (2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon)$.

b) Nechť $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 0$. Potom

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}.$$

Pro $x \neq 0$ je

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

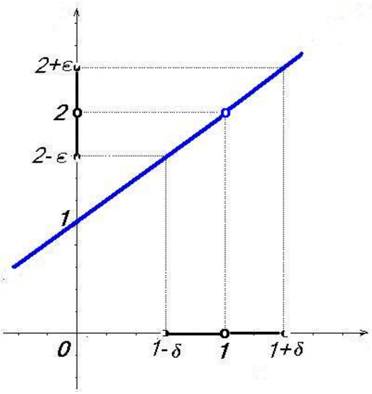
Jestliže $x \to 0$, pak hodnoty $f(x)$ neomezeně vzrůstají, protože jmenovatel zlomku se blíží v kladných hodnotách k nule a čitatel je stále roven 1 (viz obr. 2.4). Formulováno přesněji:

Zvolíme-li libovolně velké $K > 0$, můžeme nalézt $\delta > 0$ tak, že pro každé $x \neq 0$, pro něž je $|x| < \delta$, platí $f(x) > K$.

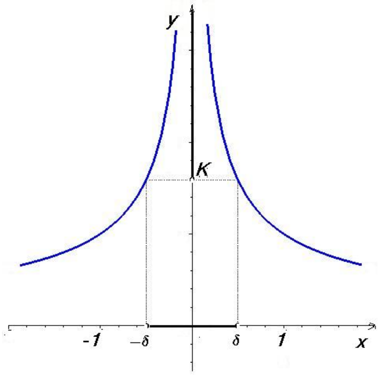
c) Nechť $\varphi(x) = |x|$, $a = 0$. Potom

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1 & x < 0 \end{cases},$$

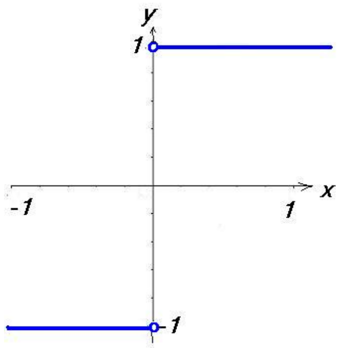
tedy funkční hodnoty dané funkce se „zleva“ blíží k -1 a „zprava“ k 1 (viz obr. 2.5)
.



Obr. 2.3: $y = \frac{x^2-1}{x-1}$



Obr. 2.4: $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$



Obr. 2.5: $y = \frac{|x|}{x}$

Definice limity

Definici základního prostředku matematické analýzy – limity – budeme formulovat tak, aby byla použitelná i pro zobrazení, která jsou obecnější než reálné funkce reálné proměnné:

Definice 2.5. Řekneme, že funkce f má v bodě a ***limitu*** b, když

- a je hromadným bodem množiny D_f,
- k libovolnému okolí $\mathcal{U}(b)$ limity b existuje okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a tak, že funkce f zobrazí redukované okolí $\mathcal{U}^*(a)$ do $\mathcal{U}(b)$, tedy

$$\forall \mathcal{U}(b) \;\; \exists \mathcal{U}(a) : \mathcal{U}^*(a) \subset f^{-1}(\mathcal{U}(b)).$$

Potom píšeme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ nebo $f(x) \to b$ pro $x \to a$.

Je-li $b \neq \pm\infty$, mluvíme o ***vlastní limitě***, v opačném případě o ***limitě nevlastní.***

Nejčastěji budeme vyšetřovat funkce, které budou definovány na nějakém redukovaném okolí bodu a; v tom případě bude první podmínka v definici limity automaticky splněna.

Jsou-li body a, b vlastní a označíme-li ε, δ poloměry okolí $\mathcal{U}(b)$, $\mathcal{U}(a)$ v tomto pořadí, lze druhou podmínku v definici limity formulovat následovně:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D_f : \;\; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Je-li b nevlastní, např. $b = \infty$, lze tvrzení $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ formulovat takto:

$$\forall K > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in D_f : \;\; 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > K,$$

a analogicky pro a nevlastní, např. $a = \infty$, lze tvrzení $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ formulovat takto:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K > 0 \; \forall x \in D_f : \;\; x > K \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Jako cvičení zformulujte podobně definici limity pro případy, kdy a nebo b je nevlastní bod $-\infty$.

Příklad 2.6. V příkladu 2.4 jsme ukázali přímo z definice limity, že

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\infty,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}\ \text{neex.}$$

Poznámky k definici limity

1. Vlastními slovy můžeme fakt, že funkce f má v bodě a limitu b formulovat takto: Funkční hodnoty funkce f v okolí bodu a lze s libovolnou přesností aproximovat číslem b; neboli blíží-li se bod x k bodu a, liší se hodnota $f(x)$ od čísla b libovolně málo.

2. Všimněte si, že v definici limity je vyloučen bod $x = a$, tudíž limita funkce v bodě a nezávisí na tom, zda a jak je funkce v tomto bodě definovaná. Proto dvě funkce, které se od sebe liší pouze v bodě a, budou mít v tomto bodě tutéž limitu, nebo nebude mít limitu žádná z nich.

3. V definici je využito jen hodnot funkce v okolí bodu a. Proto dvě funkce, které mají tytéž hodnoty ve všech bodech nějakého redukovaného okolí bodu a, mají v tomto bodě tutéž limitu, nebo v něm nemá limitu žádná z nich.

4. Funkce, jejíž limitu počítáme, tedy nemusí být definovaná v bodě a. Zřejmě by ale nemělo smysl, aby v některém redukovaném okolí tohoto bodu neležely vůbec body z definičního oboru funkce f – je tedy přirozené požadovat, aby bod a byl hromadným bodem definičního oboru.

Snadno se ukáže (ověřte jako cvičení - sporem) platnost následujícího tvrzení:

Věta 2.7. *Funkce f má v bodě a nejvýš jednu limitu.*

Příklad 2.8. Vypočítáme několik limit přímo z definice:

1. $\lim_{x\to a} c = c$,
2. $\lim_{x\to a} x = a$,
3. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$,
4. $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty \quad \text{pro}\ a > 1$
5. $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad \text{pro}\ a > 1$

Řešení.

1. Jde o limitu konstantní funkce $f(x) = c$. Zvolíme-li $\mathcal{U}(c)$ libovolně, potom $f(x) \in \mathcal{U}(c)$ pro všechna x a tím spíše pro x z nějakého redukovaného okolí bodu a; to platí i v tom případě, že bod a je nevlastní.

2. V tomto případě je $f(x) = x$ a pro každé $\mathcal{U}(a)$ je $f(x) \in \mathcal{U}(a)$, je-li $x \in \mathcal{U}^*(a)$.

3. Zvolme okolí $(-\varepsilon,\, \varepsilon)$ bodu 0 ($\varepsilon > 0$). Potom $f(x) \in (-\varepsilon,\, \varepsilon)$ znamená, že $|\frac{1}{x}| < \varepsilon$. To je splněno jednak pro všechna $x \in (\frac{1}{\varepsilon},\, \infty)$, což je okolí bodu ∞ , jednak pro všechna $x \in (-\infty,\, -\frac{1}{\varepsilon})$, což je okolí bodu $-\infty$.
4. $a^x > K$ pro $x > \log_a K$.
5. $|a^x| = a^x < \varepsilon$ pro $x < \log_a \varepsilon$.

$\square$

Limita parciální funkce (relativní limita)

Vyšetřujme spolu s limitou funkce f v bodě a také limitu parciální funkce $f/_M$, kde a je hromadný bod množiny M.
Limitu funkce $f/_M$ budeme značit symbolem $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x)$ a nazveme ji ***relativní limitou*** nebo též limitou vzhledem k množině M.

Jestliže platí, že ke každému okolí $\mathcal{U}(b)$ existuje $\mathcal{U}^*(a)$ tak, že funkce f zobrazí všechny body tohoto okolí do $\mathcal{U}(b)$, tím spíše tam zobrazí všechny body množiny $\mathcal{U}^*(a) \cap M$, tedy zřejmě platí následující věta:

Věta 2.9. *Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, potom pro každou množinu M takovou, že a je hromadným bodem $M \cap D_f$, platí $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in M}} f(x) = b$.*

Speciálním případem relativních limit jsou jednostranné limity:

Definice 2.10. Definujeme:

1. ***limitu zprava***: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in (a,\infty)}} f(x)$,
2. ***limitu zleva***: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in (-\infty,a)}} f(x)$.

Příklad 2.11.

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, 2. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Řešení.
1. Zvolme okolí (K, ∞), kde $K > 0$. Potom pro všechna $x \in (0, \frac{1}{K})$ je $\frac{1}{x} \in (K, \infty)$, přičemž interval $(0, \frac{1}{K})$ je průnikem okolí $(-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$ bodu 0 s intervalem $(0, \infty)$.
Část 2. se ukáže analogicky. $\square$

Vztah mezi limitou funkce a jednostrannými limitami popisuje následující užitečná věta:

Věta 2.12. *Funkce f má ve vnitřním bodě definičního oboru limitu, právě když má v tomto bodě obě jednostranné limity a ty se sobě rovnají. Potom platí*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x).$$

Důkaz věty naleznete v části **Pro zájemce** na konci kapitoly.

Pro výpočet limit můžete použít tento Maplet.

Limita posloupnosti

Protože množina $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel má jediný hromadný bod ∞, má u posloupností smysl vyšetřovat jen limitu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Pro posloupnost můžeme definici limity napsat v následujícím tvaru:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists K > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}, n > K : \quad |a_n - b| < \varepsilon.$$

Formulováno vlastními slovy: Posloupnost (a_n) má limitu b, jestliže v libovolném okolí limity b od jistého indexu leží všechny členy posloupnosti.

Posloupnost, která má vlastní limitu, se nazývá ***konvergentní***, posloupnost, která má nevlastní limitu nebo nemá žádnou limitu se nazývá ***divergentní***.

Příklad 2.13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Řešení. Posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)$ je zúžením funkce $f : f(x) = \frac{1}{x}$ na $\mathbb{N}$, tj. $\left(\frac{1}{n}\right) = f/_{\mathbb{N}}$. Protože již víme, že $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ (příklad 2.8), dostáváme podle věty 2.9 o relativní limitě $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$ □

Posloupnost 1, 1, 2, $\frac{1}{2}$, 3, $\frac{1}{3}$, 4, $\frac{1}{4}$, … zřejmě nemá limitu, ale můžeme z ní vybrat dvě konvergentní posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Pro limity těchto vybraných posloupností platí, že v libovolném okolí každého z nich leží nekonečně mnoho členů dané posloupnosti, ale ne všechny od jistého indexu, jak to platí pro limitu. Takové „parciální limity“ posloupnosti nazýváme **hromadnými hodnotami** zadané posloupnosti, definujeme:

Definice 2.14. Bod b se nazývá ***hromadnou hodnotou*** posloupnosti (a_n), jestliže pro každé okolí $\mathcal{U}(b)$ je $a_n \in \mathcal{U}(b)$ pro nekonečně mnoho indexů n.

Porovnejme definici hromadné hodnoty posloupnosti s definicí limity, tj. $a_n \in \mathcal{U}(b)$ pro všechna n z některého okolí ∞; takových indexů n je jistě nekonečně mnoho. Odtud vidíme, že pokud má posloupnost limitu, je tato limita její hromadnou hodnotou (a to jedinou). V obecném případě může mít posloupnost více hromadných hodnot; zavádíme následující označení:

Definice 2.15. Největší z hromadných hodnot posloupnosti (a_n) se nazývá ***horní limita*** a značí se $\limsup a_n$ nebo $\overline{\lim} a_n$. Nejmenší z hromadných hodnot posloupnosti (a_n) se nazývá ***dolní limita*** a značí se $\liminf a_n$ nebo $\underline{\lim} a_n$.

Z definice plyne
$$\liminf a_n \leq \limsup a_n,$$
přičemž rovnost nastává, právě když má posloupnost (a_n) limitu. Potom platí
$$\liminf a_n = \limsup a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Poznamenejme, že tato skutečnost platí pro každou hromadnou hodnotu posloupnosti, tedy je-li číslo b hromadnou hodnotou posloupnosti (a_n), existuje vybraná posloupnost (a_k) z této posloupnosti pro kterou platí $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = b$.

Pojem horní a dolní limity posloupnosti budeme potřebovat v kapitole o mocninných řadách.

Věty o limitách

Pojem limity (zvlášť ve vlastním bodě) jsme zavedli hlavně pro případy, kdy se do zkoumaného výrazu hodnota, ve které limitu počítáme, nedá dosadit. V předchozím odstavci jsme v 2.8 přímo z definice ukázali, že pro funkce $f(x) = c, f(x) = x$ a $f(x) = a^x$ je limita v libovolném bodě rovna funkční hodnotě; ze střední školy víte, že takto můžeme limitu počítat vždy, když dosadit jde. K tomu ale potřebujeme prověřit některé vlastnosti limit (např. aritmetické operace s limitami) a dále některé další základní limity, např. že $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a, \quad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a$. Tomu se budeme věnovat v tomto odstavci, uvedeme (převážně bez důkazu) některé věty o limitách reálných funkcí, jejichž platnost umožní počítal limity dosazením.

Věta 2.16. Limity a nerovnosti

1. *Nechť* $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$. *Potom existuje okolí* $\mathcal{U}(a)$ *tak, že pro všechna* $x \in \mathcal{U}^*(a) \cap \cap D_f \cap D_g$ *platí* $f(x) < g(x)$.
2. *Nechť existují limity* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ *a na jistém okolí* $\mathcal{U}^*(a)$ *platí* $f(x) \leq g(x)$. *Potom je* $b \leq c$.
3. **(O sevření)** *Nechť* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ *a na jistém ryzím okolí bodu a platí*
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$
Potom také $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

Řečeno vlastními slovy: platí-li jistá (ostrá) nerovnost mezi limitami dvou funkcí v nějakém bodě, platí na nějakém okolí tohoto bodu stejná nerovnost i mezi funkčními hodnotami těchto funkcí; a naopak platí-li na jistém okolí nějaká (i ostrá) nerovnost mezi funkčními hodnotami dvou funkcí, platí (neostrá!) nerovnost mezi limitami; třetí tvrzení charakterizuje jeho název. Větu nebudeme dorazovat.

Užitím vět o nerovnostech a limitách ukážeme, že platí

1. Pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a, \quad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a.$$

   a) Nejdříve ověříme pomocné tvrzení:
   Platí-li $\forall\, x \in \mathcal{U}^*(a) \cap D_f$

$$|f(x) - b| \le k|x - a|,$$

   kde $a, b, k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, potom

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

   Zvolme libovolně okolí $\mathcal{U}(b, \varepsilon)$.
   Položíme-li $\delta = \varepsilon/k$, je $\mathcal{U}^*(a) = \{x \in \mathbb{R},\ 0 < |x - a| < \varepsilon/k\}$. Platí tedy

$$|f(x) - b| \le k|x - a| < k\,\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon,$$

   tedy $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

   b) Použijeme nerovnost $|\sin x| \le |x|$ která platí pro každé $x \in \mathbb{R}$, a nerovnosti $|\sin x| \le 1, \quad |\cos x| \le 1$. Protože

$$\sin x - \sin a = 2 \sin\frac{x-a}{2} \cos\frac{x+a}{2}, \quad \text{je} \quad |\sin x - \sin a| \le 2\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x - a|.$$

   Odtud podle a) je $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$.

   c) Analogicky se dokáže tvrzení $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$.

2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(Tuto limitu v nule budeme potřebovat při odvození derivace $sin(x)$ a navíc funkce $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, vystupuje odborných technických aplikacích.)

Pro

$$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{resp.} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

platí nerovnosti

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x, \qquad \text{resp.}$$

$$\operatorname{tg} x \leq x \leq \sin x,$$

které se názorně ověří pomocí zobrazení funkcí $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ na jednotkové kružnici

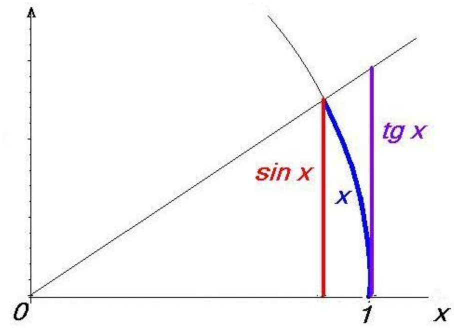
(obrázek vpravo)

Tedy pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $x \neq 0$ platí

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

Víme, že $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, kromě toho také $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

Zbytek plyne z věty o sevření.



Obr. 2.6: K výpočtu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

Pro výpočet limit je velmi důležitá následující věta o aritmetických operacích:

Věta 2.17. o aritmetických operacích pro limity *Nechť funkce f, g mají vlastní limity v bodě a a platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, pak*

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = b \pm c,$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = b \cdot c,$$

je-li navíc $c \neq 0$, platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$$

Důkaz věty naleznete v části **Pro zájemce** na konci kapitoly.

Příklad 2.18. Limita polynomu:

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a), \text{ kde } P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \text{ je polynom.}$$

Řešení. Vyšetřujme limitu k-tého členu polynomu s použitím věty 2.17 a příkladu 2.8.
Dostáváme $\lim\limits_{x\to a} a_k x^k = \lim\limits_{x\to a} a_k \cdot (\lim\limits_{x\to a} x)^k = a_k a^k$

a odtud $\lim\limits_{x\to a} P(x) = \lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \lim\limits_{x\to a} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k a^k = P(a).$ □

Je-li nějaká funkce f ohraničená (např. shora, $f(x) \leq c, c \in \mathbb{R}$) a přitom rostoucí, musí být (podle věty o nerovnostech) její limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \leq a$, navíc platí

Věta 2.19. *Každá funkce f, která je neklesající (resp. nerostoucí) a shora (resp. zdola) ohraničená na některém intervalu (K,∞) má v bodě ∞ vlastní limitu b a platí*

$$b = \sup_{x\in(K,\infty)} f(x) \qquad \left(\textit{resp. } b = \inf_{x\in(K,\infty)} f(x)\right)$$

Příklad 2.20. Posloupnost $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní.

Řešení.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right);$$

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right).$$

Odtud je zřejmé, že $a_n < a_{n+1}$, tedy posloupnost je rostoucí. Dále

$$a_n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2 + 1 = 3.$$

To znamená, že posloupnost je shora ohraničená a má vlastní limitu. □

Posloupnost $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n=1}^{\infty}$ vystupuje při tzv. složeném úrokování: Jestliže r je roční úroková míra a úrok se počítá k-krát ročně, pak banka jeden rok rozdělí na k stejně dlouhých úrokovacích období a za úrokovou míru platnou pro každé úrokovací období se vezme jen odpovídající část $\frac{r}{k}$. Na konci prvního úrokovacího období vzroste počáteční vklad P na hodnotu $P \cdot (1+\frac{r}{k})$ (korun), na konci druhého resp. třetího úrokovacího období na $P \cdot (1+\frac{r}{k}) \cdot (1+\frac{r}{k}) = P \cdot (1+\frac{r}{k})^2$ (korun) resp. $P \cdot (1+\frac{r}{k})^3$ (korun), na konci prvního roku se úrok počítal právě k-krát a budoucí hodnota B vkladu P v tomto okamžiku tedy je $B = P \cdot (1+\frac{r}{k})^k$ (korun).
Nechť počáteční vklad je jedna koruna, $P = 1$ a nechť úroková míra je extrémně vysoká $r = 1$.
Při úrokování jednou ročně vzroste vklad $P = 1$ ke konci roku na budoucí hodnotu $B = 1 \cdot (1+1) = 2$ koruny (zde jsme měli $k = 1, t = 1$).
Při úrokování dvakrát ročně ($k = 2$) vzroste vklad 1 koruna ke konci první poloviny roku při úrokové míře $0,5$ na hodnotu $B = \left(1+\frac{1}{2}\right)^{0,5\cdot 2} = 1,5$ koruny; ke konci roku,tedy po uplynutí druhého úrokovacího období při stejné úrokové míře na hodnotu

$B = \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$ (korun).
Indukcí je možné usoudit, že při n-násobném úrokování v průběhu roku vklad 1 koruna vzroste ke konci roku na hodnotu $B = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (korun) a to je posloupnost vyšetřovaná v předchozím příkladu.
Limita této posloupnosti hraje v matematické analýze významnou roli. Označujeme ji e a nazýváme ***Eulerovo číslo***:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ \ldots$$

Věty o nevlastních limitách

Věta 2.21.

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a}(-f(x)) = -\infty$

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty$

3. $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$

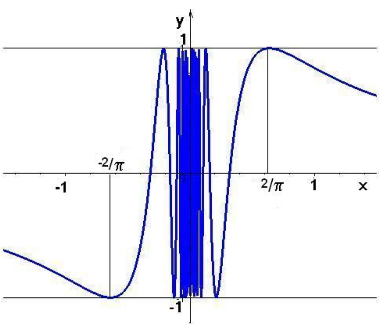
4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty,\quad g(x)$ *ohraničená* $\quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \infty$

5. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty,\quad g(x) \geq c,\ c > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \infty$

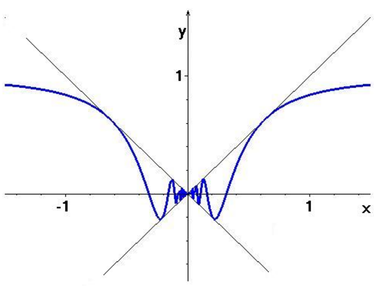
Věty 4., 5. jsou formulovány pro nevlastní limitu ∞ avšak z věty 1. plyne jejich platnost i pro bod $-\infty$. Kromě toho podmínky položené na funkci g stačí vztáhnout na některé okolí bodu a. Zaměníme-li ve větě 5. podmínku $g(x) \geq c$ na $g(x) \leq -c$, bude limita součinu $-\infty$. navíc z věty 3. a 5. plyne

6. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,\quad g(x)$ ohraničená $\quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = 0$

Příklad 2.22. $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$, protože funkce sin je ohraničená a $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.



Obr. 2.7: $f(x) = \sin\frac{1}{x}$



Obr. 2.8: $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$

Příklad 2.23. Podobně ukážeme, že pro funkci f definovanou předpisem

$$f(x) = x \cdot \chi(x) = \begin{cases} x & x \in (Q) \\ 0 & x \notin (Q) \end{cases} \qquad \text{platí} \qquad \lim_{x \to 0} x \cdot \chi(x) = 0,$$

protože funkce χ je ohraničená a $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$.

Příklad 2.24. Nechť $P_m(x)$ je polynom stupně m a $Q_n(x)$ polynom stupně n. Máme vypočítat

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, b) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, je-li $P_m(a) = Q_n(a) = 0$.

Řešení. a) Nechť

$$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0.$$

Rozlišíme tři případy:

1. $m < n$: Vyšetřovanou racionální lomenou funkci rozšíříme výrazem x^{-n} (čitatele i jmenovatele dělíme nejvyšší mocninou x, která se ve zlomku vyskytuje); dostaneme

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_m x^{m-n} + a_{m-1} x^{m-n-1} + \cdots + a_1 x^{1-n} + a_0 x^{-n}}{b_n + b_{n-1} x^{-1} + \cdots + b_1 x^{1-n} + b_0 x^{-n}};$$

limita jmenovatele je zřejmě rovna b_n (ostatní sčítance obsahují záporné mocniny x, a tedy mají nulovou limitu), protože podle předpokladu je $m < n$, jsou i všechny mocniny x v čitateli záporné, a tedy limita čitatele je rovna nule. Proto limita celého zlomku je rovna nule.

2. $m = n$: Opět dělíme čitatele i jmenovatele vyšetřovaného zlomku nejvyšší mocninou x, která je stejná v čitateli i jmenovateli a je rovna n. Dostaneme

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_n + a_{n-1} x^{-1} + \cdots + a_1 x^{1-n} + a_0 x^{-n}}{b_n + b_{n-1} x^{-1} + \cdots + b_1 x^{1-n} + b_0 x^{-n}},$$

mocniny x v čitateli i jmenovateli jsou záporné, a tedy je limita celého zlomku rovna $\dfrac{a_n}{b_n}$.

3. $m > n$: Nejdříve z polynomu v čitateli i z polynomu ve jmenovateli vytkneme koeficient u nejvyšších mocnin x:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m}{b_n} \lim_{x \to \infty} \frac{x^m + \frac{a_{m-1}}{a_m} x^{m-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_m} x + \frac{a_0}{a_m}}{x^n + \frac{b_{n-1}}{b_n} x^{n-1} + \cdots + \frac{b_1}{b_n} x + \frac{b_0}{b_n}}.$$

Čitatele i jmenovatele vydělíme nejvyšší mocninou x vyskytující se ve jmenovateli zlomku, tedy n a dostaneme:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m}{b_n} \lim_{x \to \infty} \frac{x^{m-n} + \frac{a_{m-1}}{a_m} x^{m-n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_m} x^{1-n} + \frac{a_0}{a_m} x^{-n}}{1 + \frac{b_{n-1}}{b_n} x^{-1} + \cdots + \frac{b_1}{b_n} x^{1-n} + \frac{b_0}{b_n} x^{-n}};$$

limita zlomku je rovna ∞, výsledek bude $\pm\infty$ podle znaménka podílu $\frac{a_m}{b_n}$.

Závěrem dostáváme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad m < n \\ a_n/b_n & \text{pro} \quad m = n \\ \left.\begin{array}{r} \infty \\ -\infty \end{array}\right\} & \text{pro} \quad \left\{\begin{array}{l} m > n,\ a_m/b_n > 0 \\ m > n,\ a_m/b_n < 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

b) Podle zadání je $x = a$ kořenem obou polynomů; platí tedy

$$P_m(x) = (x-a)^k\, \overline{P}(x), \quad Q_n(x) = (x-a)^l\, \overline{Q}(x),$$

kde $\overline{P}(a) \neq 0$ a $\overline{Q}(a) \neq 0$, přičemž k resp. l je násobnost čísla a jako kořenu polynomu $P_m(x)$ resp. $Q_n(x)$. Odtud

$$\lim_{x\to a} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{\overline{P}(a)}{\overline{Q}(a)} \lim_{x\to a} (x-a)^{k-l}.$$

Opět mohou nastat tři případy:

1. $k > l$: limita je zřejmě rovna nule;
2. $k = l$: limita je rovna $\overline{P}(a)/\overline{Q}(a)$;
3. $k < l$: zde výsledek závisí na tom, zda je číslo $l - k$ sudé nebo liché:
   (a) $k < l$, $l - k$ sudé – limita je rovna nekonečnu opatřenému znaménkem, jaké má podíl $\overline{P}(a)/\overline{Q}(a)$;
   (b) $k < l$, $l - k$ liché – limita neexistuje, jednostranné limity jsou nevlastní s různým znaménkem:
   Je-li $\overline{P}(a)/\overline{Q}(a) > 0$, je limita zprava rovna ∞, limita zleva rovna $-\infty$, pro $\overline{P}(a)/\overline{Q}(a) < 0$ jsou znaménka opačná.

□

Uvedeme několik konkrétních případů:

Příklad 2.25. Máme vypočítat následující limity racionálních lomených funkcí:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^5-3x+2}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^5-3x+2}{x^3-3x^2+3x-1}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3-2x}{6-13x^2}$

Řešení. a)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=4$$

b)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{x-2}\cdot\frac{1}{x-1}=3\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\begin{cases}3\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=\infty\\ 3\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty\end{cases}$$

c)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^5-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-2)(x-1)^2}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x-2)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x^4+x^3+x^2+x-2}=0$$

d)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^5-3x+2}{x^3-3x^2+3x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x-2)}{(x-1)^3}=$$
$$=2\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$$

e)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-4\frac{1}{x^2}}{1-3\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2}}=1$$

f)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}(1+\frac{3}{x})(1+\frac{4}{x})(1+\frac{5}{x})}{1+\frac{1}{x^3}-\frac{11}{x^4}}=0$$

g)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x}{6-13x^2}=-\frac{7}{13}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-\frac{2}{7}x}{x^2-\frac{6}{13}}=-\frac{7}{13}\lim_{x\to\infty}\frac{x(1-\frac{2}{7}\frac{1}{x^2})}{1-\frac{6}{13}\frac{1}{x^2}}=-\infty$$

□

Limita složené funkce

Věta 2.26. *Nechť*

1. *a je hromadný bod množiny D_f, kde $f=h\circ g$,*

2. existují limity

$$c = \lim_{x \to a} g(x), \quad d = \lim_{t \to c} h(t),$$

3. na jistém okolí bodu a je pro $x \neq a$ také $g(x) \neq c$.

Potom existuje limita složené funkce f v bodě a, přičemž

$$\lim_{x \to a} f(x) = d.$$

Poznámka: Je-li funkce h spojitá v bodě c (viz následující kapitola), je možno podmínku 3. vynechat.

V následujícím příkladě naznačíme techniku počítání limit:

Příklad 2.27. Máme vypočítat následující limity:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x^3} - 8}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x + \sin 7x}{\sin 3x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\operatorname{arctg} x}$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{3x^2 + 9}}{2x + 3}$ h) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x + 2\sqrt{3x + 4\sqrt{5x}}}}{\sqrt{2x + 1}}$

Řešení.

a) Limita čitatele i jmenovatele je rovna nule; zlomek upravíme tak, abychom (analogicky jako u racionální lomené funkce) příslušný kořenový činitel vykrátili:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x} \frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 + x - 2}{x} \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Při výpočtu limity jmenovatele jsme použili větu o limitě složené funkce:

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{2+x} = \sqrt{\lim_{x \to 0} (2+x)} = \sqrt{2}.$$

b) Zde můžeme jmenovatele rozložit jako rozdíl třetích mocnin:

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x^3} - 8} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x})^3 - 2^3} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(x + 2\sqrt{x} + 4)} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{x + 2\sqrt{x} + 4} = \frac{1}{12}.$$

c) Využijeme známé limity $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ s vnitřní složkou $x=kt$ pro vhodné k. Nejdříve čitatele i jmenovatele zlomku dělíme x a jednotlivé vzniklé zlomky rozšíříme vhodnou konstantou:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x+\sin 7x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 4x}{x}+\frac{\sin 7x}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{4\,\frac{\sin 4x}{4x}+7\,\frac{\sin 7x}{7x}}{3\,\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{4+7}{3}=\frac{11}{3}.$$

d) Položíme $x=\operatorname{tg} t$ (pro $t\to 0$ je $x\to 0$):

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{arctg} x}=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg} t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t\,\cos t}=1.$$

e) Využijeme známou goniometrickou identitu $1-\cos^2 x=\sin^2 x$ a opět větu o limitě složené funkce:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

f) Postupnými úpravami dostaneme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\frac{1}{\cos x}-1)}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x\,\sin^2 x}\,\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}=\frac{1}{2}.$$

g) Limita čitatele i jmenovatele je ∞; budeme postupovat analogicky jako u limit racionálních lomených funkcí, opět s použitím věty o limitě složené funkce:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+9}}{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2(3+\frac{9}{x^2})}}{x(2+\frac{3}{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{9}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

V čitateli zadaného podílu byla druhá odmocnina výrazu, v němž nejvyšší mocnina x byla 2; můžeme tedy říci, že nejvyšší mocnina x v čitateli je 1 a koeficient u této nejvyšší mocniny x je $\sqrt{3}$. Jmenovatel je polynom 1. stupně s koeficientem u x rovným 2. Vidíme, že náš výsledek je vlastně opět podíl koeficientů u nejvyšších mocnin (jsou-li tyto mocniny stejné).

h) Použijme předchozí úvahu: Nejvyšší mocnina x v čitateli i jmenovateli je $\frac{1}{2}$ a podíl koeficientů u těchto mocnin je $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a to by měl být výsledek. Přesvědčíme se výpočtem:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2\sqrt{3x+4\sqrt{5x}}}}{\sqrt{2x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\,\sqrt{1+\frac{2}{x}\sqrt{3x+4\sqrt{5x}}}}{\sqrt{x}\,\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+2\sqrt{3\,\frac{1}{x}+4\sqrt{5\,\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

□

Příklad 2.28. Pomocí věty o limitě složené funkce odvodíme některé důležité limity:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{c}{x}\right)^x = e^c$ d) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Řešení.

a) Pro $x>1$ platí

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

kde $n=[x]$ je celá část x, tj. přirozené číslo n, pro které je

$$n \le x < n+1.$$

Přejdeme-li k limitě pro $x\to\infty$, a tedy i pro $n\to\infty$, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Odtud podle věty o sevření 3 plyne

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

b) Návod: Použijeme větu o limitě složené funkce tak, že za vnitřní složku volíme funkci $u=-x-1$ (tedy $x=-u-1$).

c) Návod: Použijeme větu o limitě složené funkce tak, že za vnitřní složku volíme funkci $u=\frac{x}{c}$.

d) Návod: Použijeme větu o limitě složené funkce tak, že za vnitřní složku volíme funkci $u=\frac{1}{x}$.

□

Pro výpočet limit můžete použít tento Maplet, pro limity posloupností tento Maplet.

Asymptoty grafu funkce

Pojem asymptoty je nám znám u hyperbol – např. graf funkce $f(x)=\frac{1}{x}$ je rovnoosá hyperbola se svislou asymptotou $x=0$ a vodorovnou asymptotou $y=0$, horní větev hyperboly $y^2-x^2=1$ – graf funkce $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ má asymptoty $y=\pm x$; zajímají nás tedy „tečny grafu funkce v nekonečnu“, které budeme vyšetřovat pomocí limit v této kapitole.

Definice 2.29.

a) Přímka $x = a$ se nazývá ***asymptotou bez směrnice (svislou asymptotou)*** grafu funkce f, jestliže

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty, \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

b) Přímka $y = ax + b$ se nazývá ***asymptotou se směrnicí*** grafu funkce f, jestliže

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0, \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0.$$

Místo asymptota grafu funkce f říkáme také stručněji asymptota funkce f.

Věta 2.30.

1. *Jestliže je přímka $y = ax + b$ asymptotou funkce f, potom*

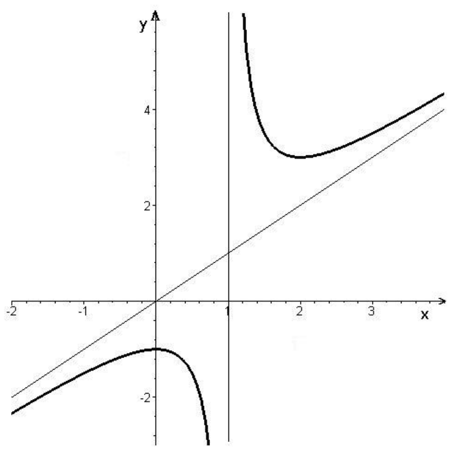
$$a = \lim \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim[f(x) - ax], \qquad \textit{kde } \lim \textit{ je buď } \lim_{x\to\infty} \textit{ nebo } \lim_{x\to-\infty}.$$

2. *Naopak, jestliže existují vlastní limity z 1., potom přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce f.*

Příklad 2.31. Máme najít asymptoty funkce $f: f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$.

Řešení. $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(x + \frac{1}{x-1}\right) = \infty$,
$\lim\limits_{x\to 1^-} \left(x + \frac{1}{x-1}\right) = -\infty$.
Je tedy přímka $x = 1$ svislou asymptotou funkce f.

Protože
$a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x(x-1)}\right) = 1$,
$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0$,
je přímka $y = x$ jedinou asymptotou se směrnicí funkce f. $\square$



Obr. 2.9: $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$

Asymptoty lze počítat a znázornit pomocí tohoto Mapletu.

Pro zájemce

Důkaz věty o jednostranných limitách:

a) Jestliže existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, existují (podle věty 2.9 o relativní limitě) i obě jednostranné limity, protože

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f/_{(a,\infty)}(x) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f/_{(-\infty,a)}(x).$$

b) Jestliže existují jednostranné limity a rovnají se b, potom ke každému okolí $\mathcal{U}(b)$ existují okolí $\mathcal{U}_1(a)$, $\mathcal{U}_2(a)$ taková, že pro $x \in \mathcal{U}_1(a) \cap D_f \cap (-\infty, a)$ je $f(x) \in \mathcal{U}(b)$ a pro $x \in \mathcal{U}_2(a) \cap D_f \cap (a, \infty)$ je také $f(x) \in \mathcal{U}(b)$. Označíme-li $\mathcal{U}(a) = \mathcal{U}_1(a) \cap \mathcal{U}_2(a)$, potom pro $x \in \mathcal{U}^*(a) \cap D_f$ je $f(x) \in \mathcal{U}(b)$.

Důkaz věty o aritmetických operacích: Naznačíme důkaz pro limitu součtu.

Máme ukázat, že $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = b + c$. Zvolme tedy libovolně $\varepsilon > 0$; máme najít $\delta > 0$ tak, aby pro každé $x \in \mathcal{U}^*(a) \cap \cap D_{f+g}$ platilo $|f(x) + g(x) - (b + c)| < \varepsilon$.

Položme $\epsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. Protože platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, existují δ_1, δ_2 tak, že

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon_1 \quad \text{a} \quad \forall x : 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - c| < \varepsilon_1.$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Potom

$$\forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |(f + g)(x) - (b + c)| = |(f(x) - b) + (g(x) - c)| \le |f(x) - b| + |g(x) - c| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon$$

a to jsme měli dokázat.

Důkaz věty o limitě složené funkce: Ke každému $\mathcal{U}(d)$ existuje $\mathcal{U}(c)$ a ke každému $\mathcal{U}(c)$ existuje $\mathcal{U}(a)$ tak, že $x \neq = a$, $x \in \mathcal{U}(a) \Rightarrow g(x) \in \mathcal{U}(c)$ a podle 3. $g(x) \neq c \Rightarrow h(g(x)) = f(x) \in \mathcal{U}(d)$.

Shrnutí

V této kapitole jsme se věnovali základnímu prostředku, s nímž pracuje matematická analýza – pojmu limity. Definovali jsme

- limitu funkce f v bodě a: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, jestliže k libovolnému okolí $\mathcal{U}(b)$ limity b existuje okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a tak, že funkce f zobrazí množinu $\mathcal{U}^*(a) \cap D_f$ do předem zvoleného $\mathcal{U}(b)$, přitom jsme připustili i možnosti $a = \pm\infty$ resp. $b = \pm\infty$,
- limitu zleva resp. zprava: podmínku v definici limity klademe pouze na body $x < a$ resp. $x > a$; tedy např. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$, jestliže k libovolnému okolí $\mathcal{U}(b)$ limity b existuje okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a tak, že funkce f zobrazí množinu $\mathcal{U}^*(a) \cap \cap D_f \cap (-\infty, a)$ do předem zvoleného $\mathcal{U}(b)$,
- speciálně limitu posloupnosti (a_n): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, jestliže k libovolnému okolí $\mathcal{U}(b)$ limity b existuje číslo K tak, že pro všechny indexy n, pro které platí $n > K$, je $a_n \in \mathcal{U}(b)$.

Dále jsme odvodili pravidla pro počítání limit:

- jsou-li f, g funkce a obě limity $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existují a jsou konečné, platí

   1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$,
   2. $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k \lim\limits_{x\to a} f(x)$ pro každou konstantu $k \in \mathbb{R}$,
   3. $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)$,
   4. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, je-li $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$,
   5. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$;

- je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a $|g(x)| < K$, je $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$;

- pro nevlastní limity platí

   1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a}(-f(x)) = -\infty$,
   2. $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$,
   3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \wedge |g(x)| < K, \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \infty$,
   4. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \wedge g(x) \geq c, c > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \infty$;

- je-li $\lim\limits_{u\to b} f(u) = B$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ a navíc existuje takové okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a, že $\forall x \in \mathcal{U}^*(a)$ je $g(x) \neq b$, potom pro limitu složené funkce $f \circ g$ platí $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = B$.

Závěrem jsme zavedli pojem asymptoty grafu funkce:

- asymptota bez směrnice (svislá): přímka $x = a$ je svislá asymptota funkce f, je-li $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, nebo $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ nevlastní,

- asymptota se směrnicí: přímka $y = ax + b$ je asymptota funkce f, je-li $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, nebo $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$;

- pro a, b platí: $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ a $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - a\,x)$.

Otázky a úkoly

1. Které z následujících tvrzení je ekvivalentní s $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$?
   a) pro libovolné okolí $\mathcal{U}(b)$ bodu b a libovolné okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a zobrazí funkce f množinu $\mathcal{U}^*(a) \cap D_f$ do $\mathcal{U}(b)$,
   b) existuje okolí $\mathcal{U}(b)$ bodu b a okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a tak, že funkce f zobrazí množinu $\mathcal{U}^*(a) \cap D_f$ do $\mathcal{U}(b)$,
   c) pro libovolné okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a existuje okolí $\mathcal{U}(b)$ bodu b tak, že funkce f zobrazí množinu $\mathcal{U}^*(a) \cap D_f$ do $\mathcal{U}(b)$,
   d) pro libovolné okolí $\mathcal{U}(b)$ bodu b existuje okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a tak, že funkce f zobrazí množinu $\mathcal{U}^*(a) \cap D_f$ do $\mathcal{U}(b)$,
   e) existuje okolí $\mathcal{U}(b)$ bodu b tak, že pro libovolné okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a zobrazí funkce f množinu $\mathcal{U}^*(a) \cap D_f$ do $\mathcal{U}(b)$,
   f) existuje okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a tak, že pro libovolné okolí $\mathcal{U}(b)$ bodu b zobrazí funkce f množinu $\mathcal{U}^*(a) \cap D_f$ do $\mathcal{U}(b)$.

   V případě záporné odpovědi uveďte vždy protipříklad.

2. Může existovat $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, jestliže f není definována pro $x = 2$?

3. Je-li $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$, co můžeme říci o $f(2)$?

4. Může být $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} f(x)$?

5. Může se stát, že f nenabývá nikdy hodnoty 6 a přesto $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6$?

6. Může se stát, aby se funkce rovnala dvojnásobku jiné funkce a přesto s ní měla stejnou limitu v nějakém bodě?

7. Ukažte, že číslo b není limitou posloupnosti (a_n), jestliže
   a) $a_n = \frac{1}{n}$, $b = 10^{-7}$; b) $a_n = 13^n$, $b = 10^{-100}$; c) $a_n = \sqrt[n]{n}$, $b = 1 + 10^{-6}$.

8. a) Načrtněte graf funkce f pro kterou platí $f(x) = |x| - x$.
   b) Pro která a existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$?

9. Funkce f je definovaná předpisem $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{pro} \quad x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$
   a) Načrtněte graf funkce f.
   b) Existuje $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$?
   c) Existuje $\lim\limits_{x\to 3,5} f(x)$?
   d) Pro která a existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$?

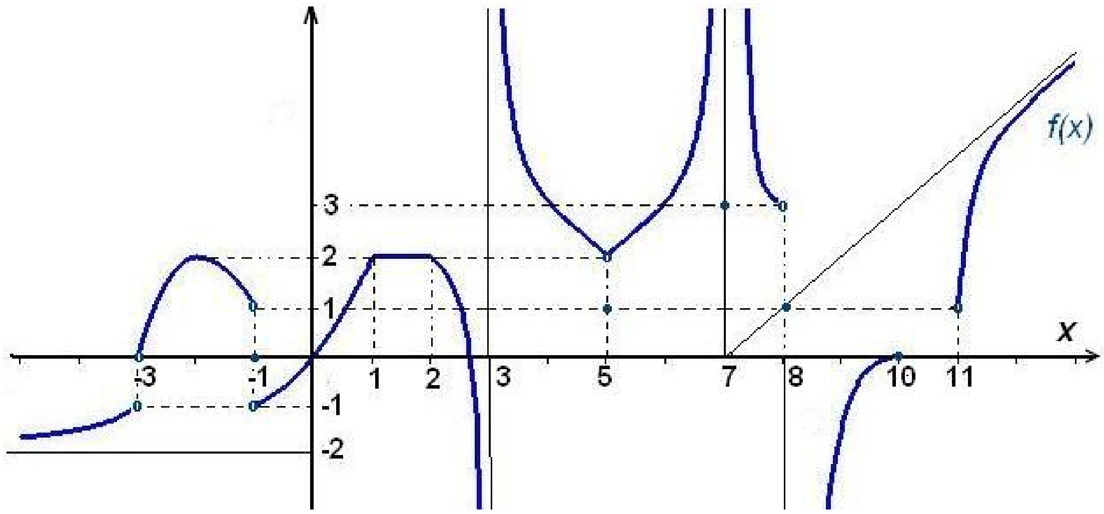
10. Funkce f je definovaná předpisem $f(x) = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{pro} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

    a) Naznačte, jak vypadá graf funkce f.
    b) Existuje $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?
    c) Existuje $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} f(x)$?
    d) Pro která a existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$?

11. Funkce f je definovaná předpisem $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{pro} \quad x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & \text{pro} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

    a) Naznačte, jak vypadá graf funkce f,
    b) Existuje $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?
    c) Existuje $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?
    d) Existuje $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?
    e) Pro která a existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$?

12. Nechť funkce f je zadaná grafem v obr. 2.10. Zjistěte, čemu se rovnají limity a funkční hodnoty funkce f ve význačných bodech definičního oboru $-\infty$, -3, $-$ -1, 1, 2, 3,
5, 7, 8, 10, 11, ∞. (Prověřte si geometrickou představu o limitě.)



Obr. 2.10: Geometrická představa o limitě

13. Nechť $f(x) = x^x$ pro $x > 0$.

    a) Pomocí kalkulačky doplňte tabulku

x	1,0	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,01
x^x							

b) Jaká je asi nejmenší hodnota funkce f na intervalu $(0,1)$?

c) Myslíte, že $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ existuje? Jestliže ano, čemu je asi rovna?

14. Může mít polynom a) svislou asymptotu, b) asymptotu se směrnicí? Jestliže ano, uveďte příklad, jestliže ne, odůvodněte.

15. Uveďte příklad funkce, která má následující asymptoty:

a) $x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3,$

b) $x = -1, \quad x = 1, \quad y = 0,$

c) $x = -1, \quad x = 1, \quad y = -2, \quad y = 2.$

Cvičení

1. Vypočítejte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2+7x-44}{x^2-6x+8}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x^4-1}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+3x)^4-(1+4x)^3}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{5x}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x-1}{2x^2-x+1}\right)^3$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(4x-1)^{100}(3x+1)^{200}}{(6x+5)^{300}}$

2. Vypočítejte

a) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x-2} - \sqrt{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{1-x^3} + x\right)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[6]{x^8}}{\sqrt[3]{x^4+2}}$

3. Vypočítejte

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 6x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^3}$

4. Vypočítejte limity zprava a zleva daných funkcí f v bodě a, jestliže

a) $f(x) = x\,e^{-1/x}, \quad a = 0$ b) $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}, \quad a = 0$

c) $f(x) = \frac{2^{1/x}+3}{3^{1/x}+2}, \quad a = 0$ d) $f(x) = \frac{x(x+2)}{|x+2|}, \quad a = -2$

e) $f(x) = \frac{x}{|\operatorname{tg} x|}, \quad a = 0$ f) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x}, \quad a = -1$

5. Vypočítejte limity posloupností

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+5}\right)^{n+6}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{\frac{3n}{2}}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}))$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{1+a^n}, \quad a > 0$

6. Najděte asymptoty následujících funkcí:

$$
\begin{array}{llll}
a) & f(x) = 3x + \frac{3}{x-2}, & b) & f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}, \\
c) & f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-4}, & d) & f(x) = x + \frac{2x}{x^2-1}, \\
e) & f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 4x^2}, & f) & f(x) = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2x^2-1}, \\
g) & f(x) = 2x - \frac{2\cos x}{x}, & h) & f(x) = \frac{x \sin x}{1+x^2}, \\
i) & f(x) = x\, e^{1/x^2}, & j) & f(x) = x\, \ln(e + \frac{1}{x}), \\
k) & f(x) = x \operatorname{arctg} x, & l) & f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.
\end{array}
$$

Výsledky

1. a) $\frac{15}{2}$, b) $\frac{1}{2}$, c) 6, d) ∞, e) $\frac{1}{8}$, f) 6^{-100};
2. a) $\frac{1}{4}$, b) 0, c) 0, d) 1;
3. a) $\frac{5}{6}$, b) 1, c) 1, d) ∞;
4. a) $0; -\infty$, b) $0; 1$, c) $0; \frac{3}{2}$, d) $-2; 2$, e) $1; -1$, f) $\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}$;
5. a) e, b) e^3, c) 1, d) 0, e) $\frac{1}{2}$, f) 1 pro $a > 1$, $\frac{1}{2}$ pro $a = 1$, 0 pro $a < 1$.
6. a) $x = 2$, $y = 3x$, b) $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, c) $x = -2$, $x = 2$, $y = x$, d) $x = -1$, $x = 1$, $y = x$, e) $y = x + \frac{4}{3}$, f) $x = 1/\sqrt{2}$, $x = -1/\sqrt{2}$, $y = \frac{1}{2}$, g) $x = 0$, $y = 2x$, h) $y = 0$, i) $x = 0$, $y = x$, j) $x = -\frac{1}{e}$, $y = x + \frac{1}{e}$, k) $y = \pm\frac{\pi}{2}x - 1$, l) $y = 0$;

2.3 Spojitost

Pomocí limity se zavádí pojem spojitosti funkce (zobrazení):

Definice 2.32. Funkce f se nazývá ***spojitá v bodě*** a, platí-li $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$; to znamená, že

$$\boxed{\text{a)}\quad a \in D_f,\ \text{tj. } f(a) \text{ je definováno,}\quad \text{b)}\quad \lim_{x\to a} f(x) \text{ existuje,}\quad \text{c)}\quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a).}$$

Tuto definici můžeme zapsat ve tvaru

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Analogicky můžeme definovat spojitost zleva a zprava:

Definice 2.33. Funkce f se nazývá ***spojitá zprava*** (resp. ***zleva***) ***v bodě*** a, jestliže

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a), \quad \left(\text{resp. } \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)\right).$$

Pro snazší zápis budeme používat označení: $f(a^+) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $f(a^-) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

Intuitivní představa o spojitosti je taková, že graf spojité funkce „se dá nakreslit nepřerušovanou čarou“; naše definice ale hovoří o spojitosti v bodě. V následujícím příkladu si ukážeme, že může existovat funkce spojitá pouze v jednom bodě, i když její graf přesně nakreslit nelze:

Příklad 2.34. Nechť funkce f je definovaná předpisem $f(x) = x\cdot\chi(x) = \begin{cases} x & x \in (Q) \\ 0 & x \notin (Q) \end{cases}$
V kapitole o limitě jsme v příkladu 2.23 ukázali, že platí $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\chi(x) = 0$, a protože $f(x) = 0$, je funkce f pro $x = 0$ spojitá.

Klasifikace nespojitostí

Definice 2.35.

- Existují-li pro funkci f v (konečném) bodě a (konečná) čísla $f(a^-)$, $f(a^+)$ a má-li funkce v a přesto bod nespojitosti, říkáme, že tato funkce má v bodě a bod nespojitosti ***prvního druhu***.

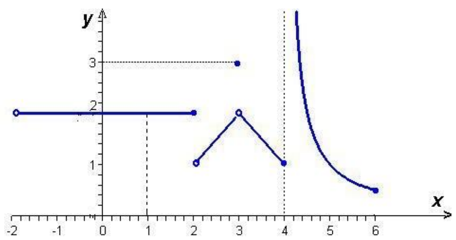
  Číslo $\delta = \delta(a) = f(a^+) - f(a^-)$ se nazývá ***skok nespojitosti.***

  Je-li $\delta(a) = 0$, říkáme, že funkce f má v tomto bodě ***odstranitelnou nespojitost***.

  Je-li $\delta(a) \neq 0$, nazývá se bod $x = a$ ***bodem skokové nespojitosti.***

- Je-li funkce f definována v okolí bodu a (popřípadě s výjimkou bodu a samotného) a má-li v bodě a bod nespojitosti, který není bodem nespojitosti prvního druhu, říkáme, že funkce má v a ***bod nespojitosti druhého druhu***.
  Jinak řečeno: Funkce f má v bodě a nespojitost druhého druhu, jestliže v bodě a některá jednostranná limita neexistuje nebo je nevlastní.

Příklad 2.36. V obr.2.11 je graf jisté funkce f definované na intervalu $(-2, 6\rangle$. Vyšetřeme její spojitost v bodech -2, 1, 2, 3, 4, 6.



Obr. 2.11: Funkce f z příkladu 2.36

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{pro} \quad x \in (-2, 2\rangle \\ x - 1 & \phantom{\text{pro}} \quad x \in (2, 3) \\ 3 & \phantom{\text{pro}} \quad x = 3 \\ 5 - x & \phantom{\text{pro}} \quad x \in (3, 4\rangle \\ \frac{1}{x-4} & \phantom{\text{pro}} \quad x \in (4, 6\rangle \end{cases}$$

Řešení.

a) $x = -2$: Bod -2 nepatří do definičního oboru funkce f; nemůžeme mluvit ani o spojitosti ani o nespojitosti funkce v tomto bodě.

b) $x = 1$: V bodě 1 je zřejmě funkce f spojitá.

c) $x = 2$: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2 \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$, funkce zde má skokovou nespojitost se skokem $\delta = 1 - 2 = -1$.

d) $x = 3$: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2 \neq f(3) = 3$, funkce zde má odstranitelnou nespojitost.

e) $x = 4$: $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 1 = f(4)$, $\lim\limits_{x\to 4^+} = \infty$, funkce zde má nespojitost druhého druhu, přičemž je zde spojitá zleva.

f) $x = 6$: $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = \frac{1}{2} = f(6)$, $x = 6$ je pravý koncový bod definičního intervalu – funkce je zde spojitá (zleva).

□

Příklad 2.37.

a) Funkce $y = \sin\frac{1}{x}$ má v bodě $x = 0$ nespojitost druhého druhu, protože $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje (ani jednostranné limity), tedy nejsou rovny žádnému konečnému číslu.

b) Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ má v bodě $x = 0$ odstranitelnou nespojitost.

Pro spojité funkce platí následující věty:

Věta 2.38.

- *Funkce f je spojitá v bodě a, právě když je zde spojitá zprava i zleva.*
- *Je-li funkce f spojitá v bodě a, pak existuje okolí $\mathcal{U}(a)$, v němž je f ohraničená.*
- *Jsou-li funkce f a g spojité v bodě a, pak jejich součet (nebo rozdíl) $f \pm g$, součin $f \cdot g$ a podíl $\frac{f}{g}$ (v případě, že $g(a) \neq 0$) jsou také spojité v bodě a.*
- *Je-li funkce g spojitá v bodě a a funkce f v bodě $b = g(a)$, pak složená funkce $F = f \circ g$, $F(x) = f[g(x)]$, je spojitá v bodě a.*

První tři tvrzení vyplývají přímo z analogických tvrzení pro limity; poslední plyne z věty o limitě složené funkce pouze v případě, že vnitřní složka není na nějakém okolí bodu a konstantní; pro tento vyjímečný případ se důkaz musí provést jinak - provádět ho nebudeme.

V předchozí kapitole (o limitě) jsme ukázali, že limity známých funkcí, jako je polynom, racionální lomená funkce, obecné mocniny, exponenciální a goniometrické funkce se počítají dosazením - odtud vyplývá:

a) Polynom
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
(kde $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots, n$) je spojitá funkce pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, jak jsme ukázali v příkladu 2.18.

b) Racionální lomená funkce
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$
(kde $a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots, n,\ b_j \in \mathbb{R}, j = 0, \ldots, m$) je spojitá pro všechny hodnoty $x \in \mathbb{R}$, pro něž $Q(x) \neq 0$.

c) Tzv. základní elementární funkce, k nimž patří $\sin x, \cos x, a^x$, kde $a > 0$, jsou spojité na $\mathbb{R}$.

d) Ostatní elementární funkce, které nemusí být všude definovány a tedy ani spojité na $\mathbb{R}$, mají tu vlastnost, že jsou spojité v každém bodě svého přirozeného definičního oboru.

Funkce spojité na intervalu

Definice 2.39.

- Řekneme, že funkce f je ***spojitá na intervalu*** (a, b), jestliže je spojitá v každém jeho bodě $c \in (a, b)$.

- Řekneme, že funkce f je ***spojitá na uzavřeném intervalu*** $\langle a, b\rangle$, jestliže je spojitá na otevřeném intervalu (a, b) a navíc je v bodě a spojitá zprava a v bodě b zleva. Zkráceně zapisujeme skutečnost, že funkce f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ takto: $f \in C_{\langle a,b\rangle}$.

Jako cvičení napište analogické definice spojitosti funkce na intervalech $(a, b\rangle$ a $\langle a, b)$.

Názorně – funkce je na intervalu spojitá, jestliže na tomto intervalu můžeme její graf nakreslit nepřerušovanou čarou.

Věta 2.40. Vlastnosti funkcí spojitých na uzavřeném intervalu

- *Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, je na něm ohraničená.*

- **Věta Weierstrassova**
  Funkce $f \in C_{\langle a,b\rangle}$ nabývá v nějakých bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ svého maxima a minima, tj. existují body α a β patřící do $\langle a, b\rangle$ takové, že
$$\min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = f(\alpha), \quad \max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = f(\beta).$$
  Tedy $f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta)$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$.

- **Věta mezihodnotová**
  Funkce $f \in C_{\langle a,b\rangle}$ nabývá na tomto intervalu všech hodnot mezi svým maximem a minimem na tomto intervalu; tedy spojitým obrazem intervalu je interval.

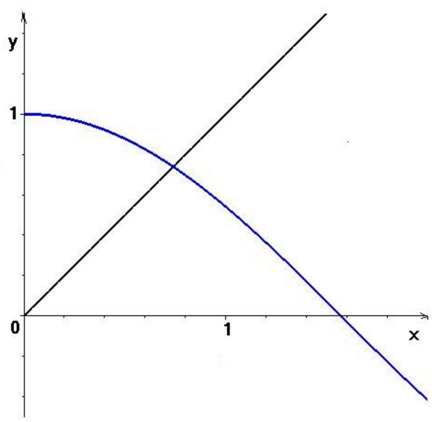
Poznámka: Např. funkce $y = x$ je spojitá na otevřeném intervalu $(0,1)$ a je na něm omezená; avšak na tomto intervalu nedosahuje svého supréma $\sup\limits_{x\in(0,1)} x = 1$, tj. neexistuje $x_0 \in (0,1)$ takové, že by funkční hodnota v tomto bodě byla rovna 1; funkce je rovna 1 pro $x = 1$. Vidíme, že požadavek spojitosti funkce na *uzavřeném* intervalu $\langle a,b\rangle$ (zahrnujícím oba krajní body a a b) je zásadní.

Zřejmě $\sup \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$. Neexistuje však bod x, v němž by funkce $\operatorname{arctg} x$ nabývala hodnoty $\frac{\pi}{2}$; tedy pro $x \geq 0$ nedosahuje svého maxima. Podmínky výše uvedené věty jsou i v tomto případě porušeny, protože definiční obor spojité funkce $\operatorname{arctg} x$ není omezený.

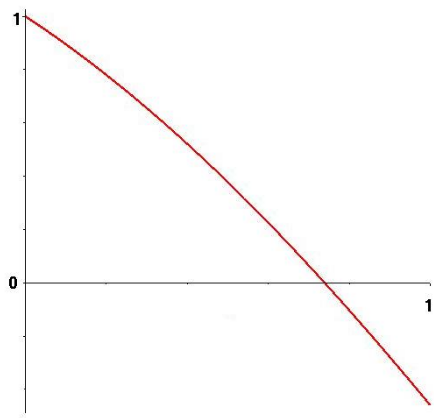
Důsledky:

- Je-li $f \in C_{\langle a,b\rangle}$ a $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak v otevřeném intervalu (a,b) existuje alespoň jeden bod c, pro nějž $f(c) = 0$.
- Každá polynomiální rovnice $P_n(x) = 0$ lichého stupně má nejméně jedno řešení.

Příklad 2.41. Rovnice $\cos x = x$ má kořen ležící na intervalu $(0,\pi)$, protože $f(0) > 0$, $f(\pi) < 0$ kde $f(x) = \cos x - x$ a $f(x)$ je spojitá funkce. (Viz obr. 2.12 a 2.13)



Obr. 2.12: $f(x) = \cos x,\ f(x) = x$



Obr. 2.13: $f(x) = \cos x - x$

Shrnutí

V této kapitole jsme vyšetřovali pojem spojitosti. Řekneme, že funkce f je

- spojitá v bodě a: je-li $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$,
- spojitá zleva (zprava) v bodě a: jsou-li příslušné jednostranné limity rovny funkční hodnotě v bodě a,
- spojitá na intervalu: je-li spojitá v každém bodě intervalu; jedná-li se o uzavřený nebo polouzavřený interval, v koncovém bodě je spojitá zleva nebo zprava („zevnitř“ intervalu).

Není-li funkce f v bodě a spojitá, má zde

- nespojitost 1. druhu: existuje-li $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a^+)$ i $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a^-)$ a jsou vlastní; přitom v případě, že se tyto jednostranné limity sobě rovnají, hovoříme o odstranitelné nespojitosti; rozdíl $f(a^+) - f(a^-)$ se nazývá skok funkce f v bodě a,
- nespojitost 2. druhu: jestliže alespoň jedna jednostranná limita funkce f v bodě a neexistuje nebo je nevlastní.

Vlastnosti spojitých funkcí:

- Funkce vzniklé pomocí aritmetických operací ze spojitých funkcí a
- složené funkce vzniklé kompozicí spojitých funkcí

jsou spojité ve všech bodech, ve kterých jsou definované. Odtud plyne, že elementární funkce jsou spojité všude, kde jsou definované.

Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, potom

- je zde ohraničená,
- nabývá zde svého maxima a minima,
- nabývá všech hodnot mezi svým maximem a minimem.

Otázky a úkoly

1. Kdy řekneme, že je funkce f spojitá v bodě a? Kdy je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$?
2. Uvedli jsme celou řadu funkcí definovaných na $\mathbb{R}$, které byly nespojité pouze v jed-

nom bodě (např. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ v 0). Může se stát, aby funkce definovaná na $\mathbb{R}$ byla spojitá pouze v jednom bodě? Uveďte příklad takové funkce.

3. Vyšetřete spojitost funkce z obr. 2.10, klasifikujte nespojitosti.

4. Nechť funkce f je v bodě a spojitá a funkce g nespojitá. Zjistěte, zda jsou v bodě a spojité funkce

   a) $f+g$ b) fg c) $f \circ g$ d) $g \circ f$.
   Uveďte příklady.

5. Nechť funkce f i g jsou v bodě a nespojité. Zjistěte, zda mohou být v bodě a spojité funkce

   a) $f+g$ b) fg c) $f \circ g$ d) $g \circ f$.
   Uveďte příklady.

6. Jsou dány funkce f a g předpisy

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \le 1 \\ 2-x & 1 < x < 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 2-x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

   Zjistěte, kde jsou spojité složené funkce $f \circ g$ a $g \circ f$.

7. Nechť f je funkce spojitá na $D_f = \mathbb{R}$. Existuje nutně číslo x tak, že $f(x) = x$?

8. Nechť f je spojitá funkce s $D_f = \langle 0, 1 \rangle$, pro kterou platí $f(0) = 1$ a $f(1) = 0$. Existuje nutně číslo x tak, že $f(x) = x$?

Cvičení

1. Zjistěte, kde jsou spojité následující funkce; body nespojitosti klasifikujte:

   a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-|x|} & x < 0 \\ x & x \ge 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

   c) $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$ d) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

   e) $f(x) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ 2 - x^2 & x \ge 0 \end{cases}$ f) $f(x) = \dfrac{1 - 2e^{x^2}}{1 - e^{x^2}}$

2. Najděte číslo a tak, aby funkce f byla spojitá:

   a) $f(x) = \begin{cases} a\,x & x < 1 \\ 2 - x/a & x \ge 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & x < 0 \\ a - x & x \ge 0 \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \ne 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$

3. Ukažte, že daná rovnice má na intervalu J řešení:

   a) $x^3 - x - 1 = 0, \qquad J = \langle 1, 2\rangle$

   b) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x - 3 = 0, \qquad J = \langle -1{,}1;\ -1\rangle$

   c) $\ln x - 3 + x = 0, \qquad J = \langle 1, e\rangle$

Výsledky

1. a) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, v 0 skok $\frac{1}{2}$, b) $\mathbb{R}$, c) $\mathbb{R}\setminus\{k\pi\}$, skok ± 2, d) $(0,1)\cup(1,\infty)$, v 1 nespojitost 2. druhu, e) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, v 0 skok -1, f) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, v 0 nespojitost 2. druhu;
2. a),b),c) $a = 1$.

2.4 Derivace

Motivace

a) Směrnice tečny:
Nechť $\Gamma = \{(x,y) \mid y = f(x)\}$ je graf spojité funkce $y = f(x)$. Zvolme na Γ bod $A = [x_0,\ f(x_0)]$ a jiný bod $X = [x,\ f(x)]$. Sečna S procházející body A a X svírá s kladnou poloosou x úhel β. Pro tangens úhlu β platí

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad .$$

Nechť $x \to x_0$; pak pro spojitou funkci f se hodnota Δy také bude blížit nule a bod X se bude pohybovat podél Γ a bude se přibližovat k bodu A. Jestliže v tomto limitním procesu pro poměr $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ platí

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow k \quad (x \longrightarrow x_0),$$

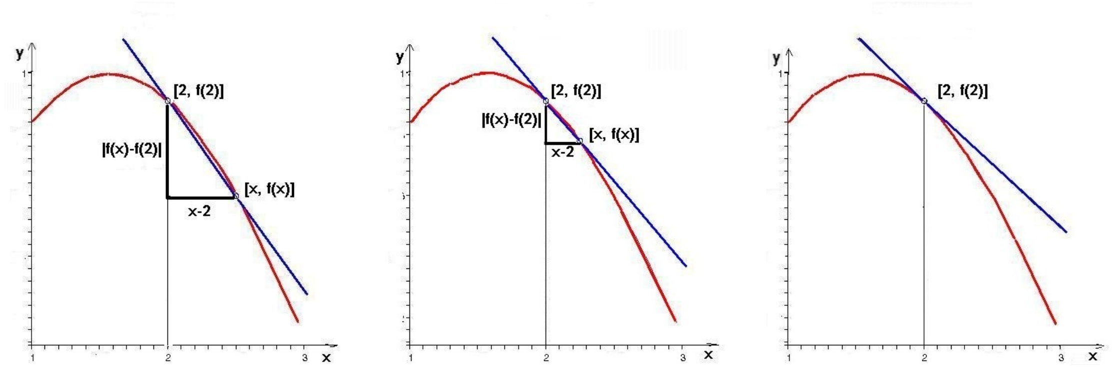
pak úhel β se bude také blížit k jistému úhlu α, $\mathrm{tg}\alpha = k$. Spolu se změnou β bude sečna S rotovat kolem A a bude se v limitě přibližovat k přímce t procházející bodem A a svírající úhel α s kladnou poloosou x. To znamená, že t je tečnou ke grafu Γ v bodě A a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}\,\alpha = k.$$

Jestliže se tedy poměr $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ blíží konečné limitě pro $x \to x_0$, křivka Γ má v bodě A tečnu, jejíž směrnice je rovna této limitě, a má tedy rovnici:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad \text{kde} \quad k = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad .$$

b) Okamžitá rychlost:
Nechť se bod pohybuje po přímce a nechť funkce $s = f(t)$ vyjadřuje závislost jeho vzdálenosti s od počátečního bodu O (bráno s odpovídajícím znaménkem) v čase



Obr. 2.14: Geometrický význam derivace

t. V okamžiku t je bod ve vzdálenosti $s = f(t)$ od O. V jiném časovém okamžiku $t + \Delta t$ je ve vzdálenosti $s + \Delta s = f(t + \Delta t)$ od O. Jeho průměrná rychlost během časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ je vyjádřena jako

$$v_{pr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \,.$$

Okamžitá („skutečná“) rychlost v bodu v okamžiku t může přirozeně být definována jako limita, k níž se v_{pr} blíží, když $\Delta t \to 0$, tj.

$$v(t) = v_{ok}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Derivace v bodě

Definice 2.42. Nechť pro funkci f definovanou na nějakém okolí $\mathcal{U}(x_0)$ existuje vlastní limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \,.$$

Potom tuto limitu nazýváme ***derivací*** funkce f v bodě x_0.
Označíme-li $h = x - x_0$, můžeme psát také

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \,.$$

Je-li funkce f definovaná na $\mathcal{U}(x_0) \cap \langle x_0, \infty)$ resp. na $\mathcal{U}(x_0) \cap (-\infty, x_0\rangle$ a existují-li jednostranné limity

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{resp.} \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

potom $f'_+(x_0)$ nazýváme ***derivací zprava*** a $f'_-(x_0)$ ***derivací zleva*** funkce f v bodě x_0.

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, řekneme, že je zde ***diferencovatelná***.

Věta 2.43. *Je-li funkce f v bodě x_0 diferencovatelná, je v tomto bodě spojitá.*

Důkaz naleznete v části Pro zájemce na konci kapitoly.

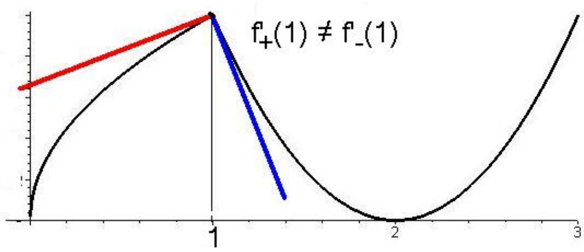
Z věty o jednostranných limitách 2.12 plyne

Věta 2.44. *Funkce f je v bodě x_0 diferencovatelná, právě když existují jednostranné derivace $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ a jsou si rovny. Potom platí*

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0).$$

Definice 2.45.

1. Přímka o rovnici $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ je ***tečna*** ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$.
2. Je-li $f'(x_0) \neq 0$, je přímka o rovnici $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ ***normála*** ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$.
3. Polopřímky $y - f(x_0) = f'_+(x_0)(x - x_0), \quad$ pro $x > x_0$
   resp. $y - f(x_0) = f'_-(x_0)(x - x_0), \quad$ pro $x < x_0$
   se nazývají ***pravá*** resp. ***levá polotečna*** ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$.



Obr. 2.15: Polotečny ke grafu funkce

Jestliže v nějakém bodě grafu funkce neexistuje derivace, ale existuje některá jednostranná derivace, potom polopřímku procházející příslušným bodem na grafu funkce a mající směrnici rovnu této jednostranné derivaci je polotečnou (viz sousední obrázek).

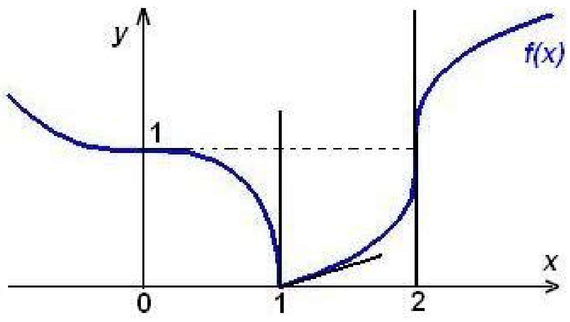
Může se stát, že v nějakém bodě x_0 pro funkci f platí $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ nebo $-\infty$, nebo je nevlastní pouze jedna z jednostranných limit tohoto podílu. I v těchto případech dostáváme jistou informaci o chování grafu funkce f v okolí bodu $[x_0, f(x_0)]$:

Definice 2.46. a) Je-li $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty \ (-\infty),$$

je přímka o rovnici $x = x_0$ ***svislá tečna*** ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

b) Je-li $$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty \ (-\infty) \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty \ (-\infty),$$

je přímka o rovnici $x = x_0$ ***pravá*** resp. ***levá svislá polotečna*** ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$.



Graf funkce f v sousedním obrázku má svislou tečnu $x = 2$ v bodě $[2, 1]$ a levou svislou polotečnu $x = 1$ v bodě $[1, 1]$.

Obr. 2.16: Svislá tečna a polotečna

Derivace na intervalu

Definice 2.47. Předpokládejme, že funkce f je definovaná na otevřeném intervalu (a, b) a má v každém bodě $x \in (a, b)$ derivaci $f'(x)$. Potom je na (a, b) definovaná funkce $f' : x \mapsto f'(x)$, kterou nazýváme ***derivací*** funkce f.

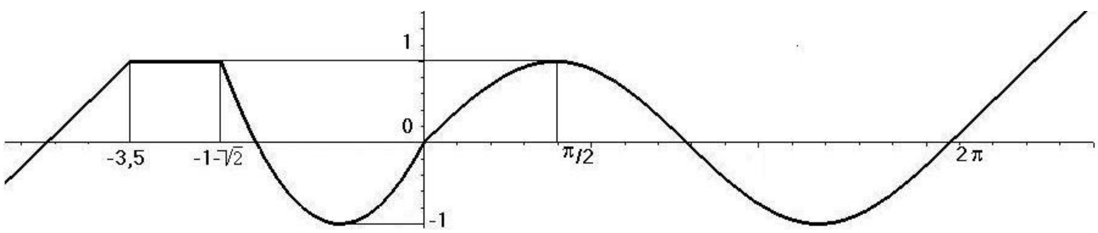
Poznámky k definici

1. Derivace funkce f se též někdy místo $f'(x)$ označuje symbolem $\frac{d\,f(x)}{dx}$ nebo $\frac{dy}{dx}$ (tzv. Leibnizův zápis derivace).

2. Funkci f, která má derivaci na intervalu (a, b) nazýváme diferencovatelnou na (a, b) .

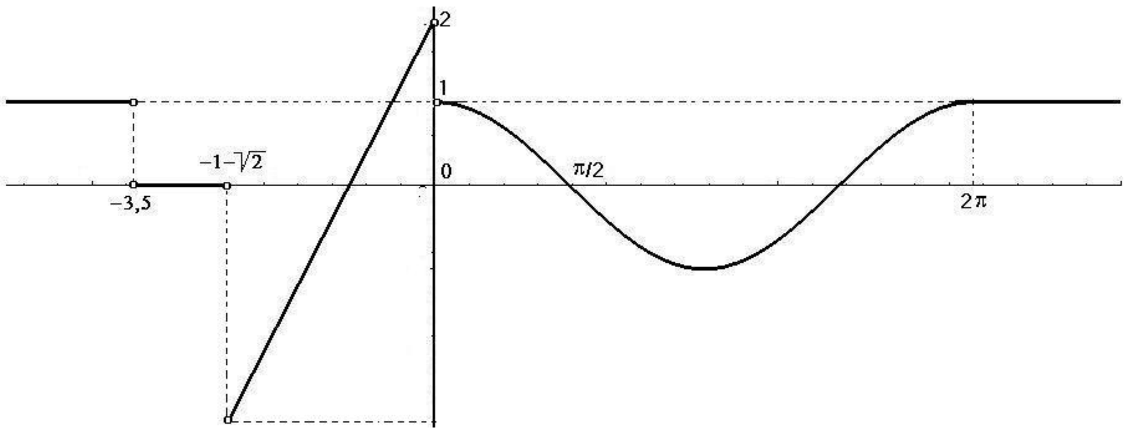
3. Definici je možno použít i pro uzavřený interval $\langle a, b\rangle$, potom však kromě existence derivace v každém bodě intervalu (a, b) požadujeme existenci derivace zprava v bodě a a existenci derivace zleva v bodě b.

Víme, že geometricky znamená derivace směrnici tečny ke grafu funkce; na obrázku 2.17 je nakreslen graf spojité funkce f zadané po částech a v obrázku 2.18 je graf její derivace f'.



Obr. 2.17: Graf funkce f

Máme-li v některé konkrétní situaci (např. ve fyzice) počítat derivaci nějaké zadané funkce, potřebujeme znát derivace základních elementárních funkcí (tedy jakýsi ***slovník***) a početní pravidla pro derivaci (tedy ***gramatiku***).



Obr. 2.18: Graf derivace f'

Toto vše odvodíme v příkladech a větách tohoto odstavce; získané poučky pak v závěru shrneme v tabulce.

Příklad 2.48. Derivace některých elementárních funkcí

$$\begin{array}{llll} a) & (c)' = 0 \quad (c = konst.) & b) & (x^n)' = nx^{n-1} \quad n \in \mathbb{N} \\ c) & (\sin x)' = \cos x & d) & (\cos x)' = -\sin x \\ e) & (e^x)' = e^x & & \end{array}$$

Řešení. a) $(c)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$

b) $(x^n)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x \cdot h^{n-1} + h^n - x^n\right] =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-1} + h^{n-1}\right] = nx^{n-1}$

c) $(\sin x)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}[\sin(x+h) - \sin x] = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}[2\cos(x + \frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}] = \lim\limits_{h\to 0} \cos(x +$
$+ \frac{h}{2}) \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} =$
$= \cos x$

d) podobně jako předchozí případ

e) $(\mathrm{e}^x)' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}[\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x] = \mathrm{e}^x \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}[\mathrm{e}^h - 1]$;
poslední limitu určíme pomocí věty o limitě složené funkce; volíme-li vnitřní složku (substituci) $u = \mathrm{e}^h - 1$, platí $h \to 0 \Rightarrow u \to 0$, a tedy
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}[\mathrm{e}^h - 1] = \lim\limits_{u\to 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \lim\limits_{u\to 0} \frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{\ln e} = 1$

□

Základní pravidla pro derivování

Věta 2.49. *Nechť funkce f, g mají derivace $f'(x), g'(x)$ v bodě x. Potom mají v tomto bodě derivaci také funkce $f \pm g$, $f \cdot g$, $c \cdot f$, kde $c =$ konst., a je-li $g(x) \neq 0$ také $\frac{f}{g}$, přičemž platí:*

a) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,

b) $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$,

c) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,

d) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{1}{g^2(x)} \left(f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)\right)$.

Důkaz najdete v části Pro zájemce na konci kapitoly.

Příklad 2.50.

a) $(\sinh x)' = \cosh x$ *b)* $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ *c)* $(x^n)' = n\, x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}$

Řešení.
$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left[(e^x)' - \left(\frac{1}{e^x}\right)'\right] = \frac{1}{2}\left[e^x - \frac{-e^x}{e^{2x}}\right] = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cosh x$

b) $(\mathrm{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x \, + \, \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

c) Pro $n \in \mathbb{N}$ je formule odvozena v 2.48, stejně jako pro $n = 0$ (derivace konstanty). Vyšetřujme tedy n celé záporné a označme $-n = m \in \mathbb{N}$. Potom $(x^n)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{-m\, x^{m-1}}{x^{2m}} = -m\, x^{-m-1} = n\, x^{n-1}$

□

Derivace inverzní funkce

Věta 2.51. *Nechť*

$f: \, y = f(x), \; x \in (a, b) \qquad\qquad g: \, x = g(y), \; y \in (\alpha, \beta)$

jsou navzájem inverzní funkce, přičemž v bodě $y_0 \in (\alpha, \beta)$, $y_0 = f(x_0)$ existuje derivace $g'(y_0) \neq 0$.

Potom v bodě $x_0 = g(y_0)$ existuje také $f'(x_0)$ a platí

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(y_0)} = \frac{1}{g'[f(x_0)]}.$$

(V Leibnizově zápisu derivací má poslední formule tvar $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$.)

Důkaz věty naleznete v části Pro zájemce na konci kapitoly.

Tato věta se při výpočtu derivací běžně neužívá; pomocí ní odvodíme další vztahy pro derivace elementárních funkcí:

Příklad 2.52.

$$a)\quad (\text{arcsin}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad b)\quad (\text{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad c)\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Řešení. a) $y = \text{arcsin}x, \quad x = \sin y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $y = \text{arctg}x, \quad x = \text{tg}y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y+\sin^2 y} = \frac{1}{1+\text{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$

c) $y = \ln x, \quad x = e^y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}, \quad x > 0$

□

Derivace složené funkce

Umět správně použít následující větu je při výpočtu derivací naprosto nezbytné - vyžaduje to pochopitelně aktivní znalost pojmu složené funkce, tj. každou složenou funkci umět rozložit na jednotlivé složky.

Věta 2.53. *Nechť funkce $g: u = g(x)$ má derivaci v bodě x_0 a funkce $f: y = f(u)$ má derivaci v bodě $u_0 = g(x_0)$. Potom složená funkce $f \circ g: y = f[g(x)]$ má derivaci v bodě x_0 a platí*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0) = f'[g(x_0)] \cdot g'(x_0).$$

(V Leibnizově zápisu derivace má formule tvar $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.)

Příklad 2.54.

$$a)\quad (a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0) \quad b)\quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad c)\quad (x^a)' = a\, x^{a-1} \quad (a \in \mathbb{R})$$

Řešení. a) $y = a^x = e^{x \ln a}$ je složená funkce s vnitřní složkou $u = x \ln a$ a vnější složkou $y = e^u$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \ln a = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

b) Pro $x > 0$ je nám vztah již znám.
Je-li $x < 0$, potom $y = \ln|x| = \ln(-x); \quad y = \ln u, \; u = -x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot (-1) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

c) $y = x^a = e^{a \ln x}, \; y = e^u, \; u = a \ln x, \; x > 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \frac{a}{x} = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a \cdot x^{a-1}$$

□

V následujícím příkladu použijeme odvozené vztahy při výpočtu derivace komplikovanějších funkcí:

Příklad 2.55. Máme vypočítat f', je-li f zadaná předpisem

a) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}}$, b) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{1+\sin x}$ c) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

Řešení. a)

$$f(x) = \left[\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right]^{\frac{1}{4}}; \qquad f'(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right]^{-\frac{3}{4}} \left[\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right]' =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}}\right]^{\frac{3}{4}} \cdot$$

$$\cdot \frac{(x-(1+x^2)^{\frac{1}{2}})'\,(x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}) - (x-(1+x^2)^{\frac{1}{2}})\,(x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}})'}{(x+\sqrt{1+x^2})^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}}\right]^{\frac{3}{4}} \cdot$$

$$\cdot \frac{(1-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,2x)\,(x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}) - (x-(1+x^2)^{\frac{1}{2}})\,(1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,2x)}{(x+\sqrt{1+x^2})^2} =$$

$= \Big|$ po úpravě (1. a 3. závorku v čitateli převedeme na společného jmenovatele, který je roven $\sqrt{1+x^2}$, a roznásobíme) dostaneme $\Big| =$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left[\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x-\sqrt{1+x^2}}\right]^{\frac{3}{4}} \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left[\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right]^{\frac{1}{4}}.$$

b)

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left[\frac{\cos x}{1+\sin x}\right]^2}\left[\frac{\cos x}{1+\sin x}\right]' =$$

$$= \frac{(1+\sin x)^2}{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}\,\frac{(\cos x)'(1+\sin x)-\cos x(\sin x)'}{(1+\sin x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2+2\sin x}\left[-\sin x(1+\sin x)-\cos^2 x\right] = -\frac{1}{2}.$$

c)

$$f(x) = (\sin x)^{\cos x} = e^{\cos x\,\ln\sin x}, \qquad f'(x) = e^{\cos x\,\ln\sin x}\,(\cos x\,\ln\sin x)' =$$

$$= (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\,\ln\sin x + \cos x\,\frac{1}{\sin x}\,\cos x\right) =$$

$$= (\sin x)^{\cos x-1}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\,\ln\sin x\right).$$

□

Pro kontrolu výsledků při výpočtech derivací funkce může posloužit tento maplet.

Příklad 2.56. Kondenzátor s kapacitou C se vybíjí přes rezistor s odporem R. Máme najít intenzitu proudu v čase t, jestliže pro náboj na deskách kondenzátoru platí

$$Q = 0{,}001\, e^{-t/5}$$

kde náboj Q je vyjádřen v coulombech a čas t v sekundách. Máme zjistit, za jak dlouho klesne intenzita proudu na polovinu své počáteční hodnoty.

Řešení. Intenzita elektrického proudu v ampérech je

$$i = \frac{dQ}{dt} = (0{,}001\, e^{-t/5})' = -0{,}000\,2\, e^{-t/5}$$

Pro $t = 0$ je

$$i_0 = -0{,}000\,2\, A = -0{,}2\, mA$$

Čas v sekundách,za který klesne intenzita proudu na polovinu, najdeme z podmínky

$$\frac{i_0}{2} = -0{,}000\,2\, e^{-t/5} \quad \text{neboli} \quad \frac{1}{2} = e^{-t/5}.$$

Tedy $t = 5 \ln 2 \doteq 3{,}47\, s$.

□

Příklad 2.57. Máme najít rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = \ln x$, jestliže tečna je rovnoběžná s přímkou $x - y + 5 = 0$.

Řešení. Nechť $A = [x_0, y_0]$ je bod, ve kterém je hledaná tečna rovnoběžná se zadanou přímkou. Z podmínky rovnoběžnosti plyne pro směrnici k_1 tečny a směrnici k_2 dané přímky vztah $k_1 = k_2\, (= 1)$, neboli

$$(\ln x)'_{x=x_0} = 1, \qquad \text{tedy} \qquad \frac{1}{x_0} = 1.$$

Odtud je $x_0 = 1$ a $y_0 = \ln x_0 = 0$.
Rovnice tečny v bodě $A = [1, 0]$ je

$$y - 0 = 1(x - 1) \qquad \text{neboli} \qquad x - y - 1 = 0$$

a rovnice normály

$$y - 0 = -\frac{1}{1}(x - 1) \qquad \text{neboli} \qquad x + y - 1 = 0.$$

□

Diferenciál funkce

Definice 2.58. Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě x_0. Potom funkci $f'(x_0) \cdot h$ proměnné $h \in \mathbb{R}$ nazýváme ***diferenciálem*** funkce f v bodě x_0 a značíme

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot h.$$

Je-li funkce f diferencovatelná na intervalu (a, b), potom $f'(x) \cdot h$ závisí na dvou proměnných $x \in (a, b)$, $h \in (-\infty, \infty)$. Tento výraz nazýváme ***diferenciálem funkce*** a označujeme $d\,f(x)$, nebo $d\,f$.

Zvolíme-li speciálně $f : f(x) = x$, potom $d\,f(x) = dx = 1.h$.
Výsledku $dx = h$ budeme nadále používat všude. Bude tedy

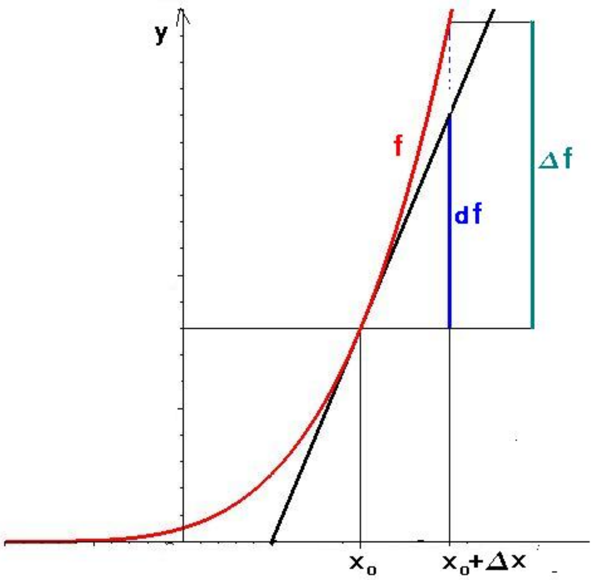
$$d\,f(x) = f'(x) \cdot dx, \quad df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx.$$

Odtud lze dělením diferenciálem dx získat již dříve uvedené Leibnizovo vyjádření derivace funkce

$$f'(x) = \frac{d\,f(x)}{dx}, \quad f'(x_0) = \frac{d\,f(x_0)}{dx}.$$

Přírůstek dx nazýváme přírůstkem argumentu.

Geometrický význam diferenciálu



Obr. 2.19: Geometrický význam diferenciálu

Rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ má tvar:

$$y - f(x_0) = \operatorname{tg}\alpha\,(x - x_0) =$$

$$= f'(x_0)(x - x_0).$$

Označíme-li tedy

$$x - x_0 = \triangle x,$$

$$f(x) - f(x_0) = \triangle f(x),$$

je geometrický význam diferenciálu

$$df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

„přírůstek po tečně“, tak jak je znázorněno na obr. 2.19.

Aproximace přírůstku funkce diferenciálem

Přírůstek funkce f v bodě x definujeme vztahem $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$.
Je-li $f'(x) \neq 0$, potom

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(x)}{d\, f(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{f'(x)\cdot h} = \frac{\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}{f'(x)} = 1.$$

Proto pro dostatečně malá h je

$$\frac{\Delta f(x)}{d\, f(x)} \approx 1, \text{ tj. } \Delta f(x) \approx d\, f(x)$$

a můžeme pro malá h přibližně nahradit přírůstek funkce jejím diferenciálem.

Příklad 2.59. S jakou chybou (v procentech) vypočteme objem krychle, jestliže se při měření strany krychle dopustíme nejvýše 1% chyby?

Řešení. Nechť x značí délku strany krychle a V její objem. Nechť dx značí možnou chybu v měření x. Relativní chyba $\frac{dx}{x}$ je v absolutní hodnotě nejvýše 0,01, tedy

$$\frac{|dx|}{x} \leq 0{,}01.$$

Diferenciál dV je odhad chyby při výpočtu objemu, tj. $\frac{dV}{V}$ je odhad relativní chyby objemu. Protože

$$dV = d(x^3) = 3x^2 dx,$$

dostaneme

$$\frac{dV}{V} = \frac{3x^2 dx}{x^3} = 3\frac{dx}{x}.$$

Tedy relativní chyba objemu je trojnásobek relativní chyby v měření strany, tj. asi 3%. □

Neurčité výrazy, L'Hospitalovo pravidlo

V tomto odstavci uvedeme pravidlo, které výrazně zjednoduší počítání limit funkcí v bodech, kde není možné přímo dosadit – tak zvaných neurčitých výrazů:

Vyšetřujeme-li limitu $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, kde $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, nemůžeme použít větu o limitě podílu; je-li navíc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, nejedná se ani o žádnou nevlastní limitu. Přesto uvedený podíl limitu může mít a to dokonce vlastní. Podobná situace vzniká, jsou-li limity funkcí f, g nevlastní, nebo vyšetřujeme-li limitu rozdílu dvou funkcí, z nichž má každá nevlastní limitu ∞ a podobně. Tyto a jim analogické případy limit nazýváme ***neurčité výrazy*** a dělíme je do několika typů (lim označuje $\lim\limits_{x\to a}$):

1. Je-li $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$, potom $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ nazýváme neurčitým výrazem typu $\frac{0}{0}$.

2. Je-li $\lim f(x) = \lim g(x) = \pm\infty$, potom $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ nazýváme neurčitým výrazem typu $\frac{\infty}{\infty}$.
3. Je-li $\lim f(x) = 0, \lim g(x) = \pm\infty$, potom $\lim f(x) \cdot g(x)$ nazýváme neurčitým výrazem typu $0 \cdot \infty$.
4. Je-li $\lim f(x) = \lim g(x) = \infty$, potom $\lim f(x) - g(x)$ nazýváme neurčitým výrazem typu $\infty - \infty$.
5. Je-li $\lim f(x) = 1, \lim g(x) = \infty$, potom $\lim (f(x))^{g(x)}$ nazýváme neurčitým výrazem typu 1^∞.
6. Je-li $\lim f(x) = \infty, \lim g(x) = 0$, potom $\lim (f(x))^{g(x)}$ nazýváme neurčitým výrazem typu ∞^0.
7. Je-li $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$, potom $\lim (f(x))^{g(x)}$ nazýváme neurčitým výrazem typu 0^0.

Uvedeme metodu na výpočet neurčitých výrazů prvních dvou typů; neurčité výrazy zbývajících typů se vždy snažíme na některý z prvních dvou převést.

Věta 2.60. **(První L'Hospitalovo pravidlo)**
Nechť funkce f,g jsou diferencovatelné na některém $\mathcal{U}^*(a)$ a platí

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0,$ *2)* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b.$ *Potom také* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$

Důkaz naleznete v části Pro zájemce na konci kapitoly.

Věta 2.61. **(Druhé L'Hospitalovo pravidlo)**
Nechť funkce f,g jsou diferencovatelné na některém $\mathcal{U}^*(a)$ a platí

1) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \lim\limits_{x\to a} |g(x)| = \infty$ *2)* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b.$ *Potom také* $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$

Příklad 2.62. Vypočteme následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x-1)}{\mathrm{tg} 4\pi x}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} (\mathrm{cotg}\, x - \frac{1}{x})$

Řešení. a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2x-1)}{\mathrm{tg}\, 4\pi x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2}{2x-1}}{\frac{4\pi}{\cos^2 4\pi x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\cos^2 4\pi x}{2\pi(2x-1)} = \frac{1}{2\pi}.$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

c)
$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left(\infty^0\right) = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^b,$$
kde $b = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, jak jsme vypočítali v předchozím příkladu. Tedy
$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

d)
$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x - \frac{1}{x}\right) = (\pm\infty - (\pm\infty)) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = 0.$$

□

Na poslední neurčitý výraz jsme L'Hospitalovo pravidlo již nepoužili – výhodnější bylo dělit čitatele i jmenovatele x.

Závěrem kapitoly o derivaci uvedeme tři důležité věty o funkcích diferencovatelných na intervalu, které mají značný teoretický, ale i praktický význam:

Věty o přírůstku funkce

Věta 2.63. **(Fermatova)** *Jestliže*

a) *f je spojitá na $\langle a, b\rangle$,*

b) *v bodě $\xi \in (a, b)$ nabývá své největší (nebo nejmenší) hodnoty,*

c) *existuje $f'(\xi)$,*

pak $f'(\xi) = 0$.

Důkaz věty naleznete v části Pro zájemce na konci kapitoly.

Věta 2.64. **(Rolleova)** *Jestliže*

a) *f je spojitá na $\langle a, b\rangle$,*

b) *f je diferencovatelná na (a, b),*

c) *platí $f(a) = f(b)$,*

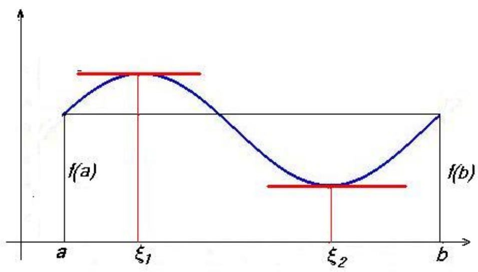
pak existuje bod $\xi \in (a, b)$ tak, že $f'(\xi) = 0$.

Věta 2.65. **(Lagrangeova o přírůstku funkce)** *Jestliže*

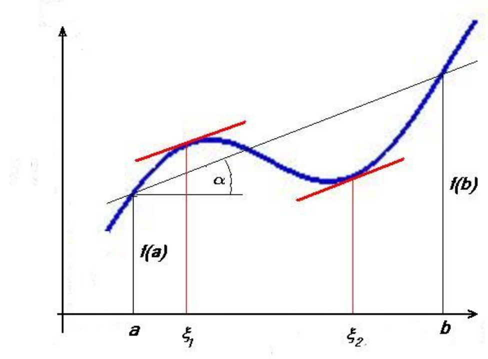
a) *f je spojitá na $\langle a, b\rangle$,*

b) *f je diferencovatelná na (a, b),* *pak existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \ .$$



Obr. 2.20: Rolleova věta



Obr. 2.21: Lagrangeova věta

Uvedené věty, které se souhrnně nazývají větami o přírůstku funkce, jsou velmi důležité z teoretického hlediska – pomocí nich se dokazují prakticky všechna důležitá tvrzení o diferencovatelných funkcích - viz např. Důsledky za následujícími obrázky. Důkazy neuvádíme; platnost tvrzení v nich obsažených názorně ukazují obrázky 2.20 a 2.21.

Důsledky: Nechť $\mathcal{J}$ značí interval, ať již otevřený, uzavřený, či polouzavřený, a $\mathcal{J}_0$ jeho vnitřek, tj. otevřený interval, který obsahuje právě vnitřní body intervalu $\mathcal{J}$.

1. *Funkce f je konstantní na $\mathcal{J}_0$, právě když $f'(x) = 0$ na $\mathcal{J}_0$.*

2. *Nechť funkce f je diferencovatelná na $\mathcal{J}$. Potom f je neklesající (resp. nerostoucí) na $\mathcal{J}$, právě když*
$$f'(x) \geq 0 \ \ (resp. \ \ f'(x) \leq 0) \quad na \quad \mathcal{J}_0.$$

3. *Nechť funkce f je diferencovatelná na $\mathcal{J}$.*
Potom f je rostoucí (resp. klesající) na $\mathcal{J}$, právě když je $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) na $\mathcal{J}_0$, přičemž rovnost $f' = 0$ nenastane na žádném podintervalu intervalu $\mathcal{J}_0$.

Příklad 2.66. Funkce $f(x) = x^5$ má derivaci $f'(x) = 5 \cdot x^4 \geq 0$, přičemž $f'(x) = 0$ pouze v bodě 0. Funkce f tedy roste na $(-\infty, \infty)$.

Pro zájemce

Důkaz věty o derivaci a aritmetických operacích: První dva vztahy plynou bezprostředně z analogických tvrzení o limitách; dokážeme c):

$$(f(x) \cdot g(x))' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h)\right] + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Důkaz věty o derivaci inverzní funkce: Z a) vyplývá, že funkce f je spojitá na (a,b) a s použitím věty o limitě složené funkce 2.26 s vnitřní složkou $y = f(x)$, tj. $x = g(y)$, dostáváme

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{y - y_0}{g(y) - g(y_0)} = \frac{1}{g'(y_0)}.$$

Důkaz prvního L'Hospitalova pravidla: Předpokládejme, že a je vlastní, tedy že platí $f(a) = g(a) = 0$. Potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

V případě, kdy $f(a)$ nebo $g(a)$ neexistuje (tedy některá z funkcí f, g má v a odstranitelnou singularitu), definiční předpis změníme tak, že položíme $f(a) = g(a) = 0$. V případě $a = \pm\infty$ použijeme substituci $t = \frac{1}{x}$ a větu o limitě složené funkce.

Důkaz Fermatovy věty: Předpokládejme, že f má v ξ maximum, tedy platí

$$f(x) \le f(\xi)\ \forall x \in \langle a,b\rangle, \quad \text{neboli} \quad f(x) - f(\xi) \le 0.$$

Potom pro podíl $\dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$ platí:

$$x < \xi \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \ge 0, \quad x > \xi \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \le 0.$$

Tedy

$$\lim_{x\to\xi^-} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'_-(\xi) \ge 0, \qquad \lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = f'_+(\xi) \le 0.$$

Protože podle předpokladu existuje $f'(\xi)$, musí platit

$$f'_-(\xi) = f'_+(\xi) = f'_(\xi) = 0.$$

Důkaz důsledků Lagrangeovy věty:

1. Směr f je konstantní na $\mathcal{J}_0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$ na $\mathcal{J}_0$ jsme ukázali přímým výpočtem z definice. Prověříme opačný směr:
   Nechť $f'(x) = 0$ na $\mathcal{J}_0$. Potom pro libovolná $x_1, x_2 \in \mathcal{J}_0$ existuje $\xi \in (x_1, x_2)$ tak, že platí $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Podle předpokladu je $f'(\xi) = 0$, tedy $f(x_2) = f(x_1)$ a funkce f je na $\mathcal{J}_0$ konstantní.

2. a) Předpokládejme, že f je neklesající na $\mathcal{J}$. Potom pro každé dva navzájem různé body $x, x^* \in \mathcal{J}_0$ platí

   $$\frac{f(x^*) - f(x)}{x^* - x} \ge 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{x^*\to x} \frac{f(x^*) - f(x)}{x^* - x} \ge 0.$$

   b) Předpokládejme nyní $f'(x) \ge 0$ na $\mathcal{J}_0$. Potom pro $x_1, x_2 \in \mathcal{J},\ \ x_1 < x_2$ platí podle Lagrangeovy věty

   $$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \ge 0, \quad \text{neboli} \quad f(x_1) \le f(x_2).$$

   Pro nerostoucí funkci by důkaz probíhal obdobně.

3. Je-li f rostoucí, potom podle předchozí věty je $f(x) \ge 0$ na $\mathcal{J}_0$, přičemž na žádném podintervalu není $f'(x) = 0$, protože f by byla na tomto podintervalu konstantní.
   Je-li $f(x) \ge 0$, přičemž není $f'(x) = 0$ na žádném podintervalu intervalu $\mathcal{J}_0$, potom f je neklesající, a protože není konstantní na žádném podintervalu, musí být rostoucí.

Shrnutí

V této kapitole jsme definovali základní prostředek diferenciálního počtu – derivaci funkce:

- derivace funkce f v bodě x_0: $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,
- derivace zleva (zprava): je definovaná pomocí příslušných jednostranných limit,
- derivace funkce f na intervalu: funkce $f' :\ x \to f'(x)$.

Derivace popisuje „rychlost, s jakou se mění daná veličina“, nejen ve fyzice, ale i v chemii, biologii, ekonomii, managementu,...

Dále jsme zavedli pojem diferenciál funkce – lineární část přírůstku funkce:

- diferenciál funkce f v bodě x_0 vzhledem k přírůstku h : $df(x_0) = f'(x_0)\, h$.

Ukázali jsme, jak můžeme využít derivací při výpočtu limit tzv. neurčitých výrazů (limit, které nelze vypočítat jako funkční hodnoty) – uvedli jsme

- L'Hospitalovo pravidlo: je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, resp. je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ a současně je $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$, je také $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$.

Na závěr kapitoly jsme uvedli tzv. věty o přírůstku funkce a jejich důsledky:

- Fermatova věta: má-li funkce diferencovatelná na intervalu v nějakém bodě tohoto intervalu největší resp. nejmenší hodnotu, musí mít v tomto bodě nulovou derivaci,
- Rolleova věta: má-li funkce diferencovatelná na nějakém intervalu v krajních bodech tohoto intervalu nulové hodnoty, musí mít v některém vnitřním bodě tohoto intervalu nulovou derivaci,
- Lagrangeova věta: pro funkci diferencovatelnou na intervalu (a, b) a spojitou na $\langle a, b\rangle$ existuje bod $\xi \in (a, b)$ tak, že platí $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$,
- platí-li pro funkci f na nějakém intervalu $f'(x) = 0$, je funkce na tomto intervalu konstantní,
- platí-li pro funkci f na nějakém intervalu $f'(x) > 0$ resp. $f'(x) < 0$, je funkce na tomto intervalu rostoucí resp. klesající,

Pomocí pravidel pro počítání s limitami jsme odvodili pravidla pro výpočet derivací a vztahy pro derivace základních elementárních funkcí; pravidla jsou shrnuty v následujících tabulkách:

Slovník pro derivace

Vzorce platí všude, kde je definovaná funkce i derivace.

Funkce	**Derivace**	**Funkce**	**Derivace**
c (konst.)	0	x	1
x^n	$n\,x^{n-1}$	x^α	$\alpha\,x^{\alpha-1}$
e^x	e^x	a^x	$a^x\,\ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x\,\ln a}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\operatorname{tgh} x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{cotgh} x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

Gramatika pro derivace

$(a\,f(x)+b\,g(x))'$	$=$	$a\,f'(x)+b\,g'(x)$
$(f(x)\,g(x))'$	$=$	$f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$	$=$	$\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$
$(f[\varphi(x)])'$	$=$	$f'[\varphi(x)]\,\varphi'(x)$

Užitečné vzorce

Je-li $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ platí:

$[f(x)]^{g(x)}$	$=$	$e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$
$\log_{g(x)} f(x)$	$=$	$\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)}$

Obr. 2.22:

Otázky a úkoly

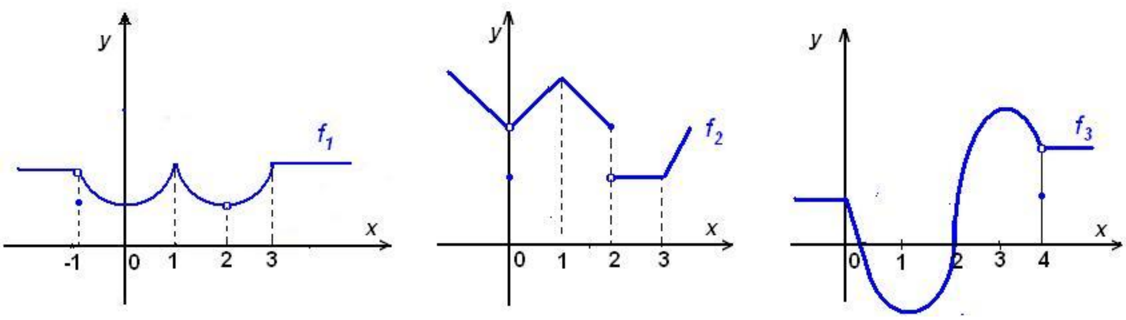
1. Co je to derivace funkce a) v bodě, b) na intervalu?

2. Na příkladu funkce f dané předpisem $f(x) = x^2\chi(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ pomocí definice derivace ukažte, že funkce definovaná na $\mathbb{R}$ může mít derivaci pouze v jednom bodě.

3. Body $A = [2, 4]$ a $B = [2 + \Delta x,\ 4 + \Delta y]$ paraboly $y = x^2$ prochází sečna. Najděte směrnici této sečny, jestliže $\Delta x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta x = 0{,}01$. Najděte též směrnici tečny paraboly v bodě A.

4. Nechť f je funkce, jejíž hodnota v x je $4x^2$.
   a) Vypočítejte $[f(2,1) - f(2)]/0{,}1$.
   b) Jak můžeme interpretovat zlomek v a), jestliže f znamená celkový zisk jisté firmy (v milionech dolarů) v prvních x letech činnosti?
   c) Jak můžeme interpretovat zlomek v a), jestliže f znamená druhou souřadnici na grafu paraboly $y = 4x^2$?
   d) Jak můžeme interpretovat zlomek v a), jestliže f udává vzdálenost, kterou urazí pohybující se částice v prvních x sekundách?
   e) Jaký je význam hodnoty $f'(2)$ v případech c),d)? Jak byste tyto pojmy rozšířili na případ b)?

5. Na obr. 2.23 jsou grafy tří funkcí f_1, f_2, f_3. Pro která čísla a
   a) existuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, ale f je nespojitá v a?
   b) f je v a spojitá, ale není v a diferencovatelná?

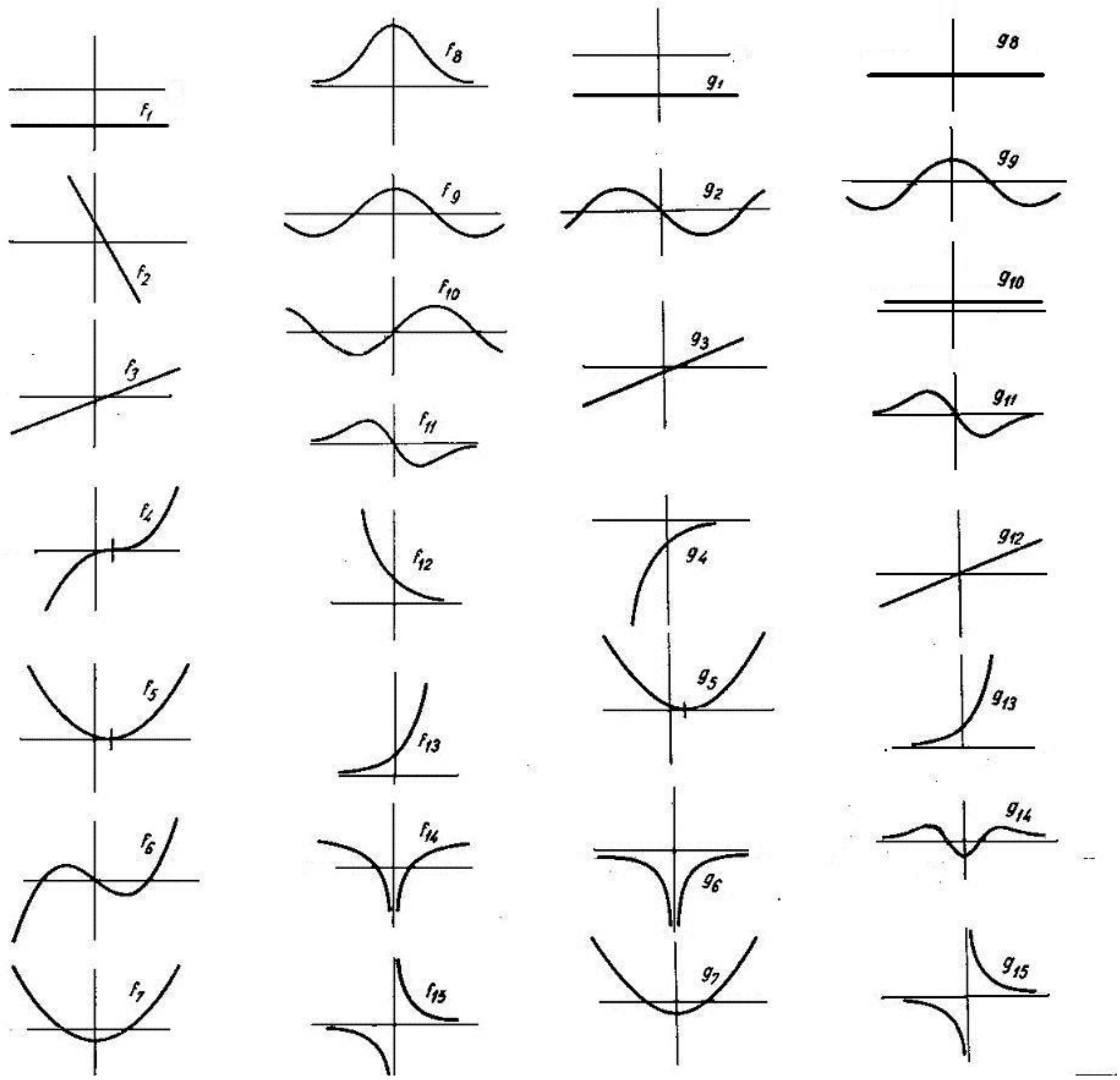


Obr. 2.23: Funkce z příkladu 5

6. O funkcích f a g víme, že $f(3) = 2$, $f'(3) = 4$, $g(3) = 5$, $g(5) = 3$, $g'(3) = 1$ a $g'(5) = 7$. Pro které x můžeme vypočítat $(f \circ g)'$ a čemu je rovna?

7. Nechť g je diferencovatelná funkce taková, že její derivace je rovna $\frac{1}{x^3+1}$. Nechť $h(x) = g(x^2)$. Najděte $h'(x)$.

8. V obr. 8 jsou v levé části grafy jistých funkcí f_1 – f_{15} a v pravé části grafy jistých funkcí g_1 – g_{15}. Ke každé funkci f_i najděte funkci g_j tak, aby platilo $f_i' = g_j$.



Obr. 2.24: Funkce a jejich derivace

9. Ukažte, že

   a) derivace liché funkce je sudá funkce,

   b) derivace sudé funkce je lichá funkce,

   c) derivace funkce periodické s periodou p je periodická funkce s periodou p.

10. Dokažte, že bod dotyku tečny k hyperbole o rovnici $y = \frac{c}{x}$ půlí úsečku určenou průsečíky této tečny se souřadnými osami.

11. Odůvodněte, proč nelze použít L'Hospitalovo pravidlo při výpočtu těchto limit:

    a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$

Cvičení

1. Vypočítejte derivace následujících funkcí (pro zjednodušení uvádíme pouze pravou stranu definičního předpisu):

a) $x^3 + 4x^3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^5} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}$

b) $\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^4\sqrt{x^3}}}$

c) $(x^3 - 2x + 1)(x^4 - 5x^2 + 10)$

d) $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$

f) $\dfrac{(x+1)(x^3-2x)}{(x^2+1)(x^3-1)}$

g) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{100}$

h) $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

i) $\sqrt[4]{(3+4\sqrt[3]{2x})^3}$

j) $\dfrac{\sin x + \cos x}{2\sin 2x}$

k) $\dfrac{\cos x^2}{\cos^2 x}$

l) $3\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg}^3 x$

m) $\operatorname{tg} \dfrac{1+x}{x}$

n) $\operatorname{cotg} \sqrt[5]{1+x^5}$

o) $\sin(\sin(\sin x))$

p) $\sin^3(\cos^2(\operatorname{tg} x))$

q) $4^{3x} + 36x^4$

r) $e^{\sqrt{x^2+x+1}}$

s) $e^{\frac{x}{\ln x}}$

t) $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$

u) $\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

v) $\operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x-1}$

w) x^{e^x}

x) $(\operatorname{tg} x)^{1/\cos x}$

y) $(\cosh x)^{\ln x}$

z) $(\ln x)^x + x^{\ln x}$

2. Vypočítejte derivace následujících funkcí a výsledky co nejvíce zjednodušte:

a) $x\ln(x - \sqrt{x^2-1}) + \sqrt{x^2-1}$

b) $\dfrac{1}{3(1+x^3)} + \frac{1}{3}\ln\dfrac{x^3}{1+x^3}$

c) $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} + \ln\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$

d) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

e) $\frac{1}{4}\ln\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$

3. Vypočtěte derivace následujících funkcí; v bodech, kde derivace neexistuje, vypočtěte derivaci zleva a zprava:

a) $|x^3|$ b) $\sqrt{|x-1|}$ c) $\ln|3-x|$

d) $x|x|$ e) $|\cos x|$ f) $(-1)^{[x]}$

4. Najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě A, je-li

   a) $f(x) = \frac{3x-2}{2x-3}$, $A = [1, ?]$ b) $f(x) = 2\sqrt{2}\sin x$, $A = [\frac{\pi}{4}, ?]$

   c) $f(x) = \ln(x+1)$, $A = [0, ?]$ d) $f(x) = e^{-x}\cos 2x$, $A = [0, ?]$

5. Najděte rovnici tečny a normály k parabole $y = x^2 - 2x + 3$, jestliže tečna

   a) je rovnoběžná s přímkou $3x - y + 5 = 0$,
   b) je kolmá na přímku $x + y - 1 = 0$,
   c) svírá s přímkou $2x + y - 2 = 0$ úhel $\frac{\pi}{4}$.

6. Vedení vysokého napětí má rozpětí mezi stožáry 80 m. Tvar zavěšeného vodiče udává parabola $y = 0{,}001\,x^2$, přičemž její vrchol je stejně vzdálen od obou stožárů. Najděte úhel mezi vodičem a stožárem.

7. Balon kulového tvaru zmenšuje v důsledku porušení svého obalu svůj průměr o 2 cm za sekundu. Vypočítejte, jakou rychlostí se zmenšuje jeho objem, je-li počáteční poloměr balonu $r = 16$ m.

8. Jestliže těleso vyhodíme svisle vzhůru s počáteční rychlostí v_0 ms^{-1} je jeho výška nad povrchem počítaná v metrech daná vztahem $s = v_0 t - 4{,}9t^2$, kde t je čas v sekundách. Pro $v_0 = 100\,\text{ms}^{-1}$ určete

   a) rychlost v čase $t = 2$ s,
   b) rychlost v čase $t = 15$ s,
   c) v jakém čase dosáhne těleso největší výšku,
   d) jaké největší výšky těleso dosáhne.

9. Vlak vyjíždí z nádraží, přičemž jeho pohyb popisuje rovnice $s = at^2 + bt + c$, kde s je dráha v km, t čas v hodinách. Po uplynutí jedné minuty vlak dosáhne rychlosti 60 km/h. Jakou dráhu urazí, než dosáhne této rychlosti?

10. Na moři křižují dvě lodě svou dráhu pod pravým úhlem. Když je první v průsečíku drah, druhá je od něj ještě vzdálená 20 km. První loď se pohybuje rychlostí $v_1 = 30$ km/h, druhá rychlostí $v_2 = 50$ km/h. Vypočtěte

    a) rychlost, s jakou se vzdalují,
    b) nejmenší vzdálenost.

11. Pouliční lampa visí 6 m nad zemí. Člověk vysoký 1,8 m kráčí rychlostí 1,6 m/s. Zjistěte

    a) jakou rychlostí se pohybuje stín jeho hlavy,
    b) jakou rychlostí se mění délka jeho stínu.

12. Množství elektrického náboje protékající vodičem se mění podle vztahu $Q = Q(t)$, kde Q je zadané v Coulombech a t v sekundách. Vypočítejte intenzitu elektrického proudu v čase t_0 a zjistěte, kdy se bude rovnat intenzitě i_1, je-li
    a) $Q(t) = 3t^2 + 2t + 2$, $t_0 = 0; 1; 5s$, $i_1 = 20\,A$;
    b) $Q(t) = 2te^{-t}$, $t_0 = 0\,s$, $i_1 = 0\,A$;
    c) $Q(t) = 0{,}05t + 0{,}04\sin(100\pi t + 20)$, $t_0 = 7{,}5\,s$, $i_1 = 0{,}9\,A$.

13. Indukční cívkou protéká proud i, pro který platí $i = 15\sin^5 3t$, kde proud i je v ampérech a čas t v sekundách. Vypočítejte indukovanou elektromotorickou sílu $e_i = -L\frac{di}{dt}$ v čase $t = 2\pi/9\,\mathrm{s}$, je-li $L = 0{,}03\,\mathrm{H}$.

14. K zadaným funkcím f najděte přírůstek funkce Δf a diferenciál df v čísle x_0 pro daný přírůstek Δx:
    a) $f(x) = 3x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 10^{-1}$,
    b) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 10x - 12$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0,2$,
    c) $f(x) = \operatorname{arc\,cotg} x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,3$,
    d) $f(x) = \ln\sqrt{x^2 - 2x}$, $x_0 = 3$, $\Delta x = -0,02$.

15. Vypočítejte přibližně pomocí diferenciálu následující hodnoty; výsledky porovnejte s hodnotami nalezenými pomocí kalkulačky:
    a) $\ln 25{,}02$, $\ln 24{,}6$, je-li $\ln 25 \doteq 3{,}2189$,
    b) $\log 1001$, je-li $\ln 10 \doteq 2{,}3026$,
    c) $\mathrm{tg}\, 46°$,
    d) $\mathrm{arctg} 1{,}1$,
    e) $2^{1{,}002}$.

16. Vypočtěte, o kolik se změní objem krychle, jestliže se délka její hrany zvětší z 6 cm na 6,1 cm, a to a) přesně, b) pomocí diferenciálu. Získané výsledky porovnejte.

17. Koule má poloměr r. Najděte přírůstek a diferenciál a) objemu, b) povrchu koule jako funkci poloměru r pro poloměr $r = R$ a diferenci Δr.

18. V elektrickém obvodu s konstantním napětím U se změní odpor R o ΔR. Vypočítejte, o kolik se změní proud a) přesně, b) přibližně.

19. Pomocí L'Hospitalova pravidla vypočítejte následující limity:

    a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5x^3 - x^2 + 2}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4 + x^2 + x}{2x^3 - 5x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + x^2 - x + 4}{2x^4 + x - 9}$

    d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{(\ln x)^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 - x)}{x^3}$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \left((x + 1)e^{\frac{1}{x-1}} - x\right)$

    g) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\ln x}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ i) $\lim\limits_{x\to 1^-} (1 - x)\ln(1 - x)$

    j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos x - 2 + x^2}{x^2 \sin^2 x}$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + x + 2x^3 - e^x}{\sin^2 x}$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)}$

20. Rezistorem s odporem $R = 5\,\Omega$ teče proud $i = 2t\sin\frac{3}{t}\,(A)$. Vypočítejte okamžitý výkon proudu na rezistoru R. Najděte hodnotu výkonu pro $t \to \infty$.

Výsledky

1. a) $3x^2 + 14x^2\sqrt{x} + \frac{8}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{15}{x^6} - \frac{10}{3\sqrt[3]{x^5}}$, b) $\frac{19}{12}\sqrt[12]{x^7}$, c) $7x^6 - 35x^4 + 4x^3 + 60x^2 - 10x - 20$, d) $2(x-2)(x-3)^2(3x^2 - 11x + 9)$, e) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}(1-\sqrt[3]{x})^2} - \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+2\sqrt{x})^2}$, f) $-\frac{x^8+2x^7-7x^6-6x^5-x^4+5x^2-4x-2}{(x^2+1)^2(x^3-1)^2}$, g) $50\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{99}\frac{x-1}{x\sqrt{x}}$, h) $-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x(1-x)}}$, i) $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x^2}}\frac{1}{\sqrt[4]{3+4\sqrt[3]{2x}}}$, j) $\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin^2 2x}$, k) $\frac{2}{\cos^3 x}(\sin x\cos x^2 - x\sin x^2\cos x)$, l) $\frac{-3}{\sin^4 x}$, m) $-\frac{1}{x^2}\frac{1}{\cos^2(1+\frac{1}{x})}$, n) $\frac{-1}{\sin^2\sqrt[5]{1+x^5}}\frac{x^4}{\sqrt[5]{(1+x^5)^4}}$, o) $\cos(\sin(\sin x))\cos(\sin x)\cos x$, p) $-3\sin^2(\cos^2(\operatorname{tg} x))\cos(\cos^2(\operatorname{tg} x))\sin(2\operatorname{tg} x)\frac{1}{\cos^2 x}$, q) $3\cdot 4^{3x}\ln 4 + 144x^3$, r) $e^{\sqrt{x^2+x+1}}\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$, s) $\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}e^{\frac{x}{\ln x}}$, t) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, u) $\frac{-1}{\cos x}$, v) $\frac{-1}{1+x^2}$, w) $e^x x^{e^x}(\ln x + \frac{1}{x})$, x) $(\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\cos x}}(\sin x\ln\operatorname{tg} x + \frac{1}{\sin x})\frac{1}{\cos^2 x}$, y) $(\cosh x)^{\ln x}(\operatorname{tgh} x\ln x + \frac{\ln\cosh x}{x})$, z) $(\ln x)^{x-1}(1+\ln x\ln\ln x) + 2x^{\ln x-1}\ln x$;

2. a) $\ln(x-\sqrt{x^2-1})$, b) $\frac{1}{x(1+x^3)^2}$, c) $\frac{4x^2}{x^4-16}$, d) $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2+2}$, e) $\frac{1}{1+x^2+x^4}$;

3. a) $3x|x|$, b) $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ pro $x>1$, $\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$ pro $x<1$, $f'(1)$ neex., $f'_+(1)=\infty$, $f'_-(1)=-\infty$, c) $\frac{1}{x-3}$ pro $x\neq 3$, d) $2|x|$, e) $(-1)^{k+1}\sin x$ pro $x\neq\frac{\pi}{2}+k$, $k\in\mathbb{Z}$, f) 0 pro $x\neq k$, $k\in\mathbb{Z}$;

4. a) $5x+y-4=0$, $x-5y-6=0$, b) $2x-y+2-\pi/2=0$, $x+2y-4-\pi/4=0$, c) $y=x$, $y=-x$, d) $x+y-1=0$, $x-y+1=0$;

5. a) $12x-4y-13=0$, $4x+12y-61=0$, b) $4x-4y+3=0$, $4x+4y-15=0$, c) $12x-4y-13=0$, $4x+12y-61=0$; $12x+36y-83=0$, $108x-36y-17=0$;

6. arctg $12,5 \doteq 85°25'34''$; **7.** 1,508 m/s^2; **8.** a) $80,4\text{ms}^{-1}$, b) -47ms^{-1}, c) $10,2$s, d) $510,20$m; **9.** 500m, **10.** a) 58,31 km/h, b)10,29 km;

11. a)2,285 m/s, b) $\frac{24}{35}$ m/s;

12 a) 2 A, 8 A, 32 A, 3 s, b) 2 A, 1s, c) 5,06 A, 0,00112..+k/50; **13.** 1,90 V,

14. a) 0,63, 0,6, b) -2,152, -2, c) -0,09, -0,1, d) (ln 0,973)/2, -0,013;

15. a) 3,2197,3,2029, b) 3,0004, c) 1,035906, d) 0,835398,e) 2,003;

16. a) 10,981, b) 10,8; **17.** a) $4\pi r^2\Delta r + 4\pi R(\Delta r)^2 + 4\pi R(\Delta r)^3$, $4\pi R^2\Delta r$, b) $8\pi R\Delta r + 4\pi(\Delta r)^2$, $8\pi R\Delta r$;

18. $(-U_0\Delta R)/(R(R-\Delta R))$, $(-U_0\Delta R)/R^2$;

19. a) $\frac{1}{5}$, b) $-\infty$, c) 0, d) ∞, e) $-\infty$, f) 2, g) ∞, h) $\frac{1}{e}$, i) 0, j) $\frac{1}{12}$, k) $-\frac{1}{2}$, l) 0;

20. 180[W].

2.5 Derivace vyšších řádů, Taylorův polynom

V předchozí kapitole jsme viděli, že rychlost pohybujícího se tělesa získáme derivací funkce, která popisuje závislost dráhy na čase. Naskýtá se otázka, zda podobně nemůžeme získat zrychlení, s jakým se těleso pohybuje. Vzhledem k tomu, že rychlost popisuje změnu dráhy, a zrychlení analogicky změnu rychlosti, je přirozené položit poslední výraz chápeme jako „druhou derivaci“.
Podobně jistě můžeme zavést i derivaci třetí, čtvrtou,… obecně libovolného řádu.

Různé fyzikální i jiné přírodní jevy bývají popsány dosti komplikovanými funkčními závislostmi; mají-li se takové jevy vyšetřovat, bývá výhodné nahradit zkoumanou funkci v okolí „pracovního bodu“ některou jednodušší – nejraději polynomem. V této kapitole ukážeme, jak se takový polynom, který dostatečně aproximuje zkoumanou funkci – Taylorův polynom – najde.

Derivace a diferenciály vyšších řádů

Definice 2.67. Je-li f' derivace funkce f na otevřeném intervalu $\mathcal{J}$, může se stát, že funkce f' má na $\mathcal{J}$ (nebo na některém otevřeném intervalu, který je částí $\mathcal{J}$) sama derivaci. Potom tuto derivaci nazýváme ***derivací druhého řádu***, nebo též ***druhou derivací*** funkce f a značíme ji f'', nebo $\dfrac{d^2 f}{d\,x^2}$.

Rekurzí definujeme ***derivaci n-tého řádu***, nebo též ***n-tou derivaci*** jako derivaci $(n-$ $-\,1)$-ní derivace:

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Řád derivace se udává jako horní index v závorce. Pro derivace do třetího řádu budeme používat označení $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$. Je výhodné definovat také nultou derivaci vztahem $f^{(0)} = f$.

Pro n-tou derivaci se používá též označení $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ (tzv. Leibnizův zápis n-té derivace).

Má-li funkce f na otevřeném intervalu $\mathcal{J}$ derivaci n-tého řádu $f^{(n)}$, řekneme, že f je na $\mathcal{J}$ ***n-krát diferencovatelná.***

Příklad 2.68. Máme najít $f^{(n)}$ pro funkci definovanou předpisem $f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 5$.

Řešení.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 + 2x - 1 \\ f''(x) &= 12x + 2 \\ f'''(x) &= 12 \\ f^{(4)}(x) &= 0 \\ f^{(n)}(x) &= 0 \text{ pro } n \geq 4. \end{aligned}$$

Zadaná funkce byl polynom 3. stupně; derivace řádu většího než tři je rovna nule.

Tento výsledek můžeme jistě zobecnit na libovolný polynom – derivace řádu většího než je stupeň polynomu je rovna nule. □

Příklad 2.69. Vypočítáme *a)* $(\sin x)^{(n)}$ *b)* $\left(e^{px+q}\right)^{(n)}$ *c)* $(a^x)^{(n)}$

Řešení. a) $(\sin x)' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$; $(\sin x)'' = \left(\sin(x + \frac{\pi}{2})\right)' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) =$ $= \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$;

$\Rightarrow \quad (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$

b) $\left(e^{px+q}\right)' = p\, e^{px+q}$; $\left(e^{px+q}\right)^{(n)} = p^n\, e^{px+q}$

c) $(a^x)' = a^x \ln a$; $(a^x)^{(n)} = a^x\, (\ln a)^n$

□

Definice 2.70. Je-li funkce f n-krát diferencovatelná v bodě x_0, potom funkci

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n$$

proměnné $h \in \mathbb{R}$ nazýváme ***diferenciálem n-tého řádu*** funkce f v bodě x_0, nebo ***n-tým diferenciálem*** funkce f v bodě x_0.

Použijeme-li pro přírůstek h označení dx, píšeme

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot dx^n$$

a odtud dostáváme zmíněné Leibnizovo označení n-té derivace $\dfrac{d^n f(x_0)}{dx^n} = f^{(n)}(x_0)$.

Příklad 2.71. Vypočítáme $d^2 f(3)$, je-li $f(x) = 5^{x-3}$.

Řešení. $f'(x) = 5^{x-3} \ln 5$; $f''(x) = 5^{x-3}(\ln 5)^2$; $f''(3) = (\ln 5)^2 \Rightarrow d^2 f(3) = (\ln 5)^2 dx^2$

□

Linearizace

Víme, že rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ má tvar

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{neboli} \qquad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Výraz na pravé straně je polynom 1. stupně; označme jako p funkci definovanou vztahem $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Pro funkci p zřejmě platí $p(x_0) = f(x_0)$, $p'(x_0) = f'(x_0)$,
navíc se dá ukázat, že p je jediný polynom 1. stupně s těmito dvěma vlastnostmi.

Protože polynom stupně nejvýše 1. se nazývá lineární funkce (grafem je přímka), řekneme, že p je ***linearizace*** funkce f v x_0.

Příklad 2.72.
Máme najít linearizaci funkce

$f: \ f(x) = \operatorname{tg} x \quad \text{v } \frac{\pi}{4}$.

Řešení.

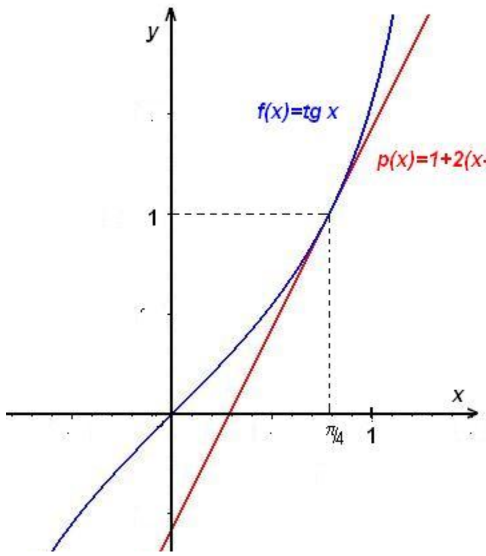
$f(x) = \operatorname{tg} x, \qquad f(\frac{\pi}{4}) = 1,$

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 2.$

Odtud

$$p(x) = 1 + 2(x - \frac{\pi}{4}) = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}.$$

□



Obr. 2.25: Linearizace

Poznamenejme, že linearizace se užívá velmi často v praxi, například při náhradě experimentálně zjištěných charakteristik elektrických součástek (tranzistorů) v okolí pracovního bodu.

Aproximace funkce Taylorovým polynomem

Nyní přikročíme k řešení jednoho z nejdůležitějších problémů matematické analýzy – aproximaci funkce pomocí polynomu.

Máme-li aproximovat funkci f diferencovatelnou v x_0 v dosti malém okolí $\mathcal{U}(x_0)$ lineární funkcí (polynomem prvního stupně) $T_1(x)$, použijeme tu funkci, jejímž grafem je tečna ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$, jinými slovy požadujeme, aby se v bodě x_0 shodovaly funkční hodnoty a hodnoty prvních derivací funkce f a polynomu T_1 – viz 2.25. Hodnota funkce f a polynomu T_1 se však může značně lišit v bodech $x \neq x_0$. Je-li funkce f n-krát diferencovatelná, můžeme přesnost aproximace v dosti malém okolí bodu x_0 zlepšit, použijeme-li polynom n-tého stupně T_n, po kterém budeme požadovat, aby se v bodě x_0 shodoval s funkcí f až do n-té derivace včetně, to znamená, aby platilo

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \;\; k = 0, 1, ..., n.$$

Snadno se prověří, že tuto vlastnost má polynom z následující definice:

Definice 2.73. ***Taylorovým polynomem*** funkce f v bodě x_0 nazýváme polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Pro $x_0 = 0$ se polynom $T_n(x)$ nazývá též ***Maclaurinův polynom***.

Označíme-li $dx = x - x_0$, je $f^{(k)}(x_0)\,(x-x_0)^k = d^k f(x_0)$ a Taylorův polynom můžeme psát ve tvaru

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0).$$

Rozdíl mezi hodnotou $f(x)$ a $T_n(x)$ označíme

$$R_{n+1}(x) = f(x) - T_n(x)$$

a nazveme ***zbytek*** po n-té mocnině, nebo $(n+1)$-ní zbytek. Zbytek určuje nepřesnost aproximace funkce f příslušným Taylorovým polynomem T_n.

Věta 2.74. **(Taylorova)** *Nechť funkce f je (n+1)-krát diferencovatelná na jistém okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu x_0. Potom pro $x \in \mathcal{U}(x_0)$ platí*

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x) \quad kde \quad R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

přičemž ξ leží mezi body x, x_0, neboli $\xi = x_0 + \vartheta(x - x_0)$ $\;0 < \vartheta < 1$.

Příklad 2.75. Najděme Taylorův vzorec pro funkci

$$f : f(x) = \sqrt{1+x},\ x \in \langle -1, +\infty),\ x_0 = 0,\ n = 3.$$

Nakresleme graf dané funkce v okolí bodu $x_0 = 0$ a grafy příslušných Taylorových polynomů stupně 1, 2 a 3.

Řešení. Máme za úkol vyjádřit danou funkci f ve tvaru

$$f(x) = T_3(x) + R_4(x),$$

kde T_3 je Maclaurinův polynom stupně nejvýše 3 dané funkce f, tj.

$$T_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3,$$

a R_4 je příslušný zbytek v Taylorově vzorci:

$$R_4(x) = \frac{1}{4!}\,f^{(4)}(\xi)\,x^4, \quad \xi = \vartheta x,\ 0 < \vartheta < 1.$$

Vypočítáme potřebné derivace:

$$\begin{array}{llll}
f(x) & = (1+x)^{1/2}, & f(0) & = 1 \\
f'(x) & = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, & f'(0) & = \frac{1}{2} \\
f''(x) & = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(1+x)^{-3/2}, & f''(0) & = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) \\
f'''(x) & = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(1+x)^{-5/2}, & f'''(0) & = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \\
f^{(4)}(x) & = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(1+x)^{-7/2}, & f^{(4)}(\xi) & = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(1+\xi)^{-7/2}.
\end{array}$$

$\square$

Po dosazení do Taylorova vzorce dostaneme pro $x \in (-1, +\infty)$:

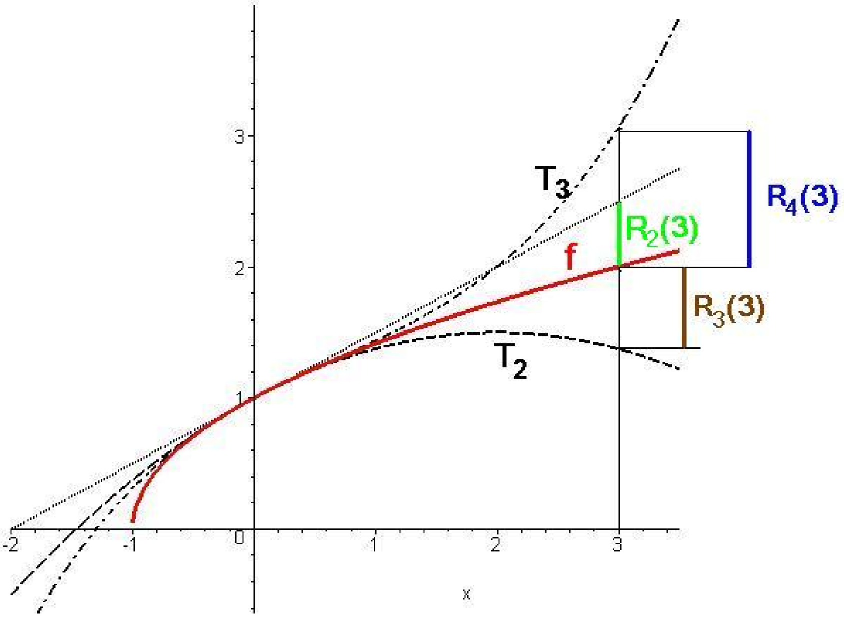
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{x^3}{3!} + R_4(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + R_4(x),$$

$$\text{kde} \qquad R_4(x) = \frac{-1\cdot 3\cdot 5}{2^4}\frac{x^4}{4!}(1+\vartheta x)^{-7/2}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Na obr. 2.26, kde je nakreslen graf dané funkce f a grafy jejích Taylorových polynomů T_1, T_2, T_3 v bodě $x_0 = 0$ stupně 1,2 a 3, jsou dále v bodě $x = 3$ vyznačeny absolutní hodnoty zbytků $R_2(3)$, $R_3(3)$ a $R_4(3)$ příslušného Taylorova vzorce.

Taylorův polynom T_n funkce f v bodě x_0 tedy aproximuje funkci f v bodech x jistého okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu x_0, a to s chybou danou absolutní hodnotou zbytku R_{n+1} pro příslušný bod x. Lze tedy pro body $x \in \mathcal{U}_{x_0}$ napsat přibližný vztah

$$f(x) \approx T_n(x), \quad x \in \mathcal{U}(x_0),$$



Obr. 2.26: Taylorovy polynomy funkce $\sqrt{1+x}$

jehož chyba je dána absolutní hodnotou $|R_{n+1}(x)|$.

Uvedená aproximace má lokální charakter. Při výpočtu přibližné hodnoty funkce f podle Taylorova vzorce můžeme všeobecně očekávat uspokojující výsledky jen pro body x blízké bodu x_0.

Tuto situaci můžeme ilustrovat na funkci $\sqrt{1+x}$ z předchozího příkladu, jestliže pro její aproximaci použijeme odvozený polynom T_3 , tj. položíme-li

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{8}\,x^2 + \frac{1}{16}\,x^3. \qquad (*)$$

Odhadněme chybu této aproximace:

$$|R_4(x)| = \left| \frac{-1\cdot 3\cdot 5}{2^4}\,\frac{1}{4!}\,\frac{x^4}{\sqrt{(1+\vartheta x)^7}} \right| < \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4}\,\frac{x^4}{4!}, \qquad (**)$$

přičemž poslední výraz jsme dostali tak, že jsme položili $\vartheta = 0$ (tím jsme výraz zaručeně zvětšili).

Dosadíme-li do vzorce (*) za x hodnotu poměrně malou, např. $x = 0{,}2$, dostaneme pro přibližnou hodnotu čísla $\sqrt{1{,}2}$:

$$\sqrt{1{,}2} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}2 - \frac{1}{8}\cdot (0{,}2)^2 + \frac{1}{16}\cdot (0{,}2)^3 = 1{,}095\,5.$$

Chyba této aproximace je podle vzorce (**) menší než $\frac{5}{128}\cdot (0{,}2)^4 \doteq 0{,}000\,06$.

Pro srovnání - na kalkulačce vypočteme $\sqrt{1{,}2} \doteq 1{,}095\,445\,115$.

Dosadíme-li však do (*) za x číslo podstatně větší, např. $x = 2{,}4$, dostaneme pro přibližnou hodnotu čísla $\sqrt{3{,}4}$:

$$\sqrt{3{,}4} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 2{,}4 - \frac{1}{8} \cdot (2{,}4)^2 + \frac{1}{16} \cdot (2{,}4)^3 = 2{,}344;$$

přitom na kalkulačce vypočítáme $\sqrt{3{,}4} \approx 1{,}843\,908\,891$. Použití vzorce (*) dává v tomto případě výsledek zcela nevyhovující. Ukazuje se dokonce, že i kdybychom pro $x = 2{,}4$ zvyšovali stupeň aproximujícího polynomu T_n, nedostali bychom pro $x = 2{,}4$ lepší výsledky, právě naopak. Na obr. 2.26 můžeme vidět, že v bodě $x = 3$ se aproximace zhoršuje, jestliže zvyšujeme stupeň Taylorova polynomu.

V předchozím příkladu jsme si stanovili předem stupeň Taylorova polynomu a poté určovali chybu, které se při aproximaci dopustíme. V následujícím příkladu postup obrátíme – nejdříve stanovíme přesnost aproximace a k ní budeme hledat stupeň aproximujícího polynomu, pro který bude požadované přesnosti dosaženo.

Příklad 2.76. Aproximujme funkci e^x Maclaurinovým polynomem a určeme, jaký musí být jeho stupeň, aby pro $x \in (0, 1)$ byla chyba v absolutní hodnotě menší než 10^{-3}.

Řešení.
$f^{(k)}(x) = e^x$,

$f^{(k)}(0) = e^0 = 1, \; k = 0, 1, 2, \dots$.

Proto

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}, \quad \text{kde} \quad R_{n+1} = \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, 0 < \vartheta < 1.$$

Nyní požadujeme

$$|R_{n+1}| = \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} |x|^{n+1} < 10^{-3} \quad \text{pro} \quad x \in (0, 1).$$

K tomu stačí, aby

$$|R_{n+1}| = \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} |x|^{n+1} < \frac{e}{(n+1)!} < 10^{-3},$$

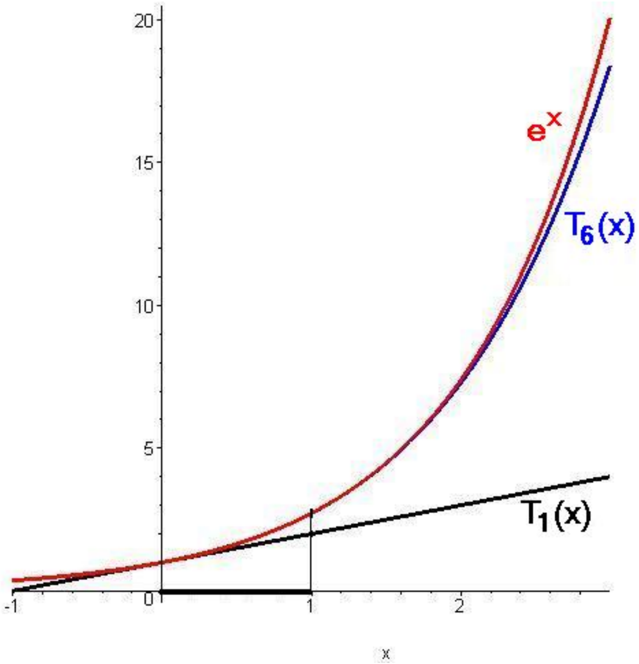
neboli

$$(n+1)! > e \cdot 10^3 > 2718.$$

Protože $6! = 720, \quad 7! = 5040$ vyhovuje $n = 6$.

Proto pro předepsanou přesnost je třeba vzít polynom alespoň šestého stupně. □

Maplet pro výpočet Taylorových polynomů najdete zde. V tomto mapletu se pro zvolené funkce počítají i Taylorovy řady, o kterých se více dozvíme v poslední kapitole tohoto textu.



Obr. 2.27: Taylorovy polynomy funkce e^x

Shrnutí

V této kapitole jsme zavedli pojem

- derivace druhého řádu funkce f: existuje-li f' na nějakém intervalu $\mathcal{J}$, klademe $f''(x) = (f'(x))'$,
- derivace n-tého řádu funkce f: existuje-li $f^{(n-1)}$ na nějakém intervalu $\mathcal{J}$, klademe $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$,
- diferenciál n-tého řádu funkce f v bodě x_0: funkce proměnné h: $d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n$, je-li f funkce n-krát diferencovatelná v bodě x_0.

Dále jsme uvedli vztah pro aproximaci funkce (dostatečně mnohokrát diferencovatelné) v okolí nějakého bodu:

- Taylorův vzorec: $f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x)$, kde $T_n(x)$ a $R_{n+1}(x)$ je
- Taylorův polynom: $T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$,
- zbytek po n-tém členu: $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, ξ mezi x_0 a x.

Taylorovy formule pro některé funkce

e^x	$\approx$	$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$	$R(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,e^{\vartheta x}$
$\sin x$	$\approx$	$\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$	$R(x)=(-1)^k\frac{\cos\vartheta x}{(2k+1)!}x^{2k+1}$
$\cos x$	$\approx$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$R(x)=(-1)^{k+1}\frac{\cos\vartheta x}{(2k+2)!}x^{2k+2}$
$\ln(1+x)$	$\approx$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$	$R(x)=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(1+\vartheta x)^{n+1}(n+1)}$

Otázky a úkoly

1. Jak definujeme derivaci druhého řádu? Obecně k-tého řádu?

2. Může existovat funkce f a bod x_0 tak, aby platilo: $f'_-(x_0)=1, f'_+(x_0)=-1$ a $f''(x_0)=0$? Jestliže ano, uveďte příklad; jestliže ne, uveďte proč.

3. Pro n-tou derivaci součinu n-krát diferencovatelných funkcí se uvádí tzv. Leibnizova formule
$$(fg)^{(n)}=f^{(n)}g+\binom{n}{1}f^{(n-1)}g'+\binom{n}{2}f^{(n-2)}g''+\cdots+\binom{n}{n-1}f'g^{(n-1)}+fg^{(n)}.$$
Ověřte tuto formuli pro $n=2$ a pokuste se naznačit indukční krok při důkazu formule matematickou indukcí.

4. Najděte druhou a třetí derivaci funkce $f\circ g$, $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$, jestliže funkce f a g mají na příslušných množinách třetí derivaci.

5. Funkce f má na množině M derivace f', f'' f'''. Inverzní funkce f_{-1} k funkci f existuje a má na jisté množině N derivace f'_{-1}, f''_{-1}, f'''_{-1}. Vyjádřete tyto derivace pomocí f', f'' f'''.

6. Najděte diferenciál druhého řádu součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí f a g, jestliže tyto funkce mají druhé derivace a $g(x)\neq 0$.

7. Pomocí Taylorovy věty ukažte, že polynom n-tého stupně $P_n(x)$ je dělitelný výrazem
   a) $(x-x_0)$ právě když $f(x_0)=0$,
   b) $(x-x_0)^k$ právě když $f(x_0)=0,\ f'(x_0)=0,\ f''(x_0)=0,\dots,f^{(k-1)}(x_0)=0$.

8. Ukažte, že pro polynom P_n n-tého stupně platí
$$P(x+h)=P(x)+\frac{h}{1!}P'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}P^{(n)}(x).$$

9. Ukažte, že pro funkci f danou předpisem $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{pro}\quad x\neq 0\\ 0 & \text{pro}\quad x=0\end{cases}$

   platí $f^{(n)}(0)=0$.

Cvičení

1. Vypočítejte $f''(0)$, $f''(1)$, je-li

   a) $f(x) = x^5 - 7x^2 + 12$, b) $f(x) = x\sqrt{x^2+3}$,

   c) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, d) $f(x) = xe^{-x^2}$.

2. Ukažte, že pro funkci $y = f(x)$ platí

   a) $y^{(4)} + 4y = 0$, je-li $y = e^{-x}\cos x$,

   b) $y'' = 1 - (y')^2$, je-li $y = \ln|c_1e^x + c_2e^{-x}|$,

   c) $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$, je-li $y = x\sin x + \cos x \ln\cos x$.

3. Vypočítejte

   a) $f^{(4)}$, je-li $f(x) = x^6 + 5x^4 + 2x^3 - x^2$,

   b) $f^{(4)}$, je-li $f(x) = \frac{3}{x^{11}}$,

   c) f'', je-li $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$,

   d) $f^{(7)}$, je-li $f(x) = x^2(1-3x)^4(x+1)$,

   e) f''', je-li $f(x) = (1+x)^6$.

4. Vypočtěte derivaci n-tého řádu funkce f, je-li

   a) $f(x) = (a+bx)^m$, b) $f(x) = \dfrac{1}{a+bx}$,

   c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a+bx}}$, d) $f(x) = \sin px$,

   kde a, b, p jsou konstanty.

5. Vypočítejte rychlost a zrychlení tělesa, které se pohybuje po přímce, je-li jeho poloha dána vztahem $x = Ae^{-\alpha t}(1+\alpha t)$. Ukažte, že pro rychlost a zrychlení platí

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \alpha^2 x = 0.$$

6. Najděte zrychlení lodě a sílu působící na loď, která pluje přímočaře ke břehu po vypnutí motorů pouze setrvačností. Její vzdálenost od břehu se mění podle vztahu

$$x = h - \frac{m}{r}\ln\left(1 + \frac{rv_0}{m}t\right),$$

   kde h je vzdálenost lodě od břehu a v_0 rychlost lodě při vypnutí motorů, m je hmotnost lodě a r součinitel odporu vody.

7. Vypočítejte diferenciály vyšších řádů dané funkce f v bodě x_0 pro přírůstek Δx, je-li

a) $f(x) = x^3$, $d^3f(1)$, $\Delta x = -0,2$;

b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $d^2f(1)$, $\Delta x = 0,1$;

c) $f(x) = x^x$, $d^2f(1)$, $\Delta x = 0,1$;

d) $f(x) = \log x$, $d^4f(2)$, $\Delta x = 0,25$.

8. Linearizujte následující funkce v okolí daných pracovních bodů:

a) $f(x) = 4x^2 + \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$;

b) $f(x) = x \sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

c) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $x_0 = 0$;

d) $f(x) = \frac{2x^3}{\sin x}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

9. Následující polynomy vyjádřete v mocninách $(x-a)$:

a) $y = x^4 - 3x^2 - 10x + 11$, je-li $a = 2$,

b) $y = x^3 - 2x + 5$, je-li $a = 100$.

10. Najděte Maclaurinovy polynomy stupně n daných funkcí f:

a) $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$, $n = 3$,

b) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $n = 5$,

c) $f(x) = \sin^3 x$, $n = 5$,

d) $f(x) = xe^{-x}$, $n = 4$,

e) $f(x) = \ln \cos x$, $n = 6$.

11. Ověřte, že funkce $y = x$ aproximuje funkci $y = \sin x$ s chybou menší než 0,001, je-li $|x| < 0{,}18$.

12. Zjistěte, kolik nenulových členů Maclaurinova polynomu musíme vzít pro funkci $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, abychom ji aproximovali v intervalu $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ s chybou menší než 0,005.

13. Pro jaké kladné x můžeme aproximovat funkci

a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$, b) $f(x) = \ln(1+x)$

prvními dvěma nenulovými členy Maclaurinova polynomu s chybou menší než 0,001 ?

Výsledky

1. a) -14, 6; b) 0, 11/8; c) 0, $8\frac{\sin 2}{\cos^3 2}$; d) 0, $\frac{-2}{e}$;

3. a) $360x^2 + 120$, b) $72\,072\,x^{-15}$, c) $\frac{4}{(x-1)^3}$, d) 408 240, e) $120(1+x)^3$;

4. a) $\frac{m!}{(m-n)!} b^n (a+bx)^{m-n}$, b) $\frac{(-1)^n n! b^n}{(a+bx)^{n+1}}$, c) $(-1)^n \frac{(2n-1)!! b^n}{2^n (a+bx)^n \sqrt{a+bx}}$, d) $p^n \sin(px + n\pi/2)$;

5. $v = A\alpha^2 te^{-\alpha t}$, $a = A\alpha^2 e^{-\alpha t}(\alpha t - 1)$;
6. $a = \frac{mrv_0^2}{(m+rv_0t)^2}$, $f = ma = r\left(\frac{mv_0}{m+rv_0t}\right)^2$;
7. a) -0,048; b) -0,01; c) 0,02; d) $-\frac{1}{2048}\ln 2$;
8. a) $p(x) = \frac{1}{3}(25x - 10)$, b) $p(x) = x$, c) $p(x) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x$, d) $p(x) = \frac{\pi^2}{2}(x - \pi)$;
9. a) $-5 + 10(x-2) + 21(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4$, b) $999805 + 29998(x-100) + 300(x-100)^2 + (x-100)^3$;
10. a) $1 + 2x + 2x^2$, b) $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5$, c) $x^3 - \frac{1}{2}x^5$, d) $x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4$, e) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6$;
12. 5; **12.** a) $x < 0{,}03162$ b) $x < 0{,}14424$.

2.6 Optimalizace

V praktických situacích se obvykle snažíme najít optimální řešení konkrétního problému – nejkratší, resp. nejrychlejší cestu, kterou se dostaneme na nějaké místo, tvar výrobku s ohledem na minimální spotřebu materiálu a podobně. I v řešení těchto problémů nám pomůže diferenciální počet; jak, to uvidíme v této kapitole.

Lokální extrémy

Definice 2.77. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 ***lokální maximum*** (resp. ***lokální minimum)***, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(x_0) \subset D_f$ tak, že

$$x \in \mathcal{U}(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(x_0) \;\; (\text{resp. } f(x) \geq f(x_0))\,.$$

Platí-li v uvedených nerovnostech pro $x \neq x_0$ jen znak ostré nerovnosti, má funkce v bodě x_0 ***ostré lokální maximum (minimum)***. Lokální maxima a minima nazýváme společným pojmem ***lokální extrémy.***

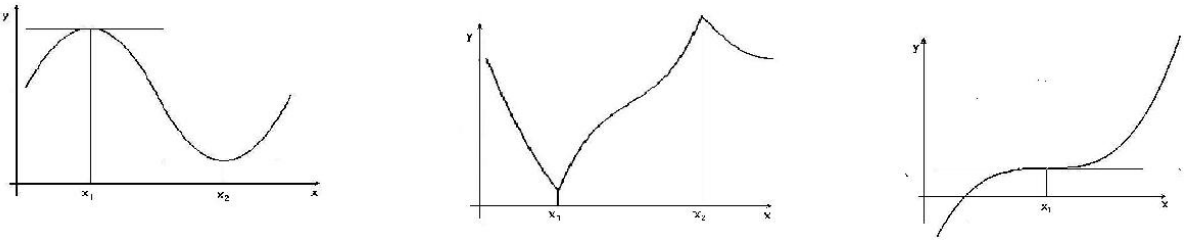
V praxi mají největší význam zpravidla ostré lokální extrémy, proto pod pojmem „lokální extrémy“ budeme v dalším výkladu rozumět ostré lokální extrémy; v případě neostrých extrémů na to přímo upozorníme.

Z definice lokálního extrému vyplývá: Má-li funkce f v bodě x_0 lokální maximum (minimum), potom zúžení funkce na jisté okolí $\mathcal{U}(x_0)$ má v x_0 největší (nejmenší) hodnotu. Je-li navíc funkce na $\mathcal{U}(x_0)$ diferencovatelná, musí podle Fermatovy věty platit $f'(x_0) = 0$. Může se ovšem stát, že funkce v bodě, ve kterém má lokální extrém, není diferencovatelná – například $|x|$ má jistě v bodě $x_0 = 0$ minimum (pouze zde nabývá hodnoty 0, ve všech bodech $x \neq 0$ je $|x| > 0 = |0|$), a přitom $|x|'$ v nule neexistuje. Proto platí následující věta:

Věta 2.78. **(Nutná podmínka pro lokální extrém)** *Jestliže funkce f má v bodě x_0 lokální extrém, potom $f'(x_0) = 0$ nebo $f'(x_0)$ neexistuje.*

Definice 2.79. Bod x_0, ve kterém je $f'(x_0) = 0$, se nazývá ***stacionární bod*** funkce f.

Z věty 2.78 vyplývá, že diferencovatelná funkce může mít extrém pouze ve stacionárním bodě, ale extrém zde mít nemusí; navíc extrém může nastat i v bodě, kde funkce není diferencovatelná. V obrázku 2.28 vidíme nalevo funkci, která má extrémy ve stacionárních bodech, uprostřed funkci, která má extrémy v bodech, kde derivace neexistuje, a napravo funkci, která ve stacionárním bodě extrém nemá.



Obr. 2.28: Stacionární body a extrémy

Věta 2.80. (Postačující podmínka pro lokální extrém ve stacionárním bodě) *Nechť funkce f má druhou derivaci ve svém stacionárním bodě x_0. Je-li $f''(x_0) > 0$, nastává v bodě x_0 lokální minimum, je-li $f''(x_0) < 0$, nastává v bodě x_0 lokální maximum.*

Naznačení důkazu, který plyne z Taylorovy věty, ukážeme v části Pro zájemce na konci kapitoly.

Příklad 2.81. Vyšetřeme lokální extrémy funkce $f: \ f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$.

Řešení.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9, \quad f''(x) = 6x + 6.$$

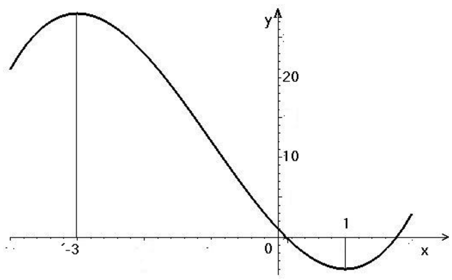
Stacionární body dostaneme z podmínky $f'(x) = 0$, tedy

$$3(x^2 + 2x - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1, \ x_2 = -3.$$

Protože $f''(1) = 12 > 0$, $f''(-3) = -12 < 0$, nastává v bodě $x_1 = 1$ lokální minimum a v bodě $x_2 = -3$ lokální maximum s hodnotami

$$f_{\min} = f(1) = -4, \quad f_{\max} = f(-3) = 28.$$

□



Obr. 2.29: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$.

V případě, že ve stacionárním bodě x_0 je $f''(x_0) = 0$, věta 2.80 o lokálním extrému nerozhodne. Je-li však f dostatečně mnohokrát diferencovatelná v bodě x_0, můžeme použít následující větu:

Věta 2.82. *Nechť ve stacionárním bodě x_0 funkce f je*

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{pro } k = 1, 2, ..., n-1,$$
$$f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Je-li n sudé, nastává v x_0 lokální extrém, a to lokální maximum (resp. minimum) pro $f^{(n)}(x_0) < 0$ (resp. $f^{(n)}(x_0) > 0$). Je-li n liché, extrém v x_0 nenastane.

Naznačení důkazu, který opět plyne z Taylorovy věty, ukážeme v části Pro zájemce na konci kapitoly.

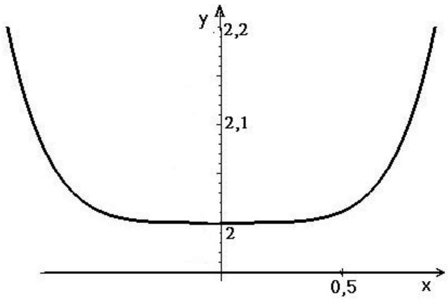
Příklad 2.83. Máme vyšetřit lokální extrémy funkce $f: f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{12}x^4 + 2$.

Řešení.

$$f'(x) = x^5 + \tfrac{1}{3}x^3, \; f''(x) = 5x^4 + x^2,$$

$$f'''(x) = 20x^3 + 2x, \; f^{(4)}(x) = 60x^2 + 2.$$

Stacionární body dostaneme z podmínky $x^3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) = 0$, tedy f má jediný stacionární bod $x = 0$.
$f''(0) = f'''(0) = 0, \; f^{(4)}(0) = 2 > 0$.
Protože nejnižší derivace, která je v bodě 0 různá od nuly je sudého řádu, nastává zde lokální extrém a to lokální minimum. □



Obr. 2.30: $f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{12}x^4 + 2$

Žádnou z postačujících podmínek pro extrém, které využívají derivací vyšších řádů, pochopitelně nemůžeme použít, když první derivace neexistuje. V tomto případě použijeme druhý důsledek Lagrangeovy věty - pro bod „podezřelý z extrému“ vyšetříme znaménko první derivace nalevo a napravo od tohoto bodu, čímž zjistíme, kde funkce roste a kde klesá a odtud je již jakost extrému i jeho existence zřejmá:

Příklad 2.84. Najděte lokální extrémy funkce $f(x) = (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$.

Řešení.

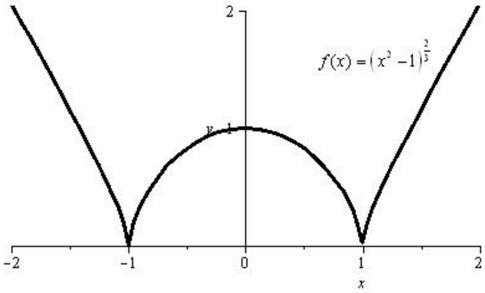
$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x = \frac{4}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{4}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x+1}}.$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x = 0, \quad f'(x) \quad \text{neex.} \quad \text{pro} \quad x = \pm 1.$$

□

Maplet pro výpočet lokálních extrémů funkcí najdete zde; intervaly, na kterých daná funkce roste a kde klesá se dají najít pomocí tohoto Mapletu.

Pro $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ je $f'(x) < 0$,
pro $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$ je $f'(x) > 0$,
tedy na $(-\infty, -1)$ a $(0, 1)$ funkce klesá,
na $(-1, 0)$ a $(1, \infty)$ funkce roste.
Odtud plyne, že pro $x = 0$ má funkce lokální maximum s hodnotou
$f_{max} = f(0) = 1$,
pro $x = \pm 1$ má lokální minima s hodnotou
$f_{min} = f(-1) = f(1) = 0$.



Obr. 2.31: $f(x) = (x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$

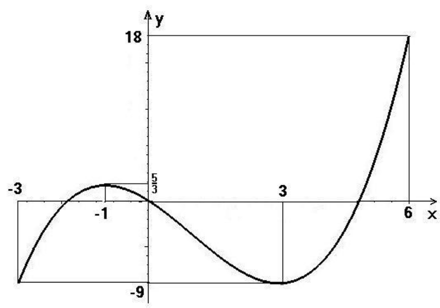
Absolutní (globální) extrémy

Weierstrassova věta zajišťuje existenci maxima a minima spojité funkce f na uzavřeném intervalu $\mathcal{J}$. Tyto hodnoty nazýváme ***největší*** a ***nejmenší hodnotou*** funkce f na dané množině neboli ***absolutními extrémy*** . Svých absolutních extrémů může funkce nabýt jak v krajních bodech intervalu $\mathcal{J}$, tak v jeho vnitřních bodech. Proto pro nalezení absolutních extrémů je třeba porovnat hodnoty funkce v bodech jejích lokálních extrémů a v krajních bodech intervalu $\mathcal{J}$.

Příklad 2.85. Máme najít absolutní extrémy funkce $f\,:\, f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$ na intervalu $\langle -3,\, 6\rangle$.

Řešení.

Daná funkce je na intervalu $\langle -3,\, 6\rangle$ spojitá a má na něm derivace f' a f''. Přitom je $f'(x) = x^2 - 2x - 3$, $f''(x) = 2x - 2$. Stacionární body funkce jsou $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Oba leží uvnitř intervalu $\langle -3,\, 6\rangle$. Protože $f''(-1) = -4 < 0$, má funkce f v bodě $x_1 = -1$ ostré lokální maximum s hodnotou $f(-1) = \frac{5}{3}$. Dále je $f''(3) = 4 > 0$, a proto má funkce f v bodě $x_2 = 3$ ostré lokální minimum s hodnotou $f(3) = -9$.



Obr. 2.32: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$ na $\langle -3,\, 6\rangle$.

Stanovíme hodnoty v krajních bodech intervalu: $f(-3) = -9$, $f(6) = 18$. Vidíme, že daná funkce f má na intervalu $\langle -3,\, 6\rangle$ absolutní maximum o hodnotě 18 v bodě 6 a absolutní minimum o hodnotě -9 v bodě -3 a v bodě 3. □

Na vyšetřování absolutních extrémů funkcí na intervalu vedou často i praktické úlohy – hledání optimální situace nějakého problému: nejmenší spotřeba materiálu, nejlevnější cena atd. V těchto situacích spočívá podstatná část úlohy v nalezení funkce, jejíž extrém se má najít, a intervalu, na kterém se má extrém hledat – tedy ve formalizaci úlohy:

Formalizaci slovní úlohy na extrém tvoří funkce, jejíž maximum (resp. minimum) hledáme, tzv. ***účelová funkce***, a podmnožina definičního oboru této funkce, na které se má extrém realizovat.

Příklad 2.86. Letenka na vyhlídkový let stojí 100 Kč, jestliže se letu účastní od padesáti do sta pasažérů; za každou prodanou letenku nad sto se cena letenky (pro všechny pasažéry) snižuje o 50 hal. Letadlo má kapacitu 200 míst. Při jakém počtu pasažérů má letecká společnost největší zisk?

Řešení. Počet pasažérů označíme jako x, zřejmě je $x \in \langle 50, 200\rangle$. Najdeme nejdříve funkci, která vyjadřuje cenu letenky v případě, kdy pasažérů je více než sto:

Je-li x počet pasažérů, je $x - 100$ počet pasažérů nad 100 a cena letenky se snižuje o $(x - 100) \cdot 0{,}5$ Kč. Cena leteky je tedy v tomto případě rovna $100 - (x - 100)/2$ Kč.

Nyní můžeme sestavit funkci, která vyjadřuje celkový zisk společnosti v závislosti na počtu účastníků letu, tedy formalizovat úlohu:

$$f(x) = \begin{cases} 100x & \text{pro } x \in \langle 50, 100\rangle \\ \left(150 - \frac{x}{2}\right) x & \text{pro } x \in (100, 200\rangle \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad max.$$

Poznamenejme, že funkce f je pro $x = 100$ (tedy na celém definičnín oboru) spojitá. Určíme první derivaci:

$$f'(x) = \begin{cases} 100 & \text{pro } x \in (50, 100) \\ \text{neex.} & \text{pro } x = 100 \\ 150 - x & \text{pro } x \in (100, 200) \end{cases}$$

Funkce může mít absolutní maximum v bodech, ve kterých je první derivace nulová, nebo kde neexistuje; k ověření existence maxima použijeme znaménko 1. derivace:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\quad \text{pro } x = 150, \\ f'(x) > 0 &\quad \text{pro } x \in (50, 100) \text{ a } x \in (100, 150), \\ f'(x) < 0 &\quad \text{pro } x \in (150, 200). \end{aligned}$$

Účelová funkce tedy roste pro $x \in (50, 150)$ a klesá pro $x \in (150, 200)$, tj. má absolutní maximum pro $x = 150$ a toto maximum má hodnotu

$$\text{největší zisk } = f(150) = 150^2 - \frac{1}{2}150^2 = 11250.$$

Poznamenejme, že absolutního minima nabude v některém krajním bodě intervalu:

$$f(50) = 5000, \quad f(200) = 150 \cdot 200 - \frac{1}{2}200^2 = 10000;$$

nejmenší zisk dosáhne letecká společnost při padesáti pasažérech. □

Příklad 2.87. Máme najít rozměry uzavřené plechové konzervy tvaru rotačního válce, která má daný objem V tak, aby hmotnost obalu (při konstantní dané tloušťce plechu, ze kterého je vyrobena) byla co nejmenší.

Řešení. Označíme r poloměr a h výšku konzervy. Její objem je $V = \pi r^2 h$. Rozměry budou z hlediska hmotnosti obalu nejvýhodnější, jestliže povrch konzervy $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ bude při daném objemu co nejmenší. Vidíme, že povrch S je funkcí dvou proměnných r a h. Ze vzorce pro objem plyne pro výšku $h = V/(\pi r^2)$. Po dosazení do vzorce pro povrch dostaneme

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Tím je vyjádřen povrch S jako funkce jedné proměnné r.

Formalizace úlohy:

$$\begin{array}{ll} S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} & \longrightarrow \quad min, \\ r \in (0, \infty). & \end{array}$$

(Interval, na kterém extrém hledáme, je otevřený. Obecně se tedy může stát, že maximum nebo minimum neexistuje.)
Najdeme stacionární body účelové funkce:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}.$$

Řešením rovnice $4\pi r^3 - 2V = 0$ zjistíme, že jediným stacionárním bodem je bod

$$r_o = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Dále je

$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}r^2} = 4\pi + \frac{4V}{r^3}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}r^2}\Big|_{r=r_o} = 12\pi > 0$$

– funkce S tedy má na intervalu $(0, \infty)$ nejmenší hodnotu právě v bodě r_o. Příslušná výška pro tento poloměr je

$$h_o = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r_o.$$

Vidíme, že osový řez konzervy je čtverec.

Připomeňme, že jsme účelovou funkci vyšetřovali na otevřeném intervalu $r \in (0, \infty)$; (jednostranné) limity v krajních bodech jsou nevlastní – svého maxima funkce nenabude, roste nad libovolnou mez.

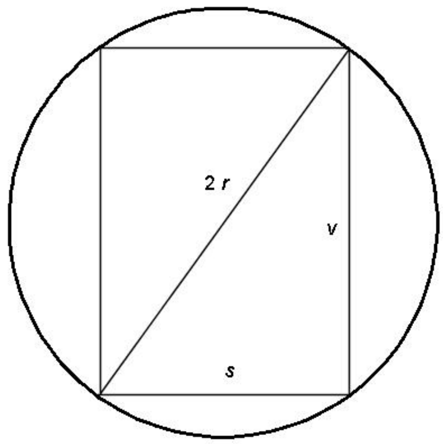
□

Příklad 2.88. Z válcovitého kmenu s kruhovým průřezem o poloměru r se má vytesat trám co největší nostnosti. Nosnost trámu je určena vztahem $y = k \cdot s \cdot v^2$, kde k je materiálová konstanta daného druhu dřeva, s je šířka a v výška průřezu trámu. Jaké rozměry má mít trám, aby jeho nosnost byla maximální?

Řešení.

Vztah pro nosnost je závislý na dvou proměnných s a v; jedinou známou hodnotou v zadání je r – pomocí něj a jedné proměnné vyjádříme druhou. Průřezem trámu bude zřejmě obdélník (viz obr. vlevo) a z Pythagorovy věty dostáváme $v^2 = 4r^2s^2$. Můžeme dosadit do vztahu pro nosnost a dostáváme

$$y = k \cdot s \cdot (4r^2 - s^2).$$



Obr. 2.33: Průřez trámem

Formalizace úlohy:

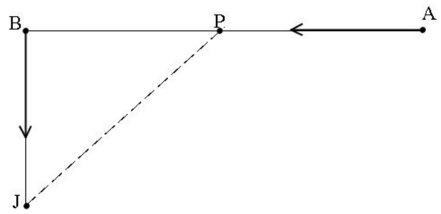
$$y(s) = k \cdot (4sr^2 - s^3) \qquad \longrightarrow \qquad max,$$
$$s \in (0, 2r).$$

Hledáme stacionární body účelové funkce:
$y' = k(4r^2 - 3s^2)$, $y' = 0$ pro $s = 2r\sqrt{\frac{k}{3}}$ (záporná hodnota nevyhovuje podmínce). Pomocí druhé derivace ověříme, zda ve stacionárním bodě nastane skutečně maximum účelové funkce:
$y'' = -6k \cdot s < 0$ pro všechna, tedy i pro nalezené s - nosnost trámu je pro toto s největší.

Ještě vypočítáme druhý rozměr trámu: $v = 2r\sqrt{1 - \frac{k}{3}}$.

$\square$

Příklad 2.89. Přístavy A, B jsou od sebe vzdáleny 145 km. Z přístavu A vyjede parník a současně ve stejném okamžiku vyjede z přístavy B jachta (ve směrech určených šipkami). Jejich rychlosti jsou stálé, a to pro parník $v_p = 40km/h$, pro jachtu $v_j = 16km/h$. Na jakou nejmenší vzdálenost se k sobě během plavby přiblíží?



Obr. 2.33: Parník a jachta

Řešení. Nechť P značí polohu parníku a J polohu jachty v čase t. Pak pro délky drah parníku $\overline{AP}$ a jachty $\overline{BJ}$ v tomto čase platí

$$\overline{AP} = 40 \cdot t\, km, \qquad \overline{BJ} = 16 \cdot t\, km.$$

Pro vzdálenost $\overline{PJ}$ v tomto čase (v kilometrech) podle Pythagorovy věty platí

$$\overline{PJ} = \sqrt{\overline{BP}^2 + \overline{BJ}^2}.$$

Odtud

$$\overline{PJ} = \sqrt{1856\, t^2 - 11666\, t + 21025}.$$

Tato odmocnina nabude nejmenší hodnoty při stejném t jako výraz pod odmocninou.

Formalizace úlohy:

$$f(t) = 1856\, t^2 - 11666\, t + 21025 \qquad \longrightarrow \qquad min,$$
$$t \in (0, \infty).$$

Hledáme stacionární body účelové funkce:

$$f'(t) = 3712\, t - 11600, \quad f'(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t_0 = \frac{11600}{3712} = 3,125(\text{hodin});$$

pomocí druhé derivace se přesvědčíme, že zde má účelová funkce minimum:

$$f''(t) = 3712 > 0.$$

Určíme vzdálenost plavidel v tomto čase:

$$\sqrt{f(t_0)} = 10\sqrt{29} \doteq 53,85(km).$$

Parník a jachta budou mít nejmenší vzdálenost $53,85 km$ za 3 hodiny 7 minut a 30 sekund od vyplutí. $\square$

Shrnutí

V kapitole o optimalizaci jsme se věnovali důležitému praktickému problému – nalezení optimální hodnoty funkce. Definovali jsme:

- lokální maximum (resp. minimum) funkce: největší (resp. nejmenší) hodnota, které funkce nabývá na jistém intervalu,
- lokální extrém: lokální maximum nebo minimum,
- absolutní nebo globální maximum (resp. minimum) funkce na množině M: největší (resp. nejmenší) hodnota, které funkce nabývá na množině M;

ukázali jsme, jak nalezneme body, ve kterých může nastat lokální extrém, a jak rozhodnout, zda extrém skutečně nastane:

- nutná podmínka pro lokální extrém: má-li f v bodě x_0 lokální extrém, je buď $f'(x_0) = 0$ (tedy x_0 je stacionární bod funkce f), nebo $f'(x_0)$ neexistuje,
- postačující podmínka pro lokální maximum (resp. minimum): $f''(x_0) < 0$ (resp. $f''(x_0) > 0$) ve stacionárním bodě funkce f,
- jiná postačující podmínka pro lokální maximum (resp. minimum): pro $x < x_0$ funkce f roste a zároveň pro $x > x_0$ klesá (resp. pro $x < x_0$ funkce f klesá a zároveň pro $x > x_0$ funkce f roste),

při hledání globálních extrémů funkce na intervalu je třeba nalézt všechny body lokálních extrémů funkce a funkční hodnoty v nich porovnat s hodnotami v krajních bodech intervalu; největší z těchto hodnot je globální maximum, nejmenší je globální minimum;

ukázali jsme postup řešení praktických optimalizačních úloh, který spočívá

- v formalizaci úlohy, tj. v sestavení účelové funkce a nalezení oboru, na kterém se optimum hledá,
- v nalezení (absolutních) extrémů účelové funkce na nalezeném oboru.

Otázky a úkoly

1. Kdy řekneme, že funkce f má v bodě x_0 lokální maximum (minimum)?
2. Co je to stacionární bod funkce?
3. Jaká je nutná podmínka pro lokální extrém?

4. Jak zjistíme, zda ve stacionárním bodě funkce nastane extrém?

5. Jak zjistíme, zda v bodě, ve kterém funkce nemá derivaci, nastane extrém?

6. Co jsou to absolutní (globální) extrémy funkce na intervalu?

7. Načrtněte grafy funkcí, pro které platí:

   a) absolutní maximum funkce f na intervalu $\langle -2,\, 2\rangle$ je rovno 3 a absolutní minimum neexistuje,
   b) absolutní maximum funkce f na intervalu $(-2,\, 2)$ neexistuje a absolutní minimum je rovno 2,
   c) absolutní maximum funkce f na intervalu $(-2,\, 2)$ je rovno 4 a absolutní minimum je rovno 2,
   d) absolutní maximum funkce f na intervalu $\langle -2,\, 2\rangle$ neexistuje a absolutní minimum neexistuje;

8. Musí platit,že mezi libovolnými dvěma lokálními maximy funkce (body, ve kterých nastane lokální maximum funkce) leží vždy bod, ve kterém má tato funkce lokální minimum? Jestliže ne, uveďte protipříklad a podmínky, za kterých tvrzení platí.

9. Uvažujme funkce f_c tvaru $f_c(x) = x^3 + cx + 1$, kde c je konstanta. Kolik lokálních extrémů a jakých (v závislosti na c) může funkce tohoto typu mít?

10. Zjistěte, zda derivace každé monotonní funkce musí být monotonní. Jako příklad zvolte funkci $f(x) = x + \sin x$.

11. Načrtněte grafy funkcí s následujícími vlastnostmi:

    a) $f(0) = 1,\ f(2) = 5,\ f'(x) < 0$ pro $x < 0 \vee x > 2,\ f'(x) > 0$ pro $0 < x < 2$,
    b) $f(-1) = 1,\ f(2) = 5,\ f'(x) < 0$ pro $x < -1 \vee x > 2,\ f'(x) > 0$ pro $-1 < x < 2,\ f'(-1) = 0,\ f'(0)$ neexistuje,
    c) $f(3) = 0,\ f'(x) < 0$ pro $x < 0 \vee x > 3,\ f'(x) > 0$ pro $0 < x < 3,\ f'(3) = 0,\ f(0)$ a $f'(0)$ neexistuje,
    d) $f(1) = 0,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2,\ f'(x) < 0$ pro $x < 1,\ f'(x) > 0$ pro $x > 1,\ f'(1) = 0$.

Cvičení

1. Najděte všechny intervaly největší délky, na kterých jsou následující funkce ryze monotonní:

a)	$f(x) = x^3 - x,$	*b*)	$f(x) = x^5 - 15x^3 + 3,$
c)	$f(x) = \frac{x}{1+x^2},$	*d*)	$f(x) = \lvert x+1 \rvert + \lvert x-1 \rvert,$
e)	$f(x) = \frac{4}{x} + \frac{1}{1-x},$	*f*)	$f(x) = x + \frac{x}{x^2-1},$
g)	$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2},$	*h*)	$f(x) = x^2 - 1 + \lvert x^2 - 1 \rvert,$
i)	$f(x) = x^{2/3} - (x^2-1)^{1/3},$	*j*)	$fx = \frac{x-3}{\sqrt{1+x^2}},$
k)	$f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x + 2x,$	*l*)	$f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x,$
m)	$f(x) = \ln\sqrt{1+x^2},$	*n*)	$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$

2. Stavovou rovnici reálného plynu je možno popsat van der Waalsovou rovnicí

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{v^2}$$

kde p je tlak, V objem plynu, R plynová konstanta, T teplota v K a a, b jsou konstanty charakterizující příslušný plyn. Dokažte, že pro teplotu $T > T_k$, kde T_k je kritická teplota $T_k = 8a/27bR$, je tlak klesající funkcí objemu V.

3. Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

a)	$f(x) = x^2(x-6),$	*b*)	$f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 27x - 7,$
c)	$f(x) = -x^4 - 2x^2 + 3,$	*d*)	$f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3,$
e)	$f(x) = x - \frac{1}{x},$	*f*)	$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^3},$
g)	$f(x) = x + \frac{2x}{1+x^2},$	*h*)	$f(x) = \frac{10}{4x^3-9x^2+6x},$
i)	$f(x) = x^3 + 2\lvert x \rvert,$	*j*)	$f(x) = 1 + \sqrt{\lvert x \rvert},$
k)	$f(x) = \sqrt{6x - x^2},$	*l*)	$f(x) = (x^2-1)^{2/3},$
m)	$f(x) = \sin x + \cos x,$	*n*)	$f(x) = 4x - \operatorname{tg} x,$
o)	$f(x) = x^2 e^{-x},$	*p*)	$f(x) = e^{-x}\sin x,$
q)	$f(x) = \frac{x}{\ln x},$	*r*)	$f(x) = x - \ln(1+x).$

4. Najděte absolutní extrémy daných funkcí na daných intervalech:

$$\begin{array}{lll} a) & f(x) = x^2 - 6x + 10, & \langle -1, 5\rangle, \\ b) & f(x) = x^3 - 3x + 20, & \langle -3, 3\rangle, \\ c) & f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^2 + 1, & \langle -2, 1\rangle, \\ d) & f(x) = |x^2 - 6x + 5|, & \langle -5, 5\rangle, \\ e) & f(x) = x + \frac{1}{x-1}, & \langle -4, 0\rangle, \\ f) & f(x) = x + \frac{2x}{x^2-1}, & \langle 1{,}01,\ 2\rangle. \end{array}$$

5. Číslo 28 rozložte na dva sčítance tak, aby jejich součin byl největší.

6. Najděte takové kladné číslo, aby součet tohoto čísla a jeho převrácené hodnoty byl nejmenší.

7. Jsou dány čísla a, $s\,(0 < a < s)$. Mezi všemi trojúhelníky, které mají obvod $2s$ a stranu a, najděte trojúhelník s největším obsahem.

8. Jaké rozměry musí mít pravoúhlý rovnoběžník daného obvodu s, aby jeho úhlopříčka byla nejmenší?

9. Dokažte, že ze všech obdélníků daného obsahu má čtverec nejmenší obvod.

10. Dokažte, že ze všech obdélníků daného obvodu má čtverec největší obsah.

11. Na parabole $y = 4x - x^2$ najděte bod, který je nejblíže k bodu $A = [-1, 4]$.

12. Drát délky a máme rozdělit na dvě části, ze kterých první ohneme do tvaru čtverce a druhou do tvaru kruhu. Kde je třeba udělat řez, aby součet obsahů kruhu a čtverce byl největší?

13. Karton tvaru obdélníka má rozměry 60 cm $\times$28 cm. V rozích nastřihneme čtverce a zbytek ohneme do otevřené krabice. Jak velká má být strana nastřihnutých čtverců, aby objem krabice byl největší?

14. Muž v loďce je vzdálený 9,5 km od pobřeží v bodě C. Chce se dostat do místa A na pobřeží, které je od něj vzdálené 16 km. Umí veslovat rychlostí 3,2 km/h a jít rychlostí 6,4 km/h. Zjistěte, kde se musí vylodit, aby dosáhl bodu A v nejkratším čase a jak dlouho mu to potrvá.

15. Parník pohybující se rovnoměrně rychlostí v (v km/h) spotřebuje za hodinu $0{,}3 + 0{,}000\,02v^3$ nafty (v m^3). Jakou rychlostí se má pohybovat, aby na dané dráze spotřeboval co nejméně nafty?

Výsledky

1. a) $(-\infty,-1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3},\infty)$ roste, $(-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$ klesá, b) $(-\infty,-3)$, $(3,\infty)$ roste, $(-3,3)$ klesá, c) $(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$ klesá, $(-1,1)$ roste, d) $(-\infty,-1)$ klesá, $(1,\infty)$ roste, e) $(-\infty,0)$, $(0,2/3)$, $(2,\infty)$ klesá, $(2/3,1)$, $(1,2)$ roste, f) $(-\infty,--\sqrt{3})$, $(\sqrt{3},\infty)$ roste, $(-\sqrt{3},-1)$, $(-1,1)$, $(1,\sqrt{3})$ klesá, g) $(-\infty,-5)$, $(-1,\infty)$ roste, $(-5,-1)$ kleá, h) $(-\infty,-1)$ klesá, $(1,\infty)$ roste, i) $(-\infty,-1/\sqrt{2})$, $(0,1/\sqrt{2})$ roste, $(-1/\sqrt{@},0)$, $(1/\sqrt{2},\infty)$ klesá, j) $(-1/3,\infty)$ roste, $(-\infty,-1/3)$ klesá, k) $(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)$, $(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}+2k\pi)$, $(\pi\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi)k$ je celé číslo, roste, $(\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}+2k\pi,\pi++\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi)$, k je celé číslo, klesá, l) $(2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi)$, $(\pi+2k\pi,\frac{4\pi}{3}+2k\pi)$, k celé číslo, klesá, $(\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\pi++2k\pi)$, $(\frac{4\pi}{3}+2k\pi,2\pi+2k\pi)$, k celé číslo, roste, m) $(-\infty,-1)$, $(0,\infty)$ roste, n) $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ roste;

3. a) max. 0 v $x=0$, min. -32 v $x=4$, b) neex., c) max. 3 v $x=0$, d) max. 0 v $x=1$, min. $\doteq -0{,}05$ v $x=(5+\sqrt{13})/6$, min. $\doteq -0{,}76$ v $x=(5-\sqrt{13})/6$, e) neex., f) min. $\sqrt[5]{24^2}-8/\sqrt[5]{24^3}$ v $x=\sqrt[5]{24}$, g) neex., h) max. 10 v $x=1$, min. 8 v $x=1/2$, i) max. 0 v $x=0$, min. $-4\sqrt{2}/3\sqrt{3}$ v $x=\sqrt{2/3}$, j) min. 1 v $x=0$, k) max. 3 v $x=3$, l) max. 1 v $x=0$, min. 0 v $x=-1$ a v $x=1$, m) max. $\sqrt{2}$ v $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, k celé, min. $-\sqrt{2}$ v $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$, k celé, n) min. $4(\frac{\pi}{3}+k\pi)-\sqrt{3}$ v $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$, k celé, max. $4(\frac{2\pi}{3}+k\pi)+\sqrt{3}$ v $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi$, k celé, o) min. 0 v $x=0$, max. $4e^{-2}$ v $x=2$, p) max. $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4+2k\pi}$ v $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, min. $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-5\pi/4+2k\pi}$ v $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$, q) min.e v $x=e$, r) min. 0 v $x=0$;

4. a) max.17 v $x=-1$, min. 1 v $x=3$, b) min. 2 v $x=-3$, max. 38 v $x=3$, c) min. -151 v $x=-2$, max. 2 v $x=1$, d) max. 60 v $x=-5$, min. 0 v $x=1$, e) max. -1 v $x=0$, min. $-19/5$ v $x=-4$, f) max. $\doteq 101{,}5$ v $x=1{,}01$, min. $10/3$ v $x=2$;

5. 14, 14;

6. 1;

7. rovnoramenný trojúhelník se stranami a, $s-a/2$, $s-a/2$;

8. $a=s/4$, $b=s/4$;

11. $[1,3]$;

12. $x=4a/(\pi+4)$;

13. 6;

14. 6,464 km od A, 4,39 h;

15. 19,57 km/h.

2.7 Průběh funkce

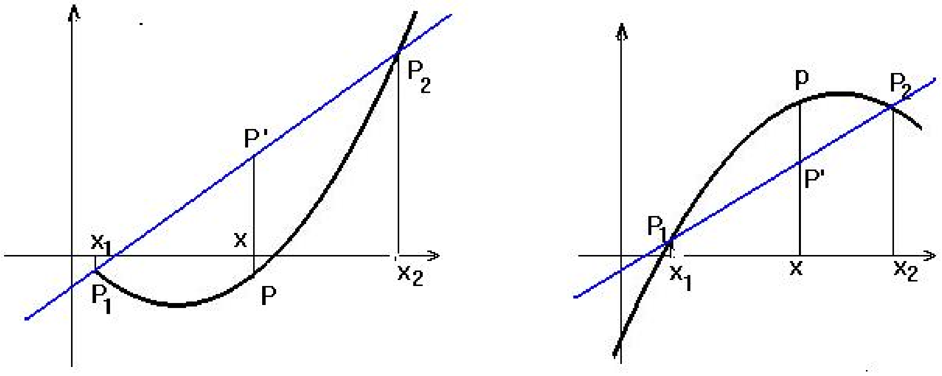
Závěrem kapitoly o diferenciálním počtu ukážeme, jak výpočtem (pomocí limit a derivací) získáme dostatek informací pro představu, jak vypadá graf zadané funkce – budeme zkoumat její průběh.

V předchozím textu jsme pro naše výpočty používali limit a prvních derivací; nyní si všimneme, co nám o chování funkce řekne druhá derivace:

Konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body

Definice 2.90. Funkce f, definovaná na $\mathcal{J}\subset\mathbb{R}$ se nazývá ***konvexní*** (resp. ***konkávní***) na $\mathcal{J}$, má-li tuto vlastnost:
Jsou-li x_1, x, $x_2\in\mathcal{J}$ libovolné tři body takové, že $x_1<x<x_2$, potom bod $P=[x,f(x)]$ leží buď pod (resp. nad) přímkou P_1P_2, kde $P_1=[x_1,f(x_1)]$, $P_2=[x_2,f(x_2)]$

Myšlenka definice je znázorněna v obr. 2.34, kde je nalevo konvexní a napravo konkávní funkce.



Obr. 2.34: Konvexní a konkávní funkce

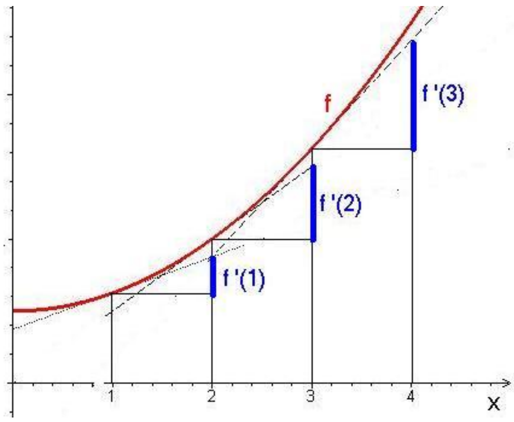
Pro diferencovatelnou funkci je možno použít jednodušší definici: Funkce f je v intervalu $\mathcal{J}$ konvexní (resp. konkávní), leží-li graf funkce pro $x \in \mathcal{J}$ nad (resp. pod) tečnou, vedenou k tomuto grafu libovolným bodem $[x, f(x)]$, $x \in \mathcal{J}$.

Pro vyšetřování konvexnosti je důležitá následující (dost názorná) věta, jejíž pravdivost demonstrujeme v sousedním obrázku:

Věta 2.91. *Nechť funkce f je spojitá na $\mathcal{J}$ a diferencovatelná na $\mathcal{J}_0$. Potom*

a) *f je konvexní na $\mathcal{J}$, právě když f' roste na $\mathcal{J}_0$,*

b) *f je konkávní na $\mathcal{J}$, právě když f' klesá na $\mathcal{J}_0$.*



Obr. 2.35: f konvexní – f' roste

Z vět 2.91 a 3 bezprostředně plyne

Věta 2.92. *Nechť funkce f je dvakrát diferencovatelná na $\mathcal{J}$. Potom f je na $\mathcal{J}$ konvexní (resp. konkávní), právě když $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$) na $\mathcal{J}_0$, přičemž není $f''(x) = 0$ na žádném podintervalu intervalu $\mathcal{J}$.*

Definice 2.93. Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě x_0. Řekneme, že f má v bodě x_0 ***inflexi*** a bod x_0 nazveme ***inflexním bodem*** funkce f, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ tak, že f je konvexní na intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ a konkávní na intervalu $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, nebo je f konkávní na intervalu $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ a konvexní na intervalu $(x_0, x_0 + \varepsilon)$.

Z vět 2.78 a 2.91 plyne

Věta 2.95. **(Nutná podmínka pro inflexi)** *Je-li x_0 inflexním bodem funkce f, potom buď $f''(x_0) = 0$, nebo $f''(x_0)$ neexistuje.*

Příklad 2.94. Funkce

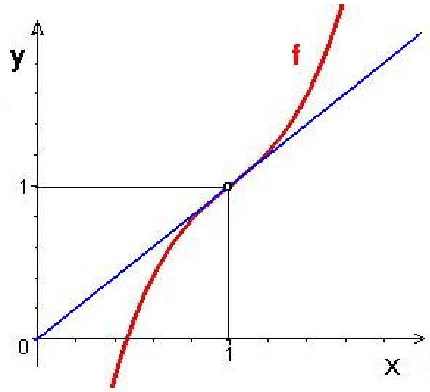
$$f : f(x) = 3(x-1)^3 + x$$

má inflexi v bodě $x_0 = 1$ – viz obr. 2.36:

$f'(x) = 9(x-1)^2 + 1, \quad f''(x) = 18(x-1).$

Pro $x > 1$ je $f''(x) > 0$ a f je konvexní,

pro $x < 1$ je $f''(x) < 0$ a f je konkávní.



Obr. 2.36: $f(x) = 3(x-1)^3 + x$

Analogicky jako u lokálních extrémů platí

Věta 2.96. (Postačující podmínka pro inflexi) *Nechť*

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{pro } k = 2, 3, ..., n-1, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Je-li n liché, potom x_0 je inflexní bod funkce f, je-li n sudé, v x_0 inflexe nenastane.

Příklad 2.97. Máme najít inflexní body funkce $f : f(x) = e^{-x^2} + 2x$.

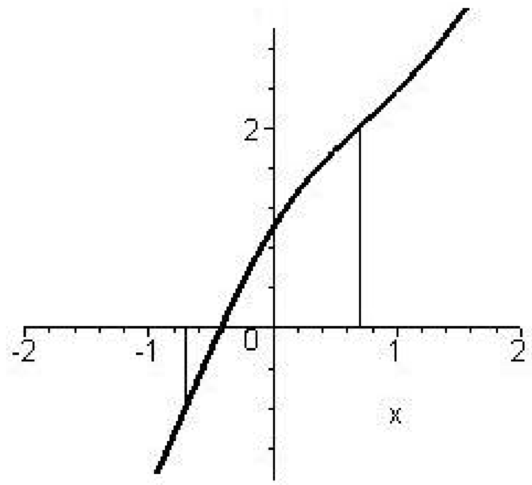
Řešení. $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$;
$f''(x) = 0 \iff 2x^2 - 1 = 0$;

Této podmínce vyhovují body
$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dále je $f'''(x) = -4e^{-x^2}(2x^3 - 3x)$,
$f'''(x_1) = 4\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$,
$f'''(x_2) = -4\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$.

Proto $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ jsou inflexní body funkce f.

□



Obr. 2.37: $f(x) = e^{-x^2} + 2x$

Pro nalelezení inflexních bodů a intervalů, kde je funkce konvexní a kde konkávní, lze použít tento Maplet.

Vyšetření průběhu funkce

Vyšetřit průběh funkce znamená získat dostatek informací o nejvýznamnějších jejích vlastnostech zmíněných v předchozím textu: Kromě určení oboru definice, bodů nespojitosti, nulových bodů a určení významných limit se jedná hlavně o určení intervalů monotonie, lokálních a absolutních extrémů, intervalů konvexnosti a konkávnosti, inflexních bodů, asymptot a konečně o načrtnutí grafu funkce.

Postupujeme obvykle podle tohoto schematu:

I. (a) Definiční obor D_f funkce f.

(b) Body nespojitosti; intervaly spojitosti.

(c) Průsečíky se souřadnými osami.

(d) Symetrie grafu funkce (sudá, lichá), periodičnost funkce.

(e) Chování funkce v okolí bodů nespojitosti a svislé asymptoty.

(f) Chování v nekonečnu, asymptoty se směrnicí.

II. Intervaly monotónnosti; body extrému a extrémy.

III. Intervaly konvexnosti a konkávnosti; inflexní body.

Příklad 2.98. Vyšetříme průběh funkcí

a) $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$ *b)* $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$ *c)* $f(x) = x\, e^{1/x}$

Řešení.

a) **I.** (a) $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$: Definiční obor $D_f = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$.

(b) Body nespojitosti; intervaly spojitosti – ve svém definičním oboru je funkce spojitá.

(c) $f(x) = 0$ pro $x = 0$.

(d) Funkce je lichá: $f(-x) = \frac{(-x)^3}{4-(-x)^2} = -\frac{x^3}{4-x^2} = -f(x)$.
Graf funkce f je tedy souměrný podle počátku a budeme ji vyšetřovat pouze na množině $\langle 0, 2) \cup (2, \infty)$.

(e) Chování funkce v okolí bodů nespojitosti a vertikální asymptoty:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3}{x+2} \cdot \frac{1}{2-x} = 2 \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2-x} = \left[2 \cdot \frac{1}{0^+}\right] = \infty,$$

analogicky

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3}{x+2} \cdot \frac{1}{2-x} = 2 \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{2-x} = \left[2 \cdot \frac{1}{0^-}\right] = -\infty.$$

Funkce f tedy má v bodě $x = 2$ (a také v bodě $x = -2$) svislou asymptotu.

(f) Chování v nekonečnu, asymptoty se směrnicí:

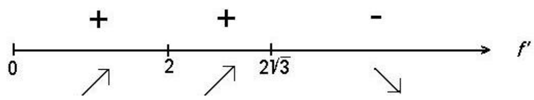
$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{4}{x^2}-1} = -1,$$
$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - a\,x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{4-x^2} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{4-x^2} = |\text{L'H pravidlo}| = 0.$$

Šikmá asymptota pro $x \to \infty$ je tedy přímka $\underline{y = -x.}$

II. Intervaly monotónnosti; body extrému a extrémy. Pro $x \geq 0$ platí:

$$f'(x) = \frac{3x^2(4-x^2) - (-2x)x^3}{(4-x^2)^2} = \frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2}$$

$f'(x) = 0$ pro $x = 0$ a $x = 2\sqrt{3}$, derivace neexistuje v bodě $x = 2$(pochopitelně, není tam definovaná). Vyšetříme znaménko derivace; nakreslíme na číselné ose body, ve kterých může derivace f' funkce f měnit znaménko a nad číselnou osu příslušná znaménka. Pod osou vyznačíme, kde funkce f roste a kde klesá:



Obr. 2.38: Znaménko derivace funkce $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$

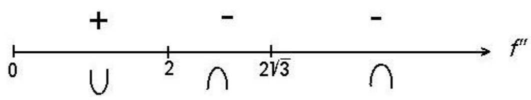
Vidíme, že funkce f má maximum v bodě $x = 2\sqrt{3}$.
Jeho hodnota je $f(2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$.

III. Intervaly konvexnosti a konkávnosti; inflexní body.

$$f''(x) = \frac{(24x - 4x^3)(4-x^2)^2 - 2(4-x^2)(-2x)(12x^2 - x^4)}{(4-x^2)^4} = \frac{8x(12+x^2)}{(4-x^2)^3}.$$

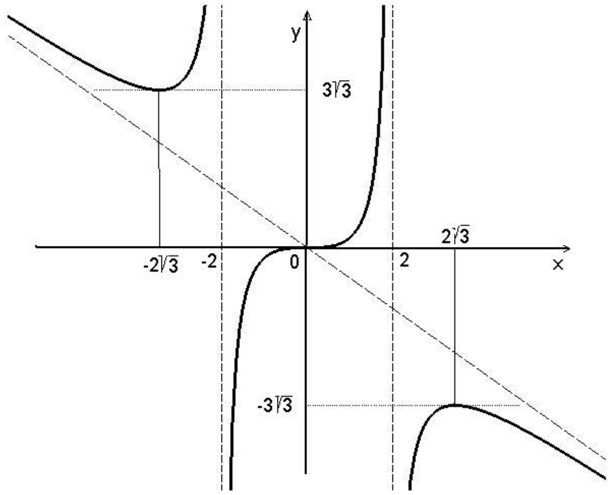
$f''(x) = 0$ pro $x = 0$; z lichosti funkce f plyne, že je to inflexní bod.

Vyšetříme znaménko druhé derivace; nakreslíme na číselné ose body, ve kterých může druhá derivace f'' měnit znaménko a nad číselnou osu příslušná znaménka. Pod osou vyznačíme, kde je funkce f konvexní a kde konkávní:



Obr. 2.39: Znaménko druhé derivace funkce $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$

Závěrem, s využitím všech získaných vlastností funkce f, načrtneme její graf (pro $x < 0$ využijeme symetrie podle počátku):



Obr. 2.40: Graf funkce $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$

b) **I.** (a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$: Definiční obor $D_f = \mathbb{R}$,

(b) funkce f je spojitá na celém $\mathbb{R}$.

(c) Průsečíky se souřadnými osami:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2}(1 - \sqrt[3]{x}) = 0: \quad f^{-1}(\{0\}) = \{0, 1\}.$$

(d) Funkce není ani sudá, ani lichá, ani periodická.

(e) Funkce nemá svislé asymptoty

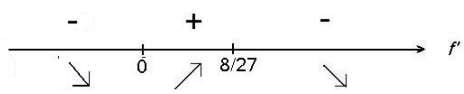
(f) Chování v nekonečnu, asymptoty se směrnicí:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\tfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1\right) = -1,$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2} = \infty,$$

funkce nemá asymptoty.

II. Intervaly monotónnosti; body extrému a extrémy:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{2 - 3\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x}};\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{27};\quad f' \text{ neexistuje pro } x = 0.$$



Obr. 2.41: Znaménko derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$

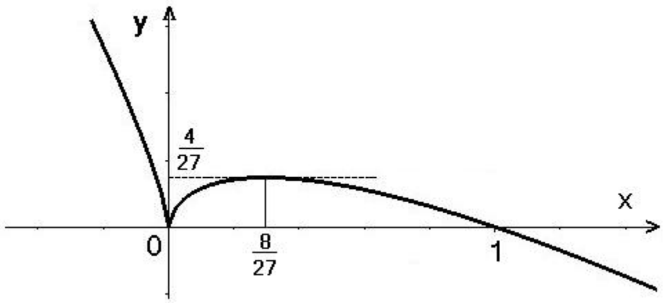
V bodě $x = 0$ má funkce lokální minimum se svislou polotečnou ($\lim\limits_{x\to0_-} f'(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to0_+} f'(x) = \infty$), přičemž $f(0) = 0$, a v bodě $x = \frac{8}{27}$ lokální maximum s derivací nulovou, přičemž $f(\frac{8}{27}) = \frac{4}{27}$.

III. Intervaly konvexnosti a konkávnosti, inflexní body:

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} < 0 \ \forall x,\ x \neq 0.$$

Funkce f je tedy konkávní pro $x < 0$ i pro $x > 0$.

Nakreslíme graf:



Obr. 2.42: Graf funkce $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$

c) **I.** (a) $f(x) = x\,e^{1/x}$: Definiční obor $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

(b) Na svém definičním oboru je funkce f spojitá, je nespojitá pro $x = 0$.

(c) Průsečíky se souřadnými osami funkce nemá; pro $x = 0$ má nulovou jednostrannou limitu zleva.

(d) Funkce není ani sudá, ani lichá, ani periodická.

(e) Chování funkce v okolí bodů nespojitosti a svislé asymptoty:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = |\text{L'H pravidlo}| = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty,$$
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$

Funkce má svislou asymptotu v bodě $x = 0$; asymptota je jednostranná – pouze zprava, funkce zde má nespojitost druhého druhu.

(f) Chování v nekonečnu, asymptoty se směrnicí:

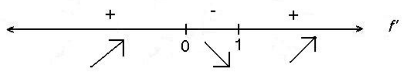
$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1,$$
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\pm\infty} (xe^{\frac{1}{x}} - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = |\text{L'H pravidlo}| = 1.$$

Funkce má šikmou asymptotu o rovnici $\underline{y = x + 1}$.

II. Intervaly monotónnosti, body extrému a extrémy:

$$f'(x) = \frac{x-1}{x}e^{\frac{1}{x}}; \quad f'(x) = 0 \text{ pro } x = 1, \quad f' \text{ neex. pro } x = 0\,(\notin D_f).$$

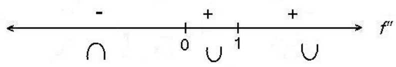
Funkce má lokální minimum v bodě $x = 1$ s hodnotou $f(1) = e$.



Obr. 2.43: Znaménko derivace funkce $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

III. Intervaly konvexnosti a konkávnosti; inflexní body:

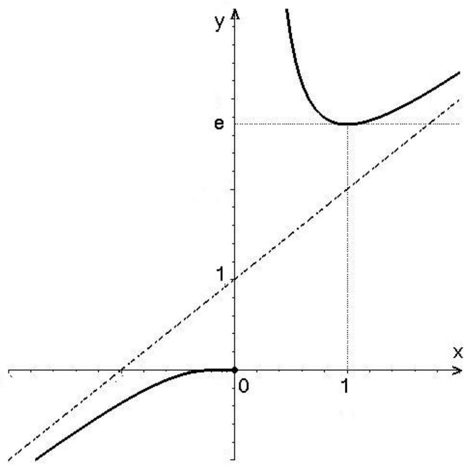
$$f''(x) = \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}} \qquad f(x) \neq 0 \ \forall x \in D_f.$$



Obr. 2.44: Znaménko druhé derivace funkce $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

Funkce je pro $x > 0$ konvexní a pro $x < 0$ konkávní.

Nakreslíme graf:



Obr. 2.45: Graf funkce $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

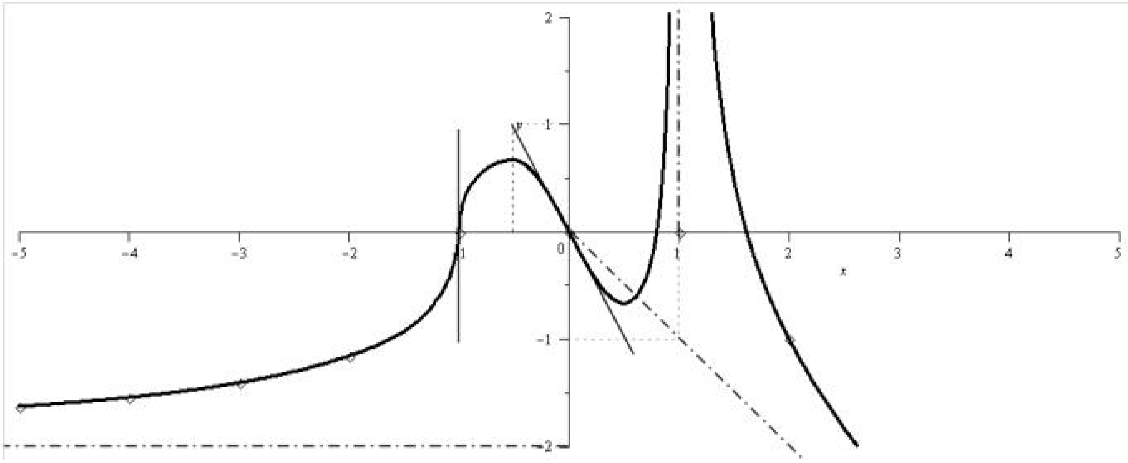
□

Obvykle největší problém dělá z vypočtených údajů o dané funkci nakreslit její graf. Závěrem uvedeme příklad, ve kterém neznáme funkční předpis pro danou funkci, a budeme kreslit její graf pomocí zadaných údajů o jejích vlastnostech.

Příklad 2.99. Načrtněte graf funkce spojité na $\mathbb{R} - \{1\}$, pro kterou platí:

$f(0) = f(-1) = 0, \quad \lim_{x\to 1} f(x) = \infty, \quad lim_{x\to-\infty} f(x) = -2,$
$f'(0) = -2, \qquad lim_{x\to -1} f'(x) = \infty,$
$f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -1)$, $x \in (0,1)$ a $x \in (1, \infty)$, $\quad f'' < 0$ pro $x \in (-1, 0)$,
přímka $y = -x$ je asymptota $x \to \infty$.

Do obrázku nakreslete i asymptoty a tečny ke grafu funkce v bodě $x = 0$ a $x = -1$.



Obr. 2.46:

Na závěr uvedeme soupis všech Mapletů, které mohou pomoci při vyšetření průběhu funkce:
Nalezení lokálních extrémů,
Nalezení intervalů, na kterých funkce roste resp. klesá,
Nalezení inflexních bodů a intervalů, kde je funkce konvexní resp. konkávní,
Výpočet asymptot a
Nakreslení grafu funkce.

Shrnutí

V poslední kapitole o diferenciálním počtu funkce jedné proměnné jsme dříve odvozená fakta o derivacích použili k vyšetření chování funkcí – průběhu funkce. K již odvozeným pravidlům v předchozích kapitolách jsme navíc zkoumali:

- kde je funkce f konvexní (resp. konkávní): graf funkce f v každém bodě intervalu leží nad (resp. pod) tečnou, sestrojenou v tomto bodě, přičemž
- znaménko druhé derivace funkce udává, kde je funkce konvexní (resp konkávní): je-li $f'' > 0$ (resp. $f'' < 0$) na intervalu $\mathcal{J}$, funkce f je na $\mathcal{J}$ konvexní (resp konkávní),
- kde funkce f má inflexní bod (inflexi): přechází z jedné strany tečny na druhou,
- nutná podmínka pro inflexi: má-li funkce f v bodě x_0 inflexní bod, je $f''(x_0) = 0$;

Při vyšetřování průběhu funkce postupujeme obvykle podle tohoto schematu:

I. (a) Definiční obor D_f funkce f.
(b) Body nespojitosti; intervaly spojitosti.
(c) Chování funkce v okolí bodů nespojitosti a svislé asymptoty.
(d) Průsečíky se souřadnými osami.
(e) Symetrie grafu funkce (sudá, lichá).
(f) Periodičnost funkce.

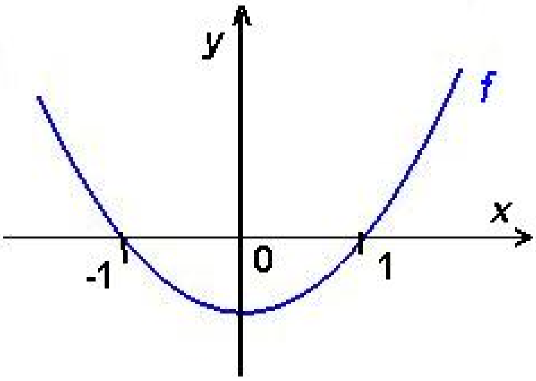
II. Intervaly monotónnosti; body extrému a extrémy.

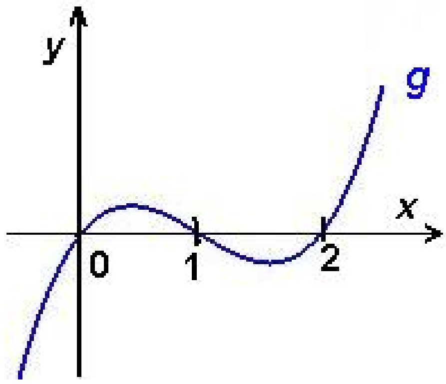
III. Intervaly konvexnosti a konkávnosti; inflexní body.

IV. Chování v nekonečnu, asymptoty se směrnicí.

Otázky a úkoly

1. Odhadněte, ve kterých bodech mají funkce f, g na následujícím obrázku lokální extrémy a inflexní body, ve kterých intervalech rostou, klesají, jsou konvexní, konkávní.





2. Načrtněte grafy funkcí s následujícími vlastnostmi:

   a) $f(0) = 2,\ f'(x) > 0$ pro všechna $x,\ f'(0) = 1,$
   $f''(x) > 0$ pro $x > 0,\ f''(x) < 0$ pro $x < 0,\ f''(0) = 0,$

   b) $f(0) = 1,\ f'(x) \geq 0$ pro všechna $x,\ f'(0) = 0,$
   $f''(x) > 0$ pro $x > 0,\ f''(x) < 0$ pro $x < 0,\ f''(0) = 0.$

3. Načrtněte graf funkce f, pro kterou platí:

   a) f je spojitá na $\mathbb{R}$, je sudá, $f(0) = 1$, přímka $y = 2 - x$ je její asymptota pro $x \to \infty$, $f'_+(0) = \frac{1}{2}$, $f''(x) < 0$ pro $x > 0$,

   b) f je lichá, přímka $y = x - 1$ je její asymptota pro $x \to \infty$, přímka $x = 1$ je její svislá asymptota, $f'_+(0) = -\infty$, $f''(x) > 0$ pro $x \in (0,1)$, $f''(x) < 0$ pro $x > 1$.

Cvičení

1. Vyšetřete průběh následujících funkcí:

a) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$,	*b)* $f(x) = \frac{x}{3-x}$,
c) $f(x) = \ln \frac{x}{x-3}$,	*d)* $f(x) = \frac{1}{x^2-6x+8}$,
e) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-2}{x}$,	*f)* $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$,
g) $f(x) = \ln \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$,	*h)* $f(x) = x^3 - x$,
i) $f(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}$,	*j)* $f(x) = \frac{x}{2\ln x}$.

Výsledky

1. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, roste na $(0,\infty)$, klesá na $(-\infty,-1) \cup (-1,0)$, extrémy v $x = 0$ min. 1 , konvexní na $(-1,\infty)$, konkávní na $(-\infty,-1)$, inflexe není, asymptoty $y = 0\,(x \to -\infty)$, $x = -1$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$,

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, roste v celém definičním oboru, nemá lokální extrémy, konvexní na $(-\infty,3)$, konkávní na $(3,\infty)$, nemá inflexní body, asymptoty $y = -1$, $x = 3$, $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \infty$,

c) $D_f = (-\infty,0) \cup (3,\infty)$, klesá v celém definičním oboru, nemá lokální extrémy, konvexní na $(3,\infty)$, konkávní na $(-\infty,0)$, nemá inflexní body, asymptoty $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x\to3^+} f(x) = \infty$,

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2,4\}$, roste na $(-\infty, 2) \cup (2,3)$, klesá na $(3,4) \cup (4,\infty)$, extrémy v $x = 3$ max. -1, konvexní na $(-\infty, 2) \cup (4,\infty)$, konkávní na $(2,4)$, nemá inflexní body, asymptoty $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \infty$,

e) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, roste v celém definičním oboru, nemá lokální extrémy, konvexní na $(-\infty, 0) \cup (0,1)$, konkávní na $(1,\infty)$, inflexe pro $x = 1$, asymptoty $y = \frac{\pi}{4}$, $x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}$,

f) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, roste v celém definičním oboru, nemá lokální extrémy, konvexní na $(-\infty, 0)$, konkávní na $(0,\infty)$, nemá inflexní body, asymptoty $y = x$, $x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$,

g) $D_f = \mathbb{R}$, roste na $(-\infty, -1) \cup (1,\infty)$, klesá na $(-1,1)$, extrémy v $x = -1$ max. $\ln 3$, $x = 1$ min. $-\ln 3$, konvexní na $(-\infty, -\sqrt{1+\sqrt{3}}) \cup (0, \sqrt{1+\sqrt{3}})$, konkávní na $(-\sqrt{1+\sqrt{3}}, 0) \cup (\sqrt{1+\sqrt{3}}, \infty)$, inflexe $x = \pm\sqrt{1+\sqrt{3}}$, asymptoty $y = 0$,

h) $D_f = \mathbb{R}$, roste na $(-\infty, -1) \cup (1,\infty)$, klesá na $x \in (-1,1)$, extrémy v $x = -1$ max. 2, $x = 1$ min. -2, konvexní na $(0,\infty)$, konkávní na $(-\infty, 0)$, inflexe v $x = 0$, nemá asymptoty,

i) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, roste na $(-3,1)$, klesá na $(-\infty, -3) \cup (1,\infty)$, extrémy v $x = -3$ min. $-\frac{1}{8}$, konvexní na $(-5,1) \cup (1,\infty)$, konkávní na $(-\infty, -5)$, inflexe $x = -5$, asymptoty $y = 0$, $x = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \infty$,

j) $D_f = (0,1) \cup (1,\infty)$, roste na (e,∞), klesá na $(0,1) \cup (1,e)$, extrémy v $x = e$ min. $\frac{e}{2}$, konvexní na $(1,e^2)$, konkávní na $(0,1) \cup (e^2,\infty)$, inflexe v $x = e^2$, asymptoty $x = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \infty$.

3 Integrální počet

3.1 Neurčitý integrál

Zavedení pojmu derivace jsme motivovali např. důležitým požadavkem definovat okamžitou rychlost pohybu bodu po přímce. Existuje přirozeně i požadavek „opačný“, tj. nalézt zákon dráhy pohybu bodu po přímce, je-li dána jeho okamžitá rychlost jako funkce času.

Příklad 3.1. Je dána okamžitá rychlost v pohybu bodu po přímce (ose) x rovnicí $v(t) = 2t + 1,\ t \in \langle 0, \infty)$. Najděme zákon dráhy pohybu, je-li známo, že v čase $t = 0$ měl bod polohu $x = x_0$.

Označíme-li $x(t)$ polohu bodu v okamžiku t, pak $v(t) = \frac{d\,x(t)}{dt}$. Hledáme tedy funkci x=x(t), pro niž platí

$$\frac{dx}{dt} = 2t + 1, \quad x(0) = x_0.$$

Je vidět, že první podmínce vyhovuje nekonečně mnoho funkcí

$$x = t^2 + t + C,$$

kde C je libovolná konstanta. Funkci, která splňuje i druhou podmínku (říkáme jí též počáteční podmínka), najdeme z předchozího vztahu dosazením dané podmínky pro $t = 0$, $x = x_0$. Dostaneme $x_0 = C$. Pro hledaný zákon dráhy tedy platí

$$x = t^2 + t + x_0.$$

Jednoduchou zkouškou se přesvědčíme, že tato funkce splňuje obě podmínky, a zároveň vidíme, že hledaná funkce daných vlastností je jediná.

Každé takové funkci, jejíž derivací je daná funkce, budeme říkat primitivní funkce k funkci dané. Na příkladě jsme viděli, že k dané funkci může existovat nekonečně mnoho primitivních funkcí. Množinu všech primitivních funkcí často nazýváme neurčitým integrálem. Nyní přejdeme k přesné formulaci základních pojmů.

Primitivní funkce

Definice 3.2. Nechť $\mathcal{I}$ je interval v $\mathbb{R}$ a $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ funkce. Funkci F nazveme ***primitivní*** k funkci f v intervalu $\mathcal{I}$, platí-li pro každé $x \in \mathcal{I}$ vztah

$$F'(x) = f(x).$$

(V případě uzavřeného intervalu rozumíme derivací v krajních bodech jednostranné derivace.)

Poznamenejme, že z definice primitivní funkce přímo vyplývá následující věta:

Věta 3.3. *Je-li funkce F primitivní funkcí k nějaké funkci f v intervalu $\mathcal{I}$, pak je funkce F v $\mathcal{I}$ spojitá.*

Důkaz Tvrzení věty plyne z existence derivace F' $(= f)$.

Primitivní funkce k zadané funkci jistě není určena jednoznačně – derivací se snadno přesvědčíme, že pro libovolnou funkci F primitivní k funkci f v intervalu $\mathcal{I}$ platí, že i $G = F + c$ je primitivní funkce k funkci f v intervalu $\mathcal{I}$ pro každé $c \in \mathbb{R}$. Jinak řečeno, liší-li se dvě primitivní funkce F, G o konstantu, tj. $G - F = c$, jsou primitivními funkcemi ke stejné funkci f. Navíc, na základě důsledku Lagrangeovy věty o přírůstku funkce, nulovou derivaci má pouze konstantní funkce, a tudíž stejnou derivaci mohou mít pouze funkce, lišící se o konstantu. Platí tedy věta:

Věta 3.4. *Je-li funkce F primitivní k funkci f v intervalu $\mathcal{I}$, pak $\{F + c \,|\, c \in \mathbb{R}\}$ je množinou všech primitivních funkcí k funkci f.*

Příklad 3.5. Primitivními funkcemi k funkci $\sin 2x$ v $\mathcal{I} = (-\infty, \infty)$ jsou například funkce $1 - \frac{1}{2}\cos 2x$ nebo $\frac{1}{2}(3 - \cos 2x)$, protože

$$\left(1 - \frac{1}{2}\cos 2x\right)' = \sin 2x, \qquad \left(\frac{1}{2}(3 - \cos 2x)\right)' = \sin 2x.$$

Ale také funkce $\sin^2 x$ je primitivní ke stejné funkci, protože

$$(\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

Z předchozí věty plyne, že $\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x = c$; najděme tuto konstantu:

$$\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 2x = \sin^2 x + \frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{1}{2}.$$

Hledaná konstanta je tedy $c = \frac{1}{2}$.

Na jednoduchém příkladě můžeme ukázat, že ne ke každé funkci existuje primitivní funkce:

Příklad 3.6. Jednotková Heavisideova funkce η definovaná předpisem

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad t < 0, \\ 1 & \text{pro} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

nemá na intervalu $(-\infty, \infty)$ primitivní funkci. Předpokládejme opak, tedy nechť F je primitivní funkcí k η, tj. $F'(t) = \eta(t)$ pro $t \in (-\infty, \infty)$. Funkce F musí být na intervalu $(-\infty, \infty)$ spojitá (má derivaci!), a musí platit

$$F'(t) = \eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad t < 0, \\ 1 & \text{pro} \quad t > 0. \end{cases}$$

Takovou funkcí by mohla být funkce

$$F(t) = \begin{cases} c & \text{pro} \quad t < 0, \\ t + c & \text{pro} \quad t > 0. \end{cases}$$

Tato funkce F však nemá v bodě 0 derivaci. Je totiž $F'_{-}(0) = 0,\ F'_{+}(0) = 1$, a proto není F primitivní funkcí.

Postačující podmínku pro existenci primitivní funkce uvádí následující věta:

Věta 3.7. *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\mathcal{J}$. Potom k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce.*

Neurčitý integrál

Definice 3.8. Symbolem $\int f(x)\,dx$ označujeme systém všech primitivních funkcí k funkci f a nazýváme jej ***neurčitý integrál*** funkce f. Potom píšeme

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \qquad \text{případně jen} \qquad \int f(x)\,dx = F(x),$$

kde F je některá primitivní funkce funkce f.

Funkce f se nazývá ***integrand*** nebo též ***integrovaná funkce***, argument x ***integrační proměnná***.

Proces nalezení primitivní funkce k dané funkci nazýváme ***integrováním*** nebo též ***integrací.***

Tedy např. zápis

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c,\ \ c \in \mathbb{R},\ \ x \in (-\infty, \infty), \quad \text{nebo jen} \quad \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3$$

znamená, že funkce $\frac{1}{3}x^3$ je primitivní funkcí k funkci x^2 na intervalu $(-\infty, \infty)$ a že množina všech primitivních funkcí k funkci x^2 je množina

$$\left\{ F \;\middle|\; F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c,\ \ c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Je třeba si uvědomit, že rovnost mezi neurčitými integrály je rovnost až na aditivní konstantu.)

3.2 Integrační metody

Problém hledání primitivní funkce se od derivování liší ve dvou důležitých faktech. Za prvé, zatímco derivace elementární funkce je vždy opět elemetární funkcí, primitivní funkce k některým elementárním funkcím, např. k e^{x^2}, nejsou elementární. Za druhé, nepatrná změna ve tvaru funkce má za následek nepatrnou změnu v její derivaci, zatímco malá změna ve tvaru funkce může mít za následek podstatnou změnu v její primitivní funkci, např.

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c, \quad \text{ale} \quad \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c,$$

jak se snadno přesvědčíme derivací výsledku.

Jak tedy najdeme k dané funkci f funkci F tak, aby platilo $F'(x) = f(x)$ na nějakém intervalu $\mathcal{I}$? Některé vztahy odvodíme snadno, např. jistě platí

$$\begin{array}{lcll lcl}
\int \mathrm{e}^x\,dx & = & \mathrm{e}^x, & \text{protože} & (\mathrm{e}^x)' & = & \mathrm{e}^x,\\
\int \cos x\,dx & = & \sin x, & \text{protože} & (\sin x)' & = & \cos x,\\
\int \frac{1}{x}\,dx & = & \ln|x|, & \text{protože} & (\ln|x|)' & = & \frac{1}{x},\\
\int x^a\,dx & = & \frac{1}{a+1}x^{a+1},\ a \neq -1, & \text{protože} & \left(\frac{1}{a+1}x^{a+1}\right)' & = & x^a.
\end{array}$$

(Další snadno odvoditelné vzorce jsou v závěrečném shrnutí.)

Stejně tak snadno prověříme platnost vztahů

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$$

protože pro derivaci platí

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) \quad \text{a} \quad (k\,F(x))' = k\,F'(x)$$

a současně

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x).$$

To nám ale umožní integrovat jen některé jednoduché funkce:

Příklad 3.9. Máme vypočítat následující integrály

$$a)\ \ \int (x^2-2x)^2 dx,\quad b)\ \ \int \frac{x(\sqrt[3]{x}-x^3\sqrt{x})}{\sqrt[4]{x}}\,dx,\quad c)\ \ \int \frac{1}{\cos^2 x\,\sin^2 x}\,dx.$$

Řešení. a)

$$\int (x^2-2x)^2 dx = \int (x^4-4x^3+4x^2)\,dx = \frac{1}{5}x^5 - 4\,\frac{1}{4}x^4 + 4\,\frac{1}{3}x^3 + c =$$

$$= \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 + c,$$

b)

$$\int \frac{x(\sqrt[3]{x}-x^3\sqrt{x})}{\sqrt[4]{x}}\,dx = \int \left(x^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} - x^{1+3+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}\right)dx = \int \left(x^{\frac{13}{12}} - x^{\frac{17}{4}}\right)dx =$$

$$= \frac{12}{25}x^{\frac{25}{12}} - \frac{4}{21}x^{\frac{21}{4}} + c,$$

c)

$$\int \frac{1}{\cos^2 x\,\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x\,\sin^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx =$$

$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + c.$$

□

V předchozím příkladu jsme integraci provedli úpravou integrandu na součet výrazů, ke kterým jsme primitivní funkci „uhodli“ na základě znalosti vztahů pro derivace (tabulku derivací jsme použili „zprava doleva“). S tímto postupem již nevystačíme i u jednoduchých případů, kdy integrand je ve tvaru součinu nebo podílu, nebo je to složená funkce. Při výpočtu primitivních funkcí nemáme žádnou „gramatiku“, jako jsme měli pro výpočet derivací (známá pravidla pro derivaci součinu, podílu a složené funkce). Můžeme ale odvodit jistá pravidla, která nám v některých případech při integraci pomohou.

Integrace per partes

Ze vztahu pro derivaci součinu

$$(u\,v)' = u'\,v + u\,v', \quad \text{tedy} \quad u\,v' = (u\,v)' - u'\,v$$

vyplývá ***vzorec pro integraci per partes***:

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx.$$

Vypadá to, že jsme si nijak nepomohli – integrál ze součinu funkcí jsme převedli na jiný integrál ze součinu funkcí. V některých případech se může výpočet zjednodušit:

Příklad 3.10. Vypočtěme integrály

$$\text{a)} \quad \int x\mathrm{e}^x\,dx, \qquad \text{b)} \quad \int \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Řešení. a)

$$\int x\mathrm{e}^x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = x, u' = 1 \\ v' = \mathrm{e}^x, v = \mathrm{e}^x \end{array} \right| = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,dx = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c,$$

b)

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x} & v = \ln x \end{array} \right| = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Zdánlivě jsme si nepomohli. Uvedená rovnost je však rovnicí pro neznámou funkci

$$J = \int \frac{\ln x}{x}\,dx \qquad \text{a má tvar} \qquad J = \ln^2 x - J,$$

$$\text{tedy} \quad J = \frac{1}{2}\ln^2 x, \quad x \in (0, \infty), \qquad \text{je jednou primitivní funkcí.}$$

O správnosti výpočtů se můžeme přesvědčit derivací. □

Příklad 3.11. Pomocí metody per partes vypočítáme také integrál $\int \ln x\,dx$.

$$\int \ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = x\,\ln x - \int \frac{1}{x}\,x\,dx = x\,\ln x - x + c.$$

Metoda substituce

Je-li F primitivní funkce k funkci f na nějakém intervalu $\mathcal{I}$, můžeme integrál $\int f(t)\,dt$ napsat ve tvaru

$$\int f(t)\,dt = \int F'(t)\,dt = \int dF(t),$$

kde v posledním integrálu vystupuje diferenciál primitivní funkce F.

Předpokládejme, že $t = g(x)$. Z věty o derivaci složené funkce $(F(g(x)))' = F'(g(x))\,g'(x)$ dostaneme pro diferenciál $dF(t)$

$$dF(t) = dF(g(x)) = F'(g(x))\,g'(x)\,dx = f(g(x))\,g'(x)\,dx \qquad \text{a odtud plyne}$$

$$\int f(t)\,dt = \int f(g(x))\,g'(x)\,dx, \qquad \text{kde} \quad t = g(x).$$

To je vztah pro nejdůležitější obecnou metodu pro integraci – metodu substituce.

Věta 3.12. *1. Jestliže funkce $f \circ g$, g' jsou definovány na nějakém intervalu $\mathcal{I}$ a $\int f(t)\,dt = F(t) + c$, potom na tomto intervalu platí*

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + c,$$

2. jestliže navíc existuje g^{-1} a $\int f(g(t))\,g'(t)\,dt = G(t)+c$, potom

$$\int f(x)\,dx = G(g^{-1}(x)) + c.$$

Princip popsaný ve větě se nazývá ***metoda substituce***.

Popišme oba postupy podrobněji:

1. Substituce $g(x) = t$:
   Má-li hledaný integrál tvar integrálu ze součinu složené funkce a derivace její vnitřní složky, a neznáme-li jeho hodnotu, pak substitucí $g(x) = t$ přejde na tvar $\int f(t)\,dt$, který může být pro výpočet jednodušší. Schematický zápis použití:

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} g(x) = t \\ g'(x)\,dx = dt \end{array} \right| = \int f(t)\,dt = F(t) + c = F(g(x)) + c.$$

2. Substituce $x = g(t)$:
   Budeme-li navíc předpokládat existenci g^{-1}, pro výpočet integrálu platí

$$\int f(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} x = g(t) \\ dx = g'(t)\,dt \end{array} \right| = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt = G(t) + c = G(g^{-1}(x)) + c.$$

Příklad 3.13. Vypočítáme integrály

$$\text{a)}\quad \int \frac{x}{4x^2+1}\,dx, \qquad \text{b)}\quad \int \frac{1}{4x^2+1}\,dx.$$

Řešení. a) Položíme-li $t = 4x^2 + 1$, je $dt = 8x\,dx$, tedy

$$\int \frac{x}{4x^2+1}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{4x^2+1}\,8x\,dx = \left| \begin{array}{ll} t & = 4x^2+1 \\ dt & = 8x\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{8}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{8}\ln|t| + c =$$

$$= \frac{1}{8}\ln(4x^2+1) + c,$$

b) v tomto případě substituce $t = 4x^2 + 1$ nepovede k cíli, protože dt si v integrálu nemůžeme opatřit. Budeme postupovat takto:

$$\int \frac{1}{4x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{(2x)^2+1}\,dx = \left| \begin{array}{ll} t & = 2x \\ dt & = 2dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + c =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + c.$$

□

V předchozím příkladu jsme viděli, jak velmi podobné výrazy (jednoduché racionální lomené funkce) integrujeme rozdílným způsobem. To je právě nevýhoda při hledání primitivních funkcí, že jsou zde jen návody, jak v některých trochu obecných případech postupovat.

V následujícím příkladu zobecníme oba postupy použité v předchozím příkladu – odvodíme dva důležité vzorce:

Příklad 3.14. Ukážeme, že platí:

$$\text{a)}\quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c, \qquad \text{b)}\quad \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c.$$

Řešení.

$$\text{a)}\quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \left| \begin{array}{ll} t & = f(x) \\ dt & = f'(x)\,dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|f(x)| + c,$$

$$\text{b)}\quad \int f(ax+b)\,dx = \left| \begin{array}{ll} z & = ax+b \\ dz & = a\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{a}\int f(z)\,dz = \frac{1}{a}F(z) + c =$$

$$= \frac{1}{a}F(ax+b) + c.$$

$\square$

Tyto vzorce nám umožňují u mnoha jednoduchých integrálů bez použití substituční metody napsat přímo výsledek:

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x|, \qquad \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \ln(e^x+1), \qquad \int \frac{1}{x\,\ln x}\,dx = \ln|\ln x|,$$

a hlavně

$$\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x, \qquad \int \mathrm{e}^{2-x}\,dx = -\mathrm{e}^{2-x}, \qquad \int (4x+3)^3\,dx = \frac{1}{4}\frac{1}{4}(4x+3)^4.$$

Nyní uvedeme příklad na použití substituční metody $x = g(t)$:

Příklad 3.15. Vypočítáme integrál

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} x & = 2\sin t \\ dx & = 2\cos t\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{zde předpokládáme, že substituční funkce } g(t) = 2\sin t \text{ je prostá,} \\ \text{tj. že její derivace } g'(t) = 2\cos t \text{ je buď stále kladná, nebo stále záporná,} \\ \text{tedy např. } t \in (-\pi/2, \pi/2)\text{. V tom případě } t = g^{-1}(x) = \arcsin\frac{x}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \sqrt{4 - 4\sin^2 t}\,2\cos t\,dt = 4\int |\cos t|\cos t\,dt = 4\int \cos^2 t\,dt =$$

$$= 4\int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = 2t + \sin 2t + c = 2t + 2\sin t\cos t + c =$$
$$= 2t + 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} + c = 2\ \arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{1-x^2/4} + c =$$
$$= 2\ \arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + c.$$

V následujícím příkladu odvodíme ještě jeden vzorec, který budeme dále potřebovat. Postup je značně obtížný – ilustruje, jak komplikovaná situace může při integraci nastat. Využije se zde jak metoda substituce, tak metoda per partes.

Příklad 3.16.

Máme vypočítat integrál $$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx.$$

Řešení. Nechť $n = 1$. Potom

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{a^2}\,a\ \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c = \frac{1}{a}\ \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c.$$

Pro $n > 1$ nejdříve integrand upravíme takto:

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx\right].$$

Na druhý integrál použijeme metodu per partes:

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \int \frac{x}{2}\,\frac{2x}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \left|\begin{array}{ll} u = \frac{x}{2} & u' = \frac{1}{2} \\ v' = \frac{2x}{(x^2+a^2)^n} & v \text{ vypočítáme zvlášť} \end{array}\right|,$$

$$v = \int \frac{2x}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \left|\begin{array}{ll} t & = x^2+a^2 \\ dt & = 2x\,dx \end{array}\right| = \int t^{-n}\,dt = \frac{1}{1-n}\,t^{-n+1} =$$
$$= \frac{1}{1-n}\,\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}};$$

odtud

$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{x}{2}\,\frac{1}{1-n}\,\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx.$$

Dohromady tedy

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}\left[\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{x}{2}\,\frac{1}{1-n}\,\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx\right].$$

Důležité na tomto výsledku je to, že stupeň polynomu ve jmenovateli integrované funkce je již nižší než u výchozího integrálu. Po několikanásobném použití bude tedy třeba vypočítat integrál, který již umíme:

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c.$$

$\square$

Integrace racionálních lomených funkcí

Víme, že každá racionální lomená funkce je tvaru

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

kde $P_m(x)$ a $Q_n(x)$ jsou polynomy stupňů m a n. Předpokládejme, že $m < n$, tj. že R je ryze lomená; v případě neryze lomené racionální funkce, tj. pro $m \geq n$, podíl $P_m(x)$ a $Q_n(x)$ dává po vydělení

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = N(x) + \frac{\tilde{P}_i(x)}{Q_n(x)}, \quad \text{kde} \quad i < n$$

Ryze lomenou racionální funkci můžeme rozložit na parciální zlomky, a integrace racionální lomené funkce se tedy převede na integraci parciálních zlomků; ty jsou následujících čtyř typů:

$$\textbf{I.} \quad Z_1(x) = \frac{A}{x-a}, \qquad \textbf{II.} \quad Z_2(x) = \frac{A}{(x-a)^n},$$

$$\textbf{III.} \quad Z_3(x) = \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \textbf{IV.} \quad Z_4(x) = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, \quad p^2-4q<0.$$

První dva typy zlomků integrovat již umíme; povšimneme si podrobně posledních dvou typů:

III.

Zlomek upravíme tak, abychom mohli použít vzorce z příkladu 3.14 – v obecném případě rozložíme na součet dvou zlomků, z nichž první bude mít v čitateli derivaci jmenovatele (bude násoben nějakou konstantou) a druhý bude mít v čitateli konstantu. Primitivní funkce potom bude tvaru „logaritmus plus arkus tangens“.

$$Z_3(x) = \frac{Mx+N}{x^2+px+q} = M\,\frac{x}{x^2+px+q} + N\,\frac{1}{x^2+px+q} =$$

$$= \left|(x^2+px+q)' = 2x+p\right| = \frac{M}{2}\,\frac{2x+p-p}{x^2+px+q} + N\,\frac{1}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\,\frac{2x+p}{x^2+px+q} - \frac{Mp}{2}\,\frac{1}{x^2+px+q} + N\,\frac{1}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2} \frac{2x+p}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{1}{x^2+px+q}.$$

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx = \ln|x^2+px+q| \quad \text{podle prvního vzorce v 3.14},$$

jmenovatel druhého zlomku doplníme na úplný čtverec:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = \left|\text{označme } q - \frac{p^2}{4} = a^2\right| = a^2\left[\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{a}\right)^2 + 1\right].$$

Po této úpravě můžeme na integrál z druhého zlomku použít druhý vzorec odvozený v příkladu 3.14 a dostaneme

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}+\frac{p}{2a}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{a^2}\,a\,\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}+\frac{p}{2a}\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\,\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}.$$

Dohromady dostáváme

$$\int Z_3(x)\,dx = \frac{M}{2}\,\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\,\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + k =$$

$$= A\ln(x^2+px+q) + B\,\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{C} + k.$$

Celý postup bude nejlépe patrný na konkrétním případu. Poznamenejme, že ve speciálních případech může první nebo druhý sčítanec vymizet.

IV.

V posledním případě budeme postupovat analogicky jako v předchozím – zlomek opět rozložíme na dva tak, aby v prvním byla v čitateli derivace závorky ve jmenovateli, a ve druhém jen konstanta. Závorku ve jmenovateli doplníme na úplný čtverec. Dostaneme

$$\int Z_4(x)\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{2}\right]^n}\,dx.$$

Potom na první zlomek použijeme substituci – je to integrál tvaru

$$\frac{M}{2}\int \frac{f'(x)}{f^n(x)}\,dx, \quad \text{kde} \quad f(x) = x^2+px+q,$$

a ve druhém po jednoduché substituci $t = x + \frac{p}{2}$ použijeme rekurentní formuli odvozenou v příkladu 3.16 (nebo zopakujeme postup, který byl při odvozování této formule použit).

Příklad 3.17. Máme vypočítat integrál

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{(x^2+4)^2}\,dx.$$

Řešení. Integrand nejdříve rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}, \text{ tedy}$$

$$x^3 - x^2 + 3x - 3 = (Ax+B)(x^2+4) + Cx + D.$$

Porovnáme koeficienty u stejných mocnin:

$$\begin{array}{rrl} x^3: & 1 = & A \\ x^2: & -1 = & B \\ x^1: & 3 = & 4A + C \\ x^0: & -3 = & 4B + D \end{array} \qquad \text{odkud plyne} \qquad \begin{array}{ll} A = 1, & B = -1, \\ C = -1, & D = 1. \end{array}$$

Dostáváme

$$\int \frac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{(x^2+4)^2}\,dx = \int \left[\frac{x-1}{x^2+4} + \frac{-x+1}{(x^2+4)^2}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+4)^2}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx.$$

Vypočítáme jednotlivé integrály:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + c_1,$$

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{1}{2}x\right)^2 + 1}\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\cdot 2 + c_2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + c_2,$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+4)^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} t & = x^2 + 4 \\ dt & = 2x\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int t^{-2}\,dt = \frac{1}{2}(-t^{-1}) + c_3 =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+4} + c_3;$$

na poslední integrál můžeme použít rekurentní formuli z příkladu 3.16:

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}\,dx\right],$$

kde položíme $a = 2,\ n = 2.$

Tedy

$$\int \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x}{x^2+4} + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx\right] = \frac{1}{8}\left[\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right] + c_4.$$

Dohromady

$$\int \frac{x^3-x^2+3x-3}{(x^2+4)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{8}\left[\frac{x}{x^2+4} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right] + c,$$

$$\text{kde} \quad c = c_1 - c_2 - c_3 + c_4;$$

po úpravě

$$\int \frac{x^3-x^2+3x-3}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{7}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\frac{x+4}{x^2+4} + c.$$

□

Integrace některých iracionálních funkcí

Jak již bylo výše řečeno, obecná pravidla, která by nám umožnila zintegrovat libovolnou elementární funkci, bohužel nemáme. Můžeme pouze uvést některá doporučení, která v konkrétních případech vedou k cíli.

V tomto odstavci se budeme věnovat výpočtu integrálů z iracionálních funkcí.

(Symbolem $R(\cdot)$ budeme označovat racionální lomenou funkci.)

A) V integrálu tvaru

$$\int R(x, x^{\frac{1}{k_1}}, x^{\frac{1}{k_2}}, \ldots, x^{\frac{1}{k_n}})\,dx, \qquad k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N},$$

je vhodné zavést substituci

$$x = t^k,$$

kde k je nejmenší společný násobek celých čísel $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Příklad 3.18.

$$\text{Vypočítáme integrál} \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx.$$

Řešení. Integrand je tvaru $R(x, x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{1}{2}})$. Nejmenší společný násobek čísel $1, 2, 3$ je 6. Použijeme substituci $t = x^{\frac{1}{6}}$. Potom

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx = \left| \begin{array}{rl} t & = x^{\frac{1}{6}} \\ x & = t^6 \\ dx & = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt[3]{t^6}}{t^6+\sqrt{t^6}}\,6t^5\,dt = 6\int \frac{t^2}{t^6+t^3}\,t^5\,dt =$$

$$= 6\int \frac{t^4}{t^3+1}\,dt = 6\int \left(t - \frac{t}{t^3+1}\right) dt = |\text{rozložíme na parciální zlomky}| =$$

$$= \int \left(6t + \frac{2}{t+1} - \frac{2t+2}{t^2-t+1}\right) dt = \left| \begin{array}{l} \text{čitatel posledního zlomku} \\ \text{upravíme na derivaci jmenovatele} \end{array} \right| =$$

$$= 3t^2 + 2\ln|t+1| - \int \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt - \int \frac{3}{t^2-t+1}\,dt = \left| \begin{array}{l} \text{jmenovatel na} \\ \text{úplný čtverec} \end{array} \right| =$$

$$= \left| t^2 - t + 1 = (t-\frac{1}{2})^2 + 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}(t-\frac{1}{2})^2 + 1\right] = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right] \right| =$$

$$= 3t^2 + 2\ln|t+1| - \ln(t^2-t+1) - 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + c =$$

$$= 3\sqrt[3]{x} + \ln\frac{(\sqrt[6]{x}+1)^2}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} + 1} - 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}} + c.$$

□

B) V integrálu tvaru

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_n}}\right) dx, \quad k_1, k_2, \dots, k_2 \in \mathbb{N},$$

je vhodné zavést substituci

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}},$$

kde k je nejmenší společný násobek čísel $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Příklad 3.19.

$$\text{Vypočítáme integrál} \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{1}{(1-x)(1+x)^2}\,dx.$$

Řešení. Integrand je definován pro $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$, $x \neq -1$, tedy pro $x \in (-1, 1)$. Na tomto intervalu je funkce $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$ klesající:

$$g'(x) = \frac{-2}{(1-x)^2} < 0\ \forall x, \quad \text{navíc je} \quad g(x) = \frac{1+x}{1-x} < 0\ \forall x \in (-1, 1).$$

Proto existuje g^{-1} v intervalu $(0,\infty)$. Položíme tedy

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \; t^2 = \frac{1+x}{1-x}. \quad \text{Odtud} \quad x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4t}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

Pro přehlednost nejdříve vypočítáme potřebné výrazy:

$$1-x = 1 - \frac{t^2-1}{t^2+1} = \frac{2}{t^2+1}, \qquad 1+x = 1 + \frac{t^2-1}{t^2+1} = \frac{2t^2}{t^2+1}.$$

Odtud

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{1}{(1-x)(1+x)^2}\,dx = \int t\,\frac{(t^2+1)}{2}\,\frac{(t^2+1)^2}{4t^4}\,\frac{4t}{(t^2+1)^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt = \frac{t}{2} - \frac{1}{2t} + c = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) + c.$$

□

C) Pro výpočet integrálu tvaru

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx$$

$$\text{použijeme Eulerovy substituce} \quad \begin{cases} t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a}, & \text{je-li} \quad a > 0, \\ t \cdot x = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{c}, & \text{je-li} \quad c \geq 0. \end{cases}$$

Má-li kvadratický trojčlen ax^2+bx+c reálné kořeny α, β, tedy platí-li $ax^2+bx+c =$ $= a(x-\alpha)(x-\beta)$, můžeme provést následující úpravu:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\,(x-\alpha)(x-\beta)} = \sqrt{a\,\frac{(x-\alpha)^2}{x-\alpha}\,(x-\beta)} = (x-\alpha)\sqrt{a\,\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$$

a jedná se tedy o případ **B)**.

Příklad 3.20.

$$\text{Vypočítáme integrál} \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx.$$

Řešení.

$$\text{Zde je } a = 1 > 0 \quad \text{a položíme} \quad t = \sqrt{x^2+2x+3} - x, \quad \sqrt{x^2+2x+3} = x + t,$$

$$\text{tedy} \quad x^2+2x+3 = x^2+2tx+t^2,$$

$$\text{odtud} \quad x = \frac{3-t^2}{2(t-1)} \quad \text{a dále} \quad dx = \frac{-t^2+2t-3}{2(t-1)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{x^2+2x+3} = x+t = \frac{3-t^2}{2(t-1)} + t = \frac{t^2-2t+3}{2(t-1)}.$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx = 2\int \frac{1}{t^2-3}\,dt = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \left(\frac{1}{t-\sqrt{3}} - \frac{1}{t+\sqrt{3}}\right) dt =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + c = \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{x+\sqrt{3}-\sqrt{x^2+2x+3}}{x-\sqrt{3}-\sqrt{x^2+2x+3}}\right| + c.$$

□

Poznámka:

V integrálu tvaru $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

doplníme výraz pod odmocninou na úplný čtverec a jednoduchou substitucí převedeme přímo na některý integrační vzorec.

Příklad 3.21.

Vypočteme integrál $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-5x^2}}\,dx.$

Řešení. Upravíme kvadratický trojčlen pod odmocninou:

$$3-2x-5x^2 = -5\left(x^2+\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}\right) = -5\left[\left(x+\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{16}{25}\right] = \frac{16}{5}\left[1-\left(\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}\right)^2\right].$$

Tedy $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-5x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{4}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}\right)^2}}\,dx =$

$$= \frac{\sqrt{5}}{4}\,\frac{4}{5}\arcsin\left(\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}\right) + c = \frac{\sqrt{5}}{5}\arcsin\left(\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}\right) + c.$$

□

D) Pro integrály tvaru

$$\left.\begin{array}{l} \int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)\,dx \\ \int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)\,dx \\ \int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)\,dx \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{je možné užít}\\ \text{trigonometrické}\\ \text{substituce}\end{array} \left\{\begin{array}{l} x = a\sin t,\ x = a\cos t, \\ x = a\ \mathrm{tg}\ t,\ x = a\ \mathrm{cotg}\ t, \\ x = \frac{a}{\cos t}\ \ x = \frac{a}{\sin t}. \end{array}\right.$$

Příklad 3.22.

Vypočítáme integrál $\displaystyle\int \frac{1}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}\,dx.$

Řešení. Položíme $x = 3\,\mathrm{tg}\, t$ pro $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Potom

$$dx = \frac{3}{\cos^2 t}\, dt, \qquad 9 + x^2 = 9 + 9\,\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = 9\,\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{9}{\cos^2 t}.$$

$$\text{Tedy} \qquad \int \frac{1}{(9+x^2)\sqrt{9+x^2}}\, dx = \int \frac{\cos^2 t}{9}\,\frac{\sqrt{\cos^2 t}}{3}\,\frac{3}{\cos^2 t}\, dt =$$

$$= \left|\text{pro} \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{je} \quad \cos t > 0\right| = \frac{1}{9}\int \cos t\, dt = \frac{1}{9}\sin t + c = *$$

– výsledek je třeba vyjádřit v proměnné x.

$$\text{Je} \quad \mathrm{tg}^2\, t = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t}{1 - \sin^2 t}, \quad \text{odtud} \quad \sin^2 t = \frac{\mathrm{tg}^2\, t}{1 + \mathrm{tg}^2\, t},$$

$$\text{tedy} \quad \sin t = \frac{\mathrm{tg}\, t}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\, t}} \quad \left(\text{pro} \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{mají sin a tg stejná znaménka}\right).$$

$$\text{Závěrem} \quad * = \frac{1}{9}\sin t + c = \frac{1}{9}\,\frac{\mathrm{tg}\, t}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\, t}} + c = \frac{1}{9}\,\frac{x}{\sqrt{9 + x^2}} + c.$$

Substituci $x = 2\sin t$ jsme použili v příkladu 3.15. □

Integrace trigonometrických funkcí

Při použití trigonometrické substituce na integrál z iracionální funkce jsme pochopitelně dostali racionální lomenou funkci v sinech a kosinech – v tomto odstavci naznačíme, jak se takové integrály počítají.

Integrál tvaru

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

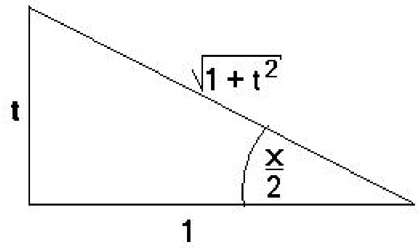
převede ***univerzální goniometrická substituce*** $t = \mathrm{tg}\, \frac{x}{2}$ na integrál z racionální lomené funkce proměnné t.

K odvození vztahů pro $\sin x$ a $\cos x$ použijeme následující obrázek:

$$\text{Přitom} \quad dt = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}\, dx \quad \text{a odtud plyne} \quad dx = \frac{2}{1 + t^2}\, dt.$$

Příklad 3.23.

$$\text{Vypočítáme integrál} \qquad \int \frac{1}{4\sin x - 7\cos x - 7}\, dx.$$



Obr. 3.1:

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\sin x = \sin 2\,\frac{x}{2} = 2\,\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos 2\,\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Řešení. S využitím odvozených vztahů dostaneme:

$$\int \frac{1}{4\sin x - 7\cos x - 7}\,dx = \int \frac{1}{\frac{8t}{1+t^2} - \frac{7-7t^2}{1+t^2} - 7}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{2\,dt}{8t - 7 + 7t^2 - 7 - 7t^2} = \int \frac{1}{4t-7}\,dt = \frac{1}{4}\ln|4t-7| + c =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|4\ \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - 7\right| + c.$$

□

V mnoha případech ovšem tato substituce vede na velmi komplikované racionální lomené funkce. Ve speciálních situacích je možné použít jednodušší substituce:

A) Je-li $R(\sin x, \cos x)$ lichá v sinu (resp. v kosinu), tedy platí-li

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \qquad (\text{resp.}\quad R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x))\,,$$

$$\text{použijeme substituci}\quad t = \cos x \quad (\text{resp.}\quad t = \sin x)\,.$$

Podstata této substituce spočívá v tom, že ta goniometrická funkce, vzhledem ke které je příslušná racionální lomená funkce lichá, se dá vytknout k diferenciálu, přičemž zůstává v integrandu v sudé mocnině, a tedy se dá převést na tu funkci, která bude v substituci.

Příklad 3.24.

Máme vypočítat integrál $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\,dx.$

Řešení. Integrovaná funkce je lichá v sinu, zavedeme substituci $\cos x = t$:

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\,\sin x\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}\,\sin x\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{rl} t &= \cos x \\ dt &= -\sin x\,dx \end{array}\right| = -\int \frac{1-t^2}{1+t}\,dt = -\int (1-t)\,dt = -t + \frac{1}{2}t^2 + c =$$

$$= c - \cos t + \frac{1}{2}\cos^2 t.$$

□

Jistě jsme mohli použít také univerzální goniometrickou substituci, ovšem výpočet by byl podstatně komplikovanější:

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\,dx = \int \frac{\frac{t^3}{(1+t^2)^3}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2t^3}{(1+t^2)^3(3+t^2)}\,dt,$$

v rozkladu na parciální zlomky bychom museli předpokládat čtyři zlomky příslušné komplexním kořenům, tedy 8 neurčitých koeficientů, a pro integraci bychom museli použít nejméně dvakrát rekurentní vzorec.

B) Je-li $R(\sin x, \cos x)$ sudá v sinu a kosinu současně, tedy platí-li

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x), \qquad \text{použijeme substituci} \quad t = \operatorname{tg} x.$$

$$\text{Potom } \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \text{ a } dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

Protože je příslušná racionální funkce sudá v sinu a kosinu současně, odmocniny se při výpočtu odstraní.

Příklad 3.25.

$$\text{Máme vypočítat integrál} \qquad \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\,dx.$$

Řešení. Protože $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, má integrand požadovanou vlastnost. Dostaneme:

$$\int \frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}\,dx = \int \frac{2\,\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{t^2}{1+t^2}+2\,\frac{1}{1+t^2}}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2t}{(1+t^2)(2+t^2)}\,dt =$$

$$= \int\left(\frac{2t}{1+t^2} - \frac{2t}{2+t^2}\right)dt = \ln(1+t^2) - \ln(2+t^2) + c = \ln\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{2+\operatorname{tg}^2 x} + c =$$

$$= \ln\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{2\cos^2 x + \sin^2 x} + c = c - \ln(1+\cos^2 x).$$

□

Je-li integrand tvaru součinu sudých mocnin sinů a kosinů (tedy nejedná se o zlomek), můžeme ho zjednodušit pomocí součtových vzorců

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

Příklad 3.26.

$$\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^2 \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)(1+\cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x\right)\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1 - \cos 2x - \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right)\, dx + \frac{1}{16}\int (1-\sin^2 2x)\, 2\cos 2x\, dx =$$

$$= \left| \text{ve druhém integrálu :} \quad \begin{aligned} t &= \sin 2x \\ dt &= 2\cos 2x\, dx \end{aligned} \right| = \frac{1}{16}\, x - \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{64}\sin 4x +$$

$$+ \frac{1}{16}\int (1-t^2)\, dt = \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{16}\left(t - \frac{1}{3}t^3\right) + c =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + c =$$

$$= \frac{1}{16}\, x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + c.$$

Pro výpočet neurčitých integrálů lze použít tyto Maplety:
Primitivní funkce, Metoda per partes, Substituční metoda.

Shrnutí

V této kapitole jsme zavedli pojem

- primitivní funkce k funkci f na intervalu $\mathcal{I}$: funkce F, pro kterou platí $F'(x) = f(x)$ na intervalu $\mathcal{I}$,
- neurčitý integrál z funkce f: $\int f(x)\, dx = F(x) + c$ – systém všech primitivních funkcí k funkci f.

Dále jsme se věnovali výpočtu neurčitého integrálu.

Následující vztahy snadno odvodíme na základě vztahů pro derivování. Pro zjednodušení nebudeme psát integrační konstantu.

Vzorce pro výpočet neurčitých integrálů

$\int 0\,dx$	$= c$	$\int 1\,dx$	$= x$
$\int x^k\,dx$	$= \dfrac{x^{k+1}}{k+1},\ k \neq -1$	$\int \frac{1}{x}\,dx$	$= \ln\lvert x\rvert,\ x \neq 0$
$\int \sin x\,dx$	$= -\cos x$	$\int \cos x\,dx$	$= \sin x$
$\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx$	$= -\operatorname{cotg} x$	$\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$	$= \operatorname{tg} x$
$\int e^x\,dx$	$= e^x$	$\int a^x\,dx$	$= \dfrac{a^x}{\ln a},\ a > 0,\ a \neq 1$
$\int \sinh x\,dx$	$= \cosh x$	$\int \cosh x\,dx$	$= \sinh x$
$\int \dfrac{dx}{x^2+a^2}$	$= \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a},\ a > 0$	$\int \dfrac{dx}{x^2-a^2}$	$= \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert,\ \lvert x\rvert \neq a,\ a > 0$
$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+b}}$	$= \ln\lvert x+\sqrt{x^2+b}\rvert,\ b \neq 0$	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$= \arcsin\dfrac{x}{a},\ \lvert x\rvert < a,\ a > 0$
$\int \sqrt{x^2+b}\,dx$	$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2+b} + \frac{b}{2}\ln\lvert x+\sqrt{x^2+b}\rvert,\ b \neq 0$		

Důležité integrály

$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert$	$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$

Uvedli jsme pravidla pro výpočet neurčitých integrálů:

- linearita: $\int (a\,f(x) + b\,g(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$,
- metoda per partes: $\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$,
- substituční metoda: $\int f(x)\,dx = \int f[g(t)]\,g'(t)\,dt$, kde $x = g(t)$.

Některé typy integrálů řešitelné metodou per partes

Je-li $P(x)$ polynom (i konstanta), potom u integrálu

$\int P(x)\,\ln x\,dx$ $\int P(x)\,\mathrm{arctg} x\,dx$ $\int P(x)\,\arcsin x\,dx$	klademe	$u = \begin{cases} \ln x \\ \mathrm{arctg}\, x \\ \arcsin x \end{cases}$	(u' je rac. resp. irac. funkce)
$\int P(x)\,\cos x\,dx$ $\int P(x)\,\sin x\,dx$ $\int P(x)\,\mathrm{a}^x\,dx$	klademe	$u = P(x)$	a metodu opakujeme tolikrát jako je stupeň polynomu

Některé doporučené substituce

($R(\cdot)$ je racionální lomená funkce)

Typ integrálu		Substituce	
$\int R(x, x^{\frac{1}{k_1}}, x^{\frac{1}{k_2}}, \dots, x^{\frac{1}{k_n}})\,dx,$	$k_i \in \mathbb{N}$	$t = x^{\frac{1}{k}},$	k nejm. spol. násobek k_i
$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_n}}\right)\,dx,$	$k_i \in \mathbb{N}$	$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}},$	k nejm. spol. násobek k_i
$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,dx,$	$a \neq 0$	$t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a}$	pro $a > 0$
		$xt = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{c}$	pro $c \geq 0$
$\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)\,dx$		$x = a\,\sin t$	nebo $x = a\,\cos t$
$\int R\left(x, \sqrt{x^2+a^2}\right)\,dx$		$x = a\,\mathrm{tg}\,t$	
$\int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right)\,dx$		$x = \frac{a}{\sin t}$	nebo $x = \frac{a}{\cos t}$
$\int R(\cos x, \sin x)\,dx$		$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = t$	
		$\sin x = t,$	R lichá v kosinu
		$\cos x = t,$	R lichá v sinu
		$\mathrm{tg}\,x = t,$	R sudá v sinu a kosinu
$\int R(\mathrm{tg}\,x)\,dx$		$t = \mathrm{tg}\,x$	
$\int R(\mathrm{e}^x)\,dx$		$t = e^x$	

Uvedené substituce převedou integrál daného typu na integrál z racionální funkce $R(t)$.

Racionální lomené funkce pro integraci rozkládáme na parciální zlomky.

Otázky a úlohy

1. Co je to primitivní funkce a co neurčitý integrál?
2. Čemu se rovná $\int f'(x)\,dx$ a čemu $\left[\int f(x)\,dx\right]'$?
3. Formulujte vztah pro integraci per partes.
4. Označme $I_n = \int \ln^n x\,dx$. Užitím metody per partes ukažte, že pro $n > 1$ platí
$$I_n = x \ln^n x - n\, I_{n-1}.$$
5. S použitím předchozího vzorce a výsledku příkladu 3.11 stanovte $\int \ln^3 x\,dx$.
6. Popište metodu substituce v neurčitém integrálu.
7. Vypočtěte $\int g^3(x)\, g'(x)\,dx$.
8. Jmenovatel jisté racionální lomené funkce je tvaru $(x^2+1)^2(x^2+2x+2)^3$. Kolik neurčitých koeficientů budeme hledat při rozkladu této funkce na parciální zlomky? Jaký tvar bude mít tento rozklad?
9. Integrujeme parciální zlomek tvaru $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$. Jakého typu bude primitivní funkce? (Tedy bude to polynom, racionální lomená funkce, exponenciální funkce, logaritmus, arkus sinus, arkus tangens, …?)
10. Eulerovy substituce pro integrály obsahující odmocninu z kvadratického trojčlenu, tedy $\sqrt{ax^2+bx+c}$, jsou dvě – pro případ $a > 0$ a $c \geq 0$. Platí-li $a > 0$ a současně $c \geq 0$, která Eulerova substituce bude vhodnější?
11. Integrál $\int \sin^3 x \cos^3 x\,dx$ můžeme vypočítat všemi trigonometrickými substitucemi. Transformujte tento integrál pomocí všech těchto substitucí a dále zadaný integrál upravte pomocí součtového vzorce $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Porovnejte všechny vzniklé integrály a nejjednodušší vypočítejte.

Cvičení

1. Pomocí vhodné úpravy integrandu s užitím tabulky primitivních funkcí (event. i „důležitých integrálů“) vypočítejte integrály $\int f(x)\,dx$, je-li $f(x)$ rovno:

a)	$\frac{1}{3}x^2 - \dfrac{1}{5x}$,	b)	$\dfrac{\sqrt{x^4+2+x^{-4}}}{x^3}$,
c)	$\dfrac{x^3-1}{x-1}$,	d)	$5\cos x - \sqrt{3}x^5 + \dfrac{3}{1+x^2}$,
e)	$10^{-x} + \dfrac{x^2+2}{1+x^2}$,	f)	$\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}$,
g)	$\dfrac{(2^x-3^x)^2}{6^x}$,	h)	$\operatorname{tg}^2 x$,

i) $\dfrac{x}{x^2-3}$, j) $\dfrac{1}{x\,\ln x}$,

k) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$, l) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x}$,

m) $(3x-11)^9$, n) $\dfrac{3}{2-5x}$,

o) $\dfrac{1}{(a+bx)^n}$, $b \neq 0$, $n > 1$, p) $\dfrac{x}{(a+bx)^n}$, $b \neq 0$, $n > 2$.

2. Pomocí metody per partes vypočítejte integrály $\int f(x)\,dx$, je-li $f(x)$ rovno:

a) $x\,\mathrm{e}^{2x}$, b) $x\,\sin x$,

c) $x\,\ln x$, d) $x\,\ln^2 x$,

e) $(x^2+x)\,\ln(x+1)$, f) $(x^2+6x+3)\,\cos 2x$,

g) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, h) $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$,

i) $\mathrm{e}^x\,\sin x$, j) $e^{2x}\,\cos x$,

k) $\sin x\,\ln(\operatorname{tg} x)$, l) $x\,\operatorname{tg}^2 x$.

3. Pomocí vhodné substituce vypočítejte integrály $\int f(x)\,dx$, je-li $f(x)$ rovno:

a) $\dfrac{4^x}{1+4^{2x}}$, b) $2\mathrm{e}^{x^3}x^2$,

c) $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}$, d) $\mathrm{e}^{\cos^2 x}\sin 2x$,

e) $\dfrac{\ln^4 x}{x}$, f) $\dfrac{3}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$,

g) $\dfrac{\ln \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$, h) $\dfrac{\cos(\ln x)}{x}$,

i) $\dfrac{\cos 2x}{2+3\sin 2x}$, j) $\dfrac{2x^2}{\cos^2(x^3+1)}$,

k) $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$, l) $\dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$.

4. Vypočítejte integrály z následujících racionálních lomených funkcí:

a) $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$, b) $\dfrac{3x^2+30x-120}{(x-2)(x+2)(x-5)}$,

c) $\dfrac{9x^4+3x^3-23x^2+x}{9x^3-6x^2-5x+2}$, d) $\dfrac{9x-14}{9x^2-24x+16}$,

e) $\dfrac{3x-4}{(x-2)(x-1)^3}$, f) $\dfrac{x^4-10x^3+36x^2-46x+25}{x^3-9x^2+27x-27}$,

g) $\dfrac{x^4}{x^2+3}$, h) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+x+2}$,

i) $\dfrac{1}{x^3+x^2+x}$, j) $\dfrac{x^2-2x+1}{(x^2-2x+2)(x^2-2x+5)}$,

k) $\dfrac{1}{x^4+1}$, l) $\dfrac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2}$,

m) $\dfrac{x}{(x^2+3x+3)^2}$, n) $\dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$,

o) $\dfrac{1}{(1+x^2)^3}$, p) $\dfrac{1}{(1+x^3)^2}$.

5. Vypočítejte integrály z následujících iracionálních funkcí:

a) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, b) $\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}$,

c) $\dfrac{1}{x\sqrt{x-4}}$, d) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{(x+1)^2}}$,

e) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, f) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-2)^3(x-3)}}$,

g) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$, h) $\dfrac{1}{\sqrt{3x^2-5x+8}}$,

i) $\dfrac{1}{\sqrt{3-2x-5x^2}}$, j) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4x+1}}$,

k) $\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x}$, l) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}$,

m) $\dfrac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}$, n) $\dfrac{x^6}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. Vypočítejte integrály z následujících trigonometrických funkcí:

a) $\dfrac{1}{\sin x-\cos x}$, b) $\dfrac{1}{\cos x-2\sin x+3}$,

c) $\dfrac{\cos x}{\cos x-1}$, d) $\dfrac{1+\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}$,

e) $\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$, f) $\dfrac{1}{4-3\sin^2 x}$,

g) $\dfrac{1}{2+2\cos^2 x}$, h) $\dfrac{1}{\sin^2 x+3\cos^2 x+2}$,

i) $\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^3}$, j) $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x+6\sin x+5}$,

k) $\cos^5 x$, l) $\sin^6 3x$,

m) $\dfrac{1}{\cos x}$, n) $\dfrac{1}{\sin^6 x}$.

7. Pomocí některé vhodné integrační metody určete integrály z následujících funkcí:

a) $\sqrt{\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}}$, b) $x^2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$,

c) $x^3\ln^3 x$, d) $\dfrac{\ln^3 x}{x^3}$,

e) $\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$, f) $\dfrac{\ln x}{\sqrt{(1-4x^2)^3}}$,

g) $x\operatorname{arctg} x\ln(1+x^2)$, h) $\dfrac{\ln\cos x}{\sin^2 x}$,

i) $\dfrac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$, j) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2}$,

k) $\dfrac{x\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}$, l) $\dfrac{x\operatorname{arctg} x}{(x^2-1)^2}$.

8. Najděte funkci, jejíž graf prochází bodem A a má v libovolném bodě $[x, y]$ směrnici k, je-li
   a) $A=[0,1]$, $k=12x+1$, b) $A=[3,2]$, $k=2x^2-5$.

9. Částice se pohybuje podél osy x se zrychlením $a=(2t-3)\,\mathrm{m/s^2}$. V čase $t=0$ je v počátku a pohybuje se rychlostí $4\,\mathrm{m/s}$ ve směru rostoucího x. Najděte funkční předpis pro rychlost v a polohu s a zjistěte, kdy částice změní směr svého pohybu a kdy se bude pohybovat vlevo.

10. Přepracujte předchozí příklad pro případ $a=(t^2-\frac{13}{3})\,\mathrm{m/s^2}$.

11. Řidič zabrzdí automobil jedoucí rychlostí $72\,\mathrm{km/h}$, brzdy způsobí konstantní zpomalení $8\,\mathrm{m/s^2}$. Za jak dlouho automobil zastaví a jak dlouhá bude brzdná dráha?

Výsledky

Integrační konstantu budeme vynechávat.

1. a) $\frac{x^3}{9}-\frac{1}{5}\ln|x|$, b) $\ln|x|-\frac{1}{4x^4}$, c) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x$, d) $5\sin x-\frac{\sqrt{3}x^6}{6}+3\operatorname{arctg} x$, e) $-\frac{1}{10^x\ln 10}+x+\operatorname{arctg} x$, f) $\arcsin x+$ $+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|$, g) $((\frac{2}{3})^x-(\frac{3}{2})^x)/(\ln 2-\ln 3)-2x$, h) $\operatorname{tg} x-x$, i) $\frac{1}{2}\ln|x^2-3|$, j) $\ln|\ln x|$, k) $\ln|\operatorname{tg} x|$, l) $\ln|\arcsin x|$, m) $\frac{1}{30}(3x-11)^{10}$, n) $-\frac{3}{5}\ln|2-5x|$, o) $-\frac{1}{b(n-1)}(a+bx)^{1-n}$, p) $-\frac{1}{b^2(n-2)}(a+bx)^{2-n}+\frac{a}{b^2(n-1)}(a+bx)^{1-n}$;
2. a) $\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}(2x-1)$, b) $\sin x-x\cos x$, c) $\frac{1}{4}x^2(2\ln x-1)$, d) $\frac{1}{2}x^2(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2})$, e) $\frac{1}{6}(2x^3+3x^2)\ln(x+1)-\frac{1}{36}[4x^3+3x^2-6x+$ $+6\ln(x+1)]$, f) $\frac{1}{4}(2x^2+12x+5)\sin 2x+\frac{1}{2}(x+3)\cos 2x$, g) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$, h) $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, i) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)$, j) $\frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}(\sin x+2\cos x)$, k) $\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x\ln tgx$, l) $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}$;
3. a) $\frac{1}{\ln 4}\operatorname{arctg} 4^x$, b) $\frac{2}{3}\mathrm{e}^{x^3}$, c) $-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, d) $-e^{\cos^2 x}$, e) $\frac{1}{5}\ln^5 x$, f) $3\arcsin(\ln x)$, g) $\frac{1}{2}(\ln|\operatorname{arctg} x|)^2$, h) $\sin(\ln x)$, i) $\frac{1}{6}\ln|2+$ $+3\sin 2x|$, j) $\frac{2}{3}\operatorname{tg}(x^3+1)$, k) $\cos\frac{1}{x}$, l) $2\sqrt{\operatorname{tg} x-1}$;
4. a) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\right|$, b) $\ln\left|\frac{(x-2)^4(x-5)^5}{(x+2)^6}\right|$, c) $\frac{1}{2}x^2+x-\frac{2}{3}\ln|3x+2|+\frac{1}{3}\ln|3x-1|-\ln|x-1|$,d) $\frac{2}{3}\frac{1}{3x-4}+\ln|3x-4|$, e) $\frac{4x-5}{2(x-1)^2}+2\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$, f) $\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{11}{(x-3)^2}-\frac{8}{x-3}$, g) $\frac{x^3}{3}-3x+3\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$, h) $x+\ln|x^2+x+2|-\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}$, i) $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, j) $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x-1)$, k) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$, l) $\frac{-x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+$ $+\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+6)$, m) $-\frac{x+2}{x^2+3x+3}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{3}}$, n) $\frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg} x$, o) $\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3x}{8(x^2+1)}+$ $+\frac{3}{8}\operatorname{arctg} x$, p) $\frac{x}{3(x^2+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

5. a) $-x+4\sqrt{x}-4\ln(\sqrt{x}+1)$, b) $\frac{-6}{\sqrt[6]{x}}+\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+24\ln\left|\frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[12]{x}+1}\right|$, c) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-4}}{2}$, d) $-3\sqrt[3]{x+1}-6\sqrt[6]{x+1}-6\ln|1-\sqrt[6]{x+1}|$, e) $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$, f) $2\sqrt{\frac{x-3}{x-2}}$, g) $\ln|\sqrt{1+x+x^2}+x+\frac{1}{2}|$, h) $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x\sqrt{3}-\frac{5\sqrt{3}}{6}+\sqrt{3x^2-5x+8}|$, i) $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin(\frac{5x+1}{4})$, j) $\sqrt{x^2-4x+1}+2\ln|2x-4+2\sqrt{x^2-4x+1}|$, k) $\sqrt{x^2+2x}+\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|$, l) $2\sqrt{x^2+x}$, m) $\frac{1}{15}(3x^4-4x^2+8)\sqrt{1+x^2}$, n) $-\frac{1}{48}(8x^5+10x^3+15x)\sqrt{1-x^2}+\frac{5}{16}\arcsin x$;

6. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2})|$, b) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1)$, c) $x+\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$, d) $-x+2\ln\left|\frac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|$, e) $\ln|\sin x+\cos x|$, f) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{2}$, g) $\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{2}$, h) $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}x}{\sqrt{5}}$, i) $\frac{1}{2}(1+\cos x)^2$, j) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin x}{5+\sin x}\right|$, k) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x$, l) $\frac{5x}{16}-\frac{1}{12}\sin 6x+$ $+\frac{1}{64}\sin 12x-\frac{1}{144}\sin^3 6x$, m) $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|$, n) $-\operatorname{cotg}x-\frac{2}{3}\operatorname{cotg}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x$;

7. a) $-\ln(\mathrm{e}^{-x}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2x}-1})-\arcsin\mathrm{e}^x$, b) $2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}[(x^2+20x+120)\sqrt{x}-(5x^2+60x+120)]$, c) $\frac{x^4}{128}(32\ln^3 x-24\ln^2 x+$ $+12\ln x-3)$, d) $\frac{-1}{8x^2}(4\ln^3 x+6\ln^2 x+6\ln x+3)$, e) $-\ln\sqrt{1+x^2}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln|x+\sqrt{1+x^2}|$, f) $\frac{x\ln|x|}{\sqrt{1-4x^2}}-\frac{1}{2}\arcsin 2x$, g) $x-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}[(1+x^2)\operatorname{arctg}x-x]\ln(1+x^2)$, h) $-(\operatorname{cotg}x)\ln|\cos x|-x$, i) $x-\mathrm{e}^{-x}\arcsin\mathrm{e}^x-\ln(1+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})$, j) $\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}-\frac{1}{x}\operatorname{arctg}x$, k) $\frac{(x^2-1)\operatorname{arctg}x+x}{4(1+x^2}$, l) $\frac{1}{8}\ln\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x^2-1}\right)\operatorname{arctg}x$;

8. a) $f(x)=6x^2+x+1$, b) $f(x)=\frac{2}{3}x^3-5x-1$;

9. $s=\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+4t$, nikdy;

10. $s=\frac{1}{12}t^4-\frac{13}{6}t^2+4t$, nalevo pro $t<-4$ a $t\in(1,3)$;

11. 2,5 s, 25 m.

3.3 Určitý integrál

Motivaci pro pojem určitého integrálu dostaneme, uvažujeme-li problém výpočtu obsahu plochy pod grafem (nezáporné) funkce, definované na nějakém intervalu; tedy plošného obsahu obrazce, který vznikne z obdélníku nahrazením jeho horní strany grafem nějaké funkce. Obsah této plochy se budeme snažit vypočítat jejím přibližným nahrazením obdélníky, jejichž základny budou dohromady tvořit základnu původního obrazce, tedy interval, na němž je shora ohraničující funkce definována. Tento mlhavě nastíněný postup upřesníme tak, že postupně zavedeme potřebné pojmy.

Dělení intervalu

Mějme dána čísla $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$.
Množinu intervalů

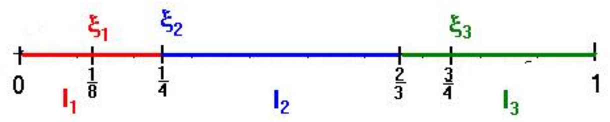
$$D=\{\langle x_0,x_1\rangle,\langle x_1,x_2\rangle,...,\langle x_{n-1},x_n\rangle\}$$

nazýváme ***dělením*** intervalu $\langle a,b\rangle$, body $x_0,...,x_n$ ***dělícími body***. Číslo

$$\nu(D)=\max(x_1-x_0,\ x_2-x_1,\ \dots,x_n-x_{n-1})$$

nazveme ***normou*** dělení D.
Je-li D dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ a pro každé $i=1,2,...,n$ jsou vybrány body ξ_i tak, že $\xi_i\in\langle x_{i-1},x_i\rangle$, pak dělení D nazveme ***dělením s vybranými body***.
V dalším budeme uvažovat jen dělení s vybranými body a budeme hovořit pouze o dělení.

Příklad:
$D=\left(\{\langle 0,\frac{1}{4}\rangle,\langle\frac{1}{4},\frac{2}{3}\rangle,\langle\frac{2}{3},1\rangle\},\{\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{3}{4}\}\right)$ je dělení intervalu $\langle 0,1\rangle$, přičemž $\nu(D)=\frac{5}{12}$.



Obr. 3.2: Dělení intervalu $\langle 0,1\rangle$

Integrální součet

Nechť $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ je funkce, D dělení intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak číslo

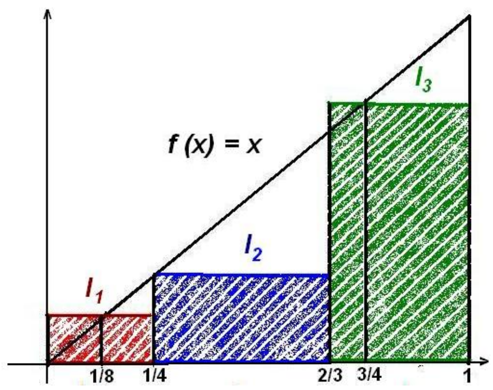
$$\mathcal{S}(D,f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

nazveme ***integrálním součtem*** příslušným funkci f s dělením D.

Příklad: Nechť $f(x) = x$,
D dělení intervalu $\langle 0,1\rangle$
z předchozího příkladu.

Potom

$\mathcal{S}(D,f) = f(\frac{1}{8})\cdot(\frac{1}{4}) +$
$+ f(\frac{1}{4})\cdot(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4})\cdot(1-\frac{2}{3}) =$
$= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{12} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{37}{96}.$



Obr. 3.3: Integrální součet funkce $f(x) = x$

Jestliže bude dělení intervalu dostatečně „jemné“, tedy bude-li se $\nu(D)$ blížit k nule, mohou se zřejmě integrální součty stále více blížit k obsahu „křivočarého lichoběžníku“ – obrazce, který je shora omezen grafem nezáporné funkce, zdola osou x a po stranách přímkami $x = a$, $x = b$. Jestliže tedy existuje číslo $\mathcal{J}$, vyjadřující obsah takové plochy, musí se dát s libovolnou přesností aproximovat integrálními součty. Tato myšlenka, přesně formulovaná, bude obsahem následující definice.

Určitý (Riemannův) integrál

Definice 3.27. Nechť $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkce. Řekneme, že f je ***integrovatelná*** (integrabilní, integrace schopná) na intervalu $\langle a,b\rangle$, existuje-li číslo $\mathcal{J} \in \mathbb{R}$ tak, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé dělení D intervalu $\langle a,b\rangle$, jehož norma $\nu(D) < \delta$, platí

$$|\mathcal{S}(D,f) - \mathcal{J}| < \varepsilon.$$

Číslo $\mathcal{J}$ nazýváme ***určitým*** (***Riemannovým***) ***integrálem*** funkce f od a do b a píšeme

$$\mathcal{J} = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Dále definujeme $\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$, speciálně tedy $\int\limits_a^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$.

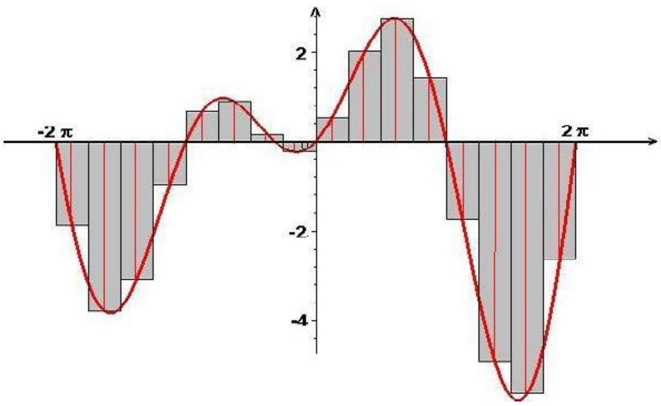
Poznámky k definici:

a) Ve výrazu $\int_a^b f(x)\,dx$ se a nazývá ***dolní mez*** integrálu, b ***horní mez***, f ***integrand***, x ***integrační proměnná.***

b) Pro integrační proměnnou můžeme volit libovolné označení:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\xi)\,d\xi \quad \text{atd.}$$

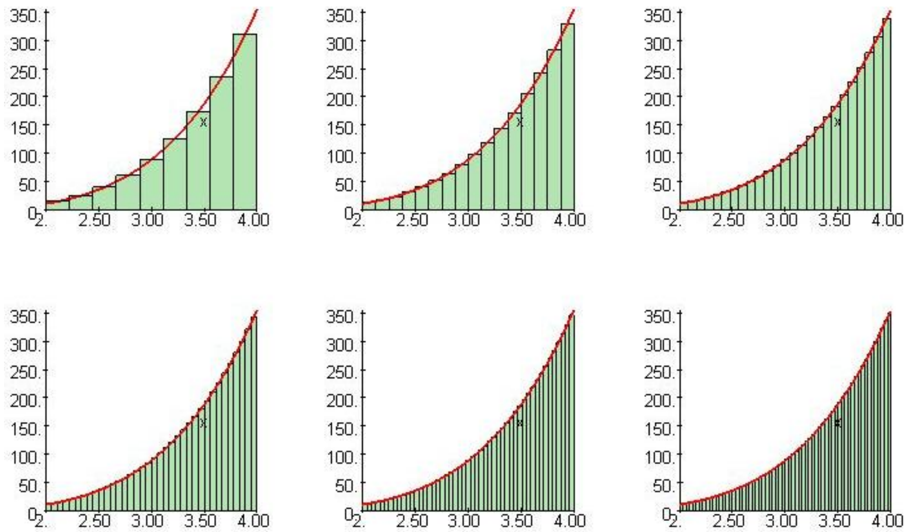
c) Určitý integrál je **číslo**. Pro funkci nezápornou na intervalu $\langle a, b\rangle$ vyjadřuje obsah plochy pod grafem funkce f a nad osou x. Pro funkci, která na intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá i záporných hodnot, vyjadřuje rozdíl obsahů ploch nad a pod osou x (viz následující obrázek; čísla ξ_i jsou vybrána vždy uprostřed příslušného intervalu).



Obr. 3.4: Integrální součet funkce $(x + 1)\sin x$

Definice integrálu jistě připomíná definici limity. Skutečně jde o jistý druh limity integrálních součtů pro normu dělení jdoucí k nule, která je obecnější než limita posloupnosti. Pro tuto limitu platí obdobná pravidla jako pro limity, se kterými jsme se již setkali: při limitních přechodech se zachovávají součty, součiny, limita je nejvýš jedna. Můžeme psát

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\nu(D)\to 0} \mathcal{S}(D, f).$$



Obr. 3.5: Integrální součty funkce $f(x) = x^4 \ln x$ pro $n = [9, 16, 25, 36, 49, 64]$

Věta 3.28. **(O existenci určitého integrálu)** *Má-li ohraničená funkce f na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ pouze konečně mnoho bodů nespojitosti, pak existuje určitý integrál* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Poznámka: Má-li funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ pouze konečně mnoho bodů nespojitosti, které jsou 1. druhu, říkáme, že je ***po částech spojitá*** na tomto intervalu. Podle předchozí věty je funkce po částech spojitá na $\langle a, b\rangle$ na tomto intervalu integrovatelná.

Příklad 3.29. Ukažme, že Dirichletova funkce χ definovaná předpisem

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x \text{ racionální} \\ 0 & \text{pro} \quad x \text{ iracionální} \end{cases}$$

není integrovatelná na žádném intervalu.
Buď D_1 libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že ξ_i jsou racionální čísla. Pak

$$\mathcal{S}(D_1, \chi) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_1 - x_{i-1}) = b - a.$$

Buď D_2 libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že ξ_i jsou iracionální čísla. Pak

$$\mathcal{S}(D_2, \chi) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_1 - x_{i-1}) = 0.$$

Předpokládejme, že existuje $\mathcal{J}$. Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{2}(b - a)$, pak existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé dělení s normou $\nu(D) < \delta$ je $|\mathcal{S}(D, \chi) - \mathcal{J}| < \varepsilon$, takže platí

$$b - a = |\mathcal{S}(D_1, \chi) - \mathcal{S}(D_2, \chi)| = |\mathcal{S}(D_1, \chi) - \mathcal{J} - (\mathcal{S}(D_2, \chi) - \mathcal{J})| \leq$$
$$\leq |\mathcal{S}(D_1, \chi) - \mathcal{J}| + |\mathcal{S}(D_2, \chi) - \mathcal{J}| < \varepsilon + \varepsilon = b - a$$

a to je spor.

Vlastnosti určitého integrálu

Věta 3.30. *Platí:*

$$\int_a^b 0\,dx = 0, \qquad \int_a^b dx = b - a,$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \textit{pro} \quad c \in \langle a, b\rangle,$$

$$f(x) \le g(x) \ \textit{na}\ \langle a, b\rangle \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \quad \forall k \in \mathbb{R},$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$

Označíme-li jako S (resp. L) sudou (resp. lichou) funkci, je

$$\int_{-a}^a S(x)\,dx = 2\int_0^a S(x)\,dx; \quad \int_{-a}^a L(x)\,dx = 0.$$

Důkaz tvrzení v předchozí větě se provede bezprostředně užitím definice integrálu pomocí integrálních součtů; je analogický postupu v následujícím příkladu.

Příklad 3.31. Ukážeme platnost poněkud obecnějšího případu druhého vztahu ve větě:

$$\int_a^b c\,dx = c(b - a).$$

Buď D libovolné dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom pro libovolný výběr čísel ξ_i pro příslušný integrální součet platí:

$$\mathcal{S}(D, c) = \sum_{i=1}^n c(x_i - x_{i-1}) = c(b - a),$$

tedy pro libovolné dělení D je

$$|\mathcal{S}(D, c) - c(b - a)| = 0 < \varepsilon.$$

Odhad určitého integrálu, věta o střední hodnotě

Věta 3.32. **(O střední hodnotě integrálního počtu)**

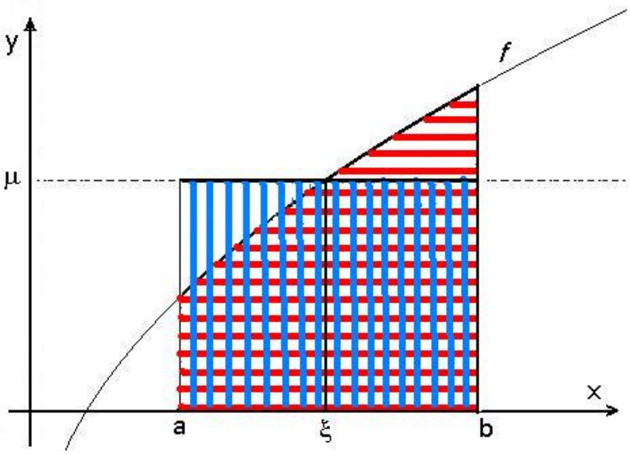
Nechť je funkce f integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$. Potom platí

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \quad \textit{neboli} \quad m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

$$\textit{a existuje číslo } \mu \in \langle m, M\rangle \textit{ tak, že platí} \quad \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

$$\textit{Je-li } f \textit{ spojitá na } \langle a, b\rangle, \textit{ pak } \exists\, \xi \in \langle a, b\rangle \textit{ tak, že} \quad f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Číslo μ se nazývá ***(integrální) střední hodnota*** funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$. Geometrický význam střední hodnoty je patrný z následujícího obrázku – obsah křivočarého lichoběžníka $\{(x,y)|x \in \langle a,b\rangle,\, 0 \leq y \leq f(x)\}$ (červeně) je roven obsahu obdélníka o rozměrech $b-a$ a μ (modře):



Obr. 3.6: Integrální střední hodnota

Příklad 3.33. Odhadněme

$$\int_0^1 f(x)\,dx, \quad \text{kde} \quad f(x) = \begin{cases} x^x & \text{pro} \quad x > 0, \\ 1 & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

Řešení. Funkce f má na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ nejvýš jeden bod nespojitosti (limitou prověříme, že je spojitá i v $x = 0$), je zde integrovatelná. □

Najděme maximum a minimum na $\langle 0, 1\rangle$:

$$f'(x) = x^x(\ln x + 1) \quad (x > 0);$$

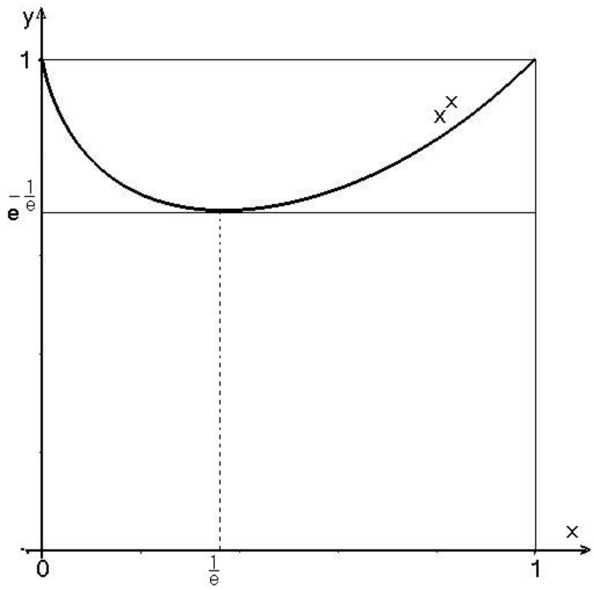
$$f'(x) = 0 \text{ pro } x = \frac{1}{e}.$$

$$f(0) = 1,\ f(1/e) = e^{-1/e},\ f(1) = 1.$$

Platí tedy

$$e^{-1/e}(\doteq 0,692) \le \int_0^1 f(x)\,dx \le 1.$$

(Maple vypočítá $\int_0^1 f(x)\,dx = 0{,}7834305107.$)



Obr. 3.7: $f(x) = x^x$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$

Fundamentální věta

Mějme graf nezáporné funkce f (viz obr. 3.8) a vyšetřujme funkci F, která každému x přiřazuje obsah světlešedě vybarvené plochy, tedy

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx.$$

Aproximujme přírůstek této funkce při změně x na $x + h$, tedy výraz $F(x + h) - F(x)$ pomocí obsahu obdélníka (vybarveného tmavěji), který je zřejmě roven součinu $f(x) \cdot h$; je tedy

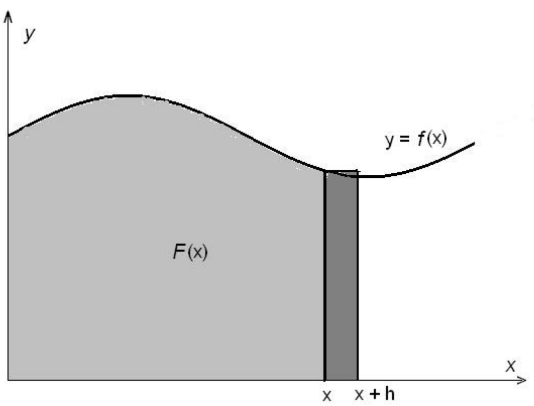
$$F(x + h) - F(x) \doteq f(x) \cdot h,$$

neboli

$$f(x) \doteq \frac{F(x + h) - F(x)}{h}.$$

Odtud limitním přechodem pro $h \to 0$ dostaneme

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = F'(x).$$



Obr. 3.8: Fundamentální věta

Tento pozoruhodný výsledek, který spojuje výpočet derivace (tedy směrnice) s výpočtem plošného obsahu, se nazývá fundamentální věta kalkulu (tj. diferenciálního a integrálního počtu).V tomto odstavci naznačený vztah odvodíme přesně.

Definice 3.34. Buď $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ integrovatelná funkce. ***Funkcí horní meze*** nazýváme funkci $\Phi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Obdobně ***funkcí dolní meze*** nazýváme funkci $\Psi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$\Psi(x) = \int_x^b f(t)\, dt.$$

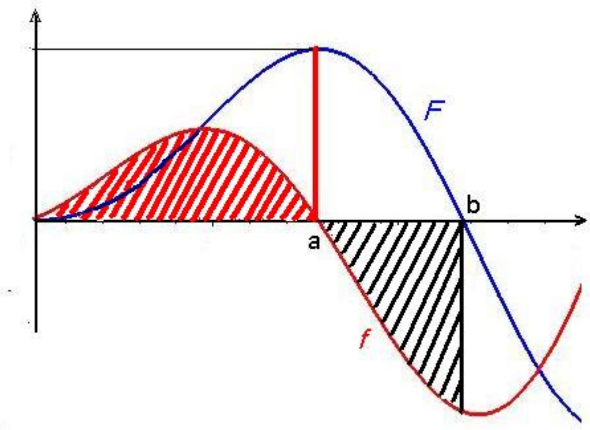
Věta 3.35. *Je-li funkce $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ v okolí bodu x spojitá, má funkce horní meze $\Phi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ v bodě x derivaci a platí $\Phi'(x) = f(x)$, tj. Φ je primitivní funkce k f.*

Důkaz naleznete v části Pro zájemce na konci kapitoly.

Ve vedlejším obrázku je modře graf funkce F a červeně graf funkce f, přičemž platí

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\, dt;$$

tedy například $F(a)$ – délka červené úsečky – je rovna obsahu červeně vyšrafované oblasti; dále je vidět, že $F(b) = 0$, tedy obsah červeně vyšrafované oblasti, je stejný jako obsah černě vyšrafované oblasti, která je pod osou x – obsahy se odečtou.



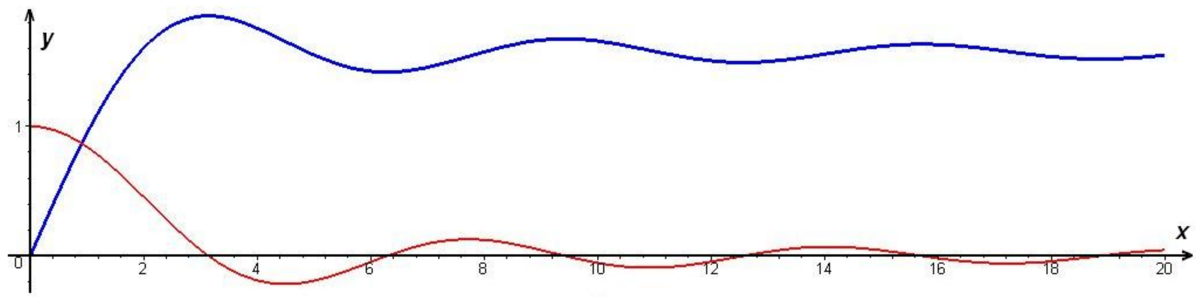
Obr. 3.9: Primitivní funkce jako funkce horní meze

Příklad 3.36. Najděme lokální extrémy funkce

$$\Phi(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt, \quad x > 0.$$

Řešení.

$$\begin{aligned} \Phi'(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad & \Phi'(x) = 0 \quad \text{pro} \quad \sin x = 0, \ \text{tj.}\, x = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}, \\ & \Phi'(x) > 0 \quad \text{pro} \quad x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), \quad k \in \mathbb{N}, \\ & \Phi'(x) < 0 \quad \text{pro} \quad x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi), \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$



Obr. 3.10: Grafy funkcí $\frac{\sin x}{x}$ a $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$

Tedy funkce Φ má maxima v bodech $x = (2k+1)\pi$, minima v bodech $x = 2k\pi$ pro $k \in \mathbb{N}$. □

Nyní odvodíme vzorec pro výpočet určitého integrálu ze spojité funkce:

Víme, že je-li f spojitá na $\langle a, b\rangle$, pak funkce horní meze Φ je její primitivní funkcí. Jestliže je F libovolná primitivní funkce k funkci f na $\langle a, b\rangle$, jistě platí

$$\Phi(x) = F(x) + c.$$

Konstantu c snadno vypočteme, položíme-li $x = a$. Pak platí

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0 = F(a) + c \quad \Rightarrow \quad c = -F(a).$$

Tedy

$$\Phi(x) = F(x) - F(a)$$

a speciálně pro $x = b$ dostáváme důležitý výsledek $\Phi(b) = F(b) - F(a)$, tj.

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a),$$

který jsme ovšem odvodili pouze pro spojitou funkci f. Tento vztah patří k základním tvrzením matematické analýzy a nazývá se Newton-Leibnizova věta.

Newton-Leibnizova věta

Věta 3.37. **(Newton-Leibnizova)** *Nechť f je funkce spojitá v $\langle a, b\rangle$.*

$$\textit{Jestliže v } \langle a, b\rangle \textit{ platí} \quad F'(x) = f(x), \ \textit{tj.} \int f(x)\, dx = F(x) + c, \quad \textit{potom}$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

$$\textit{Rozdíl}\quad F(b)-F(a)\quad \textit{označujeme symbolem}\quad [F(x)]_a^b\,.$$
$$\textit{Píšeme}\quad \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b\,.$$

Příklad 3.38.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{5\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Příklad 3.39.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin ax\,\sin bx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right]\,dx =$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a-b}\sin(a-b)x-\frac{1}{a+b}\sin(a+b)x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0;\ a,b\in\mathbb{Z},\ a\neq b.$$

Metoda per partes pro určité integrály

Ze vztahu pro integraci per partes pro neurčité integrály okamžitě vyplývá

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$$

Příklad 3.40. Máme vypočítat integrál

$$I=\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\sin 2x\,dx.$$

Řešení.

$$I=\left|\begin{array}{ll} u=\sin 2x & u'=2\cos 2x\\ v'=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} & v=2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\end{array}\right| = \left[2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\sin 2x\right]_0^{2\pi} - 4\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\cos 2x\,dx =$$
$$=\left|\begin{array}{ll} u=\cos 2x & u'=-2\sin 2x\\ v'=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} & v=2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\end{array}\right| = -4\left\{\left[2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\cos 2x\right]_0^{2\pi} + 4\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sin 2x\,dx\right\} =$$
$$=-4\left\{2\left(\mathrm{e}^{\pi}\cos 4\pi-1\right)+4\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sin 2x\,dx\right\}.$$

Dostali jsme vztah $I=8(1-\mathrm{e}^{\pi})-16\,I,$ tedy $I=\dfrac{8}{17}(1-\mathrm{e}^{\pi}).$

□

Viděli jsme, že použití metody per partes v určitém integrálu je analogické použití této metody při hledání primitivních funkcí, pouze do $u\,v$ hned dosazujeme meze. To může výpočet podstatně zjednodušit, jak jsme viděli v předchozím příkladu, kdy hodnota $u\,v$ v obou mezích byla nula.

Metoda substituce pro určité integrály

Věta 3.41. *1. Jestliže funkce $f \circ g$, g' jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$, potom*

$$\int_a^b f[g(x)]\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt,$$

2. jestliže f je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a $x = g(t)$ je monotonní funkce se spojitou derivací a oborem hodnot $\langle a, b\rangle$, potom

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f[g(t)]\, g'(t)\, dt.$$

Postup při užití substituční metody v určitém integrálu je opět analogický, jako při výpočtu primitivních funkcí. Pouze je třeba vypočítat nové meze (pro nové proměnné); to ovšem na druhé straně přináší výhodu v tom, že nemusíme na závěr zpětně dosazovat substituční funkci.

Příklad 3.42.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = \left| \begin{array}{cc} x = e^t & x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ dx = e^t\, dt & x = e \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{t}{e^t} e^t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Příklad 3.43. Ukažme, že pro integrovatelnou funkci platí

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\, dx.$$

Řešení. Využijeme vztahu $\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

Do prvního integrálu zaveďme substituci $x = g(t) = \frac{\pi}{2} - t$. Pro $x = 0$ je $t = \frac{\pi}{2}$, pro $x = \frac{\pi}{2}$ je $t = 0$. Funkce g je v intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ klesající, spojitá i se svou derivací $g'(x) = -1$. Je možno použít větu o substituci, a platí tedy

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right] (-1) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right] dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\, dt$$

a zadaná rovnost je splněna. □

K výpočtu určitého integrálu lze použít tento maplet. Zmázorní se zde i plocha, jejíž obsah (opatřený příslušným znaménkem) pomocí tohoto integrálu počítáme.

3.4 Aplikace určitého integrálu

Obsah rovinné oblasti

Přímo z definice určitého integrálu plyne, že plošný obsah P rovinné oblasti omezené čarami $y = 0$, $x = a$, $x = b$, kde $a < b$, a grafem kladné funkce $y = f(x)$ vypočítáme pomocí určitého integrálu

$$P = \int_a^b f(x)\,dx.$$

jak jsme mohli vidět v mapletu na konci předchozího odstavce.

Příklad 3.44. Vypočtěme obsah kruhu $x^2 + y^2 \leq r^2$.

Řešení. Platí

$$P = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} x = r\,\sin t & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dx = r\,\cos t\,dt & x = r \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 t\,dt =$$

$$= 2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,dt = 2r^2 \left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi r^2.$$

□

Obsah části roviny omezené shora grafem nezáporné funkce f a zdola grafem nezáporné funkce g na intervalu $\langle a, b\rangle$ zřejmě vypočteme jako $\int_a^b (f(x) - g(g)\,dx.$; stejné pravidlo ovšem platí i pro funkce, které nejsou na celém intervalu $\langle a, b\rangle$ nezáporné:
Je-li c konstanta, která je menší než minimum funkčních hodnot funkce g („spodní funkce“) na intervalu $\langle a, b\rangle$, můžeme grafy obou funkcí posunout o tuto konstantu v kladném směru osy y - obsah části roviny mezi grafy se nezmění a obě funkce již budou na tomto intervalu nezáporné:

$$P = \int_a^b [(f(x) + c) - (g(x) + c)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

.

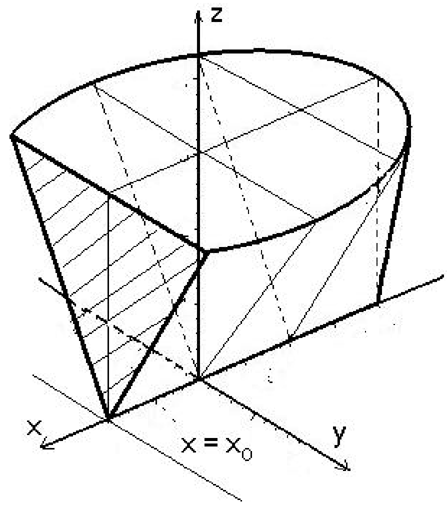
Pro výpočet a znázornění obsahu části roviny mezi grafy slouží tento maplet.

Objem tělesa

Buď dáno těleso (uzavřená oblast $M \subset \mathbb{R}^3$), jehož průmětem do osy x je interval $\langle a,\ b\rangle$. Nechť jeho řez rovinou o rovnici $x = x_0$ má obsah $u(x_0)$. Předpokládejme, že u je spojitá funkce v intervalu $\langle a,\ b\rangle$. Buď D dělení intervalu $\langle a,\ b\rangle$, pak $\mathcal{S}(D, u)$ značí přibližnou hodnotu objemu našeho tělesa. Zhruba řečeno, tato hodnota bude tím blíže ke skutečné hodnotě objemu, čím bude dělení jemnější. Proto je přirozené definovat objem tělesa jako

$$\lim_{\nu D \to 0} \mathcal{S}(D, u) = \int_a^b u(x)\,dx.$$

Příklad 3.45. V rovině $z = c$ leží kružnice o rovnici $x^2+y^2 = r^2$. Je-li $-r < x_0 < r$, protne rovina o rovnici $x = x_0$ kružnici ve dvou bodech (pro $x = \pm r$ v jednom bodě), osu x v jednom bodě. Tyto tři (dva) body spojíme úsečkami (úsečkou). Máme vypočítat objem takto vzniklého tělesa.



Obr. 3.11: Objem tělesa

Řešení.

$$u(x) = c\sqrt{r^2 - x^2},\ x \in \langle -r,\, r\rangle,$$

$$V = \int_{-r}^{r} c\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 2c\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx =$$

$$= 2c\,\frac{\pi r^2}{4} = \frac{1}{2}\pi r^2 c.$$

□

Objem rotačního tělesa

Buď f spojitá funkce v intervalu $\langle a,\, b\rangle$, uvnitř tohoto intervalu kladná. Předpokládejme, že část roviny omezená čarami o rovnicích $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$ rotuje kolem osy x. Vznikne rotační těleso, jehož průmět do osy x je interval $\langle a,\, b\rangle$. Obsah řezu rovinou o rovnici $x = x_0$ je obsah kruhu o poloměru $f(x_0)$, tedy objem rotačního tělesa vypočítáme podle vzorce

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

Příklad 3.46. Vypočítáme objem koule.

Zde je $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2},\ x \in \langle -r,\, r\rangle$.

$$V = \pi\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = 2\pi\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^r = 2\pi r^3\Big(1 - \frac{1}{3}\Big) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Zde najdete maplet pro výpočet a znázornění objemu rotačního tělesa.

Délka rovinné křivky

Buď f funkce definovaná v intervalu $\langle a,\, b\rangle$ a mající zde spojitou derivaci f'. Délku křivky L, která je grafem funkce f v tomto intervalu, vypočítáme pomocí vztahu

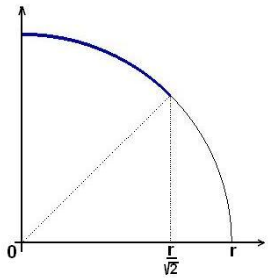
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Příklad 3.47. Určíme délku kružnice. Platí

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in \langle 0, r\rangle, \quad f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

$$L = 4\int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 4\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx;$$

Dostali jsme integrál z neohraničené funkce (v horní mezi není integrand definován). Budeme postupovat tak, že místo čtvrtkružnice vyjdeme z osminy kružnice – viz obrázek:



Obr. 3.12: K př. 3.47

$$L = 8\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} x = r\,\sin t & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ dx = r\,\cos t\, dt & x = \frac{r}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{array} \right| =$$

$$= 8r\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r\,\cos t}{r\,\cos t}\, dt = 8r\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = 8r\,[\,t\,]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi r.$$

Je-li jednoduchá rovinná křivka určená parametrickými rovnicemi

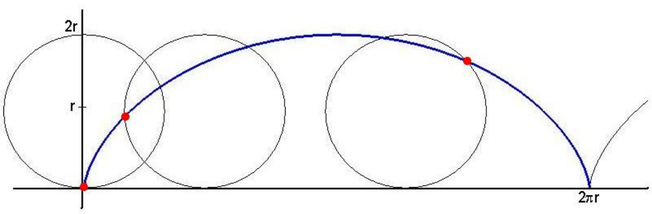
$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \ t \in \langle \alpha, \beta\rangle$$

tak, že funkce φ, ψ mají v intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ spojité derivace, pak její délka je dána vzorcem

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

Příklad 3.48. Vypočtěme délku jednoho oblouku cykloidy.

Řešení. Cykloida je křivka, kterou opisuje pevně zvolený bod na kružnici, jestliže se tato kružnice kotálí po přímce (viz následující obrázek). Jeden oblouk cykloidy je její část mezi těmi dvěma polohami zvoleného bodu, kdy leží současně na příslušné přímce:



Obr. 3.13: Cykloida

Cykloida má parametrické rovnice

$$x = \varphi(t) = r\,(t - \sin t),\ y = \psi(t) = r\,(1 - \cos t),\ \ t \in \langle 0,\, 2\pi\rangle.$$

$\varphi'(t) = r\,(1 - \cos t),\ \ \psi'(t) = r\,\sin t$, takže je

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(1-\cos t)^2 + r^2 \sin^2 t}\,dt = r \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt =$$

$$= 2r \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,dt = 2r \int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 2r \left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8r.$$

□

Pro zájemce

Důkaz věty o primitivní funkci jako funkci horní meze:

$$\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

V intervalu $\langle x, x+h\rangle$ je funkce f spojitá, tedy podle věty o střední hodnotě existuje $\xi \in \langle x, x+h\rangle$ tak, že

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi) = f(x + \vartheta h),\ \ 0 < \vartheta < 1.$$

Odtud plyne, že

$$\Phi'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x + \vartheta h) = f(x).$$

Shrnutí

V této kapitole jsme zavedli pojem určitého integrálu z ohraničené funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$; definovali jsme postupně

- dělení intervalu $\langle a, b\rangle$: systém intervalů $D = \{\langle x_{i-1}, x_i\rangle \mid i = 1, \ldots, n\}$, jejichž sjednocením je interval $\langle a, b\rangle$ a průnik libovolných dvou z těchto intervalů je nanejvýš koncový bod, přičemž $x_0 = a$, $x_n = b$,
- normu dělení: $\max(x_i - x_{i-1})$, tj. délka nejdelšího z intervalů, které tvoří dělení daného intervalu,
- dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ s vybranými body: v každém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ je vybrán bod ξ_i,
- integrální součet funkce f příslušný dělení D: $\mathcal{S}(D, f) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$,
- určitý integrál z funkce f od a do b: číslo, které lze s libovolnou (předem zvolenou) přesností aproximovat pomocí integrálních součtů, neboli limita integrálních součtů při normě dělení jdoucí k nule.

Pro funkci f nezápornou na intervalu $\langle a, b\rangle$ znamená $\int_a^b f(x)\,dx$ obsah plochy ohraničené shora grafem funkce f, zdola osou x a po stranách přímkami $x = a$ a $x = b$. Pro funkci nabývající kladných i záporných hodnot je tento integrál roven rozdílu obsahů ploch nad a pod osou x.

Formulovali jsme postačující podmínku pro existenci určitého integrálu:

- je-li f po částech spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ (tj. má-li zde nanejvýš konečně mnoho bodů nespojitosti 1. druhu), potom je zde integrovatelná, tedy $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje.

Uvedli jsme některé vlastnosti určitého integrálu:

- linearita: $\int_a^b (\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$,
- aditivita přes interval: pro $a < c < b$ je $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Pro výpočet určitého integrálu jsme odvodili

- Newton-Leibnizův vzorec: $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, je-li F některá primitivní funkce k funkci f,
- metodu per partes v určitém integrálu: postup je stejný jako u neurčitého integrálu (dosazujeme meze do $u\,v$),
- substituční metodu v určitém integrálu: analogicky jako při výpočtu primitivní funkce, pouze je třeba vypočíst meze pro nové proměnné.

V závěru kapitoly jsme se věnovali geometrickým aplikacím určitého integrálu; uvedli jsme vzorce pro:

- objem rotačního tělesa, které vznikne rotací části roviny omezené čarami o rovnicích $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$ kolem osy x: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$,
- délku křivky L, která je grafem funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$: $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$,
- délku křivky zadané parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$.

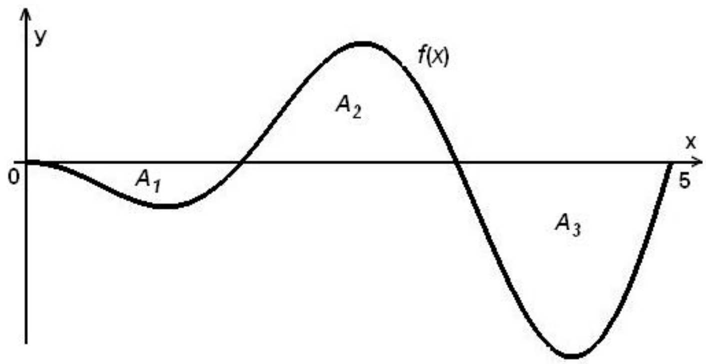
Otázky a úlohy

1. Jak definujeme určitý integrál z funkce f od a do b?

2. Jaký je jeho geometrický význam?

3. Jak tento integrál počítáme?

4. A_1, A_2, A_3 v následujícím obrázku označuje obsah příslušné části roviny omezené grafem funkce f a osou x. Vyjádřete $\int\limits_0^5 f(x)\,dx$ pomocí čísel A_1, A_2, A_3.



5. Ukažte, že platí následující tvrzení: Jsou-li f a g dvě funkce po částech spojité na $\langle a, b\rangle$ takové, že pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x) \leq g(x)$, potom plošný obsah množiny $M = \{(x, y) \,|\, a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}$ vypočítáme podle vzorce $P = \int\limits_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$.

6. V čem se liší použití metody per partes a substituční metody při výpočtu určitých integrálů od použití těchto metod při výpočtu neurčitých integrálů?

7. Užitím vhodné substituce ukažte, že platí tvrzení z věty 3.30:
$\int\limits_{-a}^{a} S(x)\,dx = 2\int\limits_0^a S(x)\,dx;\qquad \int\limits_{-a}^{a} L(x)\,dx = 0,$
kde S (resp. L) je sudá (resp. lichá) funkce.

8. Ukažte, že pro spojitou funkci f periodickou s periodou T platí
$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx.$

9. Najděte všechny chyby v následujícím „výpočtu“ (výsledek je správně!):
$\int\limits_0^2 x\,\sin x^2\,dx = |t = x^2| = \int\limits_0^2 (\sin t)\,x\,dx = \int\limits_0^2 (\sin t)\,\tfrac{1}{2}\,dt = \left[-\tfrac{1}{2}\,\cos t\right]_0^2 =$
$= \left[-\tfrac{1}{2}\,\cos x^2\right]_0^2 = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 4).$

10. Bez výpočtu daných integrálů rozhodněte, který z nich je větší:

a) $\int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx$ a $\int\limits_{-1}^{1} x^4\,dx$, b) $\int\limits_{1}^{2} \mathrm{e}^{x^2}\,dx$ a $\int\limits_{1}^{2} \mathrm{e}^{x}\,dx$.

Cvičení

1. Vypočítejte následující určité integrály

a) $\int\limits_{1}^{2} (x^2 - 3x + 2)\,dx$, b) $\int\limits_{0}^{3} |1 - 3x|\,dx$,

c) $\int\limits_{-4}^{-2} \frac{1}{x}\,dx$, d) $\int\limits_{0}^{2} \frac{2x-3}{x-3}\,dx$,

e) $\int\limits_{-4}^{-3} \frac{1}{x^2-4}\,dx$, f) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{2x^2+11x+12}\,dx$,

g) $\int\limits_{1}^{2} \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx$, h) $\int\limits_{0}^{3} (\sqrt[3]{x} + \sqrt{3x})\,dx$,

i) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, j) $\int\limits_{0}^{1} (e^x + 1)^3\, e^{2x}\,dx$,

k) $\int\limits_{1}^{\sqrt{\mathrm{e}}} \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx$, l) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx$,

m) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\,dx$, n) $\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\,dx$,

o) $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+x}\,dx$, p) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$,

q) $\int\limits_{1}^{2} 7\frac{\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$, r) $\int\limits_{1}^{3} \frac{1}{x\sqrt{x^2+5x+1}}\,dx$,

s) $\int\limits_{0}^{1} x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx$, t) $\int\limits_{1}^{\mathrm{e}} \ln x\,dx$,

u) $\int\limits_{0}^{1} x^3\,\mathrm{e}^{2x}\,dx$, v) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\,\sin x\,dx$,

x) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$, y) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x\,\operatorname{arctg} x\,dx$.

2. Vypočítejte
$$\int_0^3 f(x)\,dx, \quad \text{je-li} \quad f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{pro} \quad x \in \langle 0,1\rangle, \\ 0 & \text{pro} \quad x \in \langle 1,2\rangle, \\ (2-x)^2 & \text{pro} \quad x \in \langle 2,3\rangle. \end{cases}$$

3. Vypočítejte následující integrály ($[x]$ je celá část x)
$$\text{a)}\ \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x\,dx, \quad \text{b)}\ \int_{2}^{5} (-1)^{[x]}\,dx,$$
$$\text{c)}\ \int_{-2}^{3} [x]\,dx, \quad \text{d)}\ \int_{0}^{2} [\mathrm{e}^x]\,dx.$$

4. Vypočítejte
$$\text{a)}\ \left[\int_2^x \sqrt{5+7t^2}\,dt\right]', \quad \text{b)}\ \left[\int_x^1 \sin^3 t\,dt\right]', \quad \text{c)}\ \left[\int_{-x}^{x} \sqrt[3]{t^4+1}\,dt\right]'.$$

5. Část roviny nad osou x a pod grafem funkce $y = \sin x$ mezi $x = 0$ a $x = \pi$ je rozdělena na dvě části přímkou $x = c$. Najděte c, pro které platí, že obsah levé části je roven třetině obsahu pravé části.

6. Najděte $k \geq 0$ pro které platí $\int\limits_0^2 x^k\,dx = \int\limits_0^2 (2-x)^k\,dx$.

7. Najděte plošný obsah částí roviny omezených čarami o rovnicích:
   a) $y = 6x - x^2,\ y = 0,$ b) $y = x^2 - 2x,\ y = x,$
   c) $x + y = 2,\ y = 4x - x^2 - 2,$ d) $y = x^2,\ y^2 = x,$
   e) $y = x^2 - x - 6,\ y = -x^2 + 5x + 14,$ f) $y = 2x^2,\ y = x^2,\ y = 1,$
   g) $y = x^3,\ y = 4x,$ h) $xy = 4, x + y = 5,$
   i) $x = 0,\ x = \frac{1}{2},\ y = 0,\ y = x\,\mathrm{e}^{-2x},$ j) $y = \mathrm{e}^x,\ y = \mathrm{e}^{-x},\ x = \ln 2,$
   k) $x = \frac{\pi}{2},\ x = \pi,\ y = 0,\ y = x\cos\frac{x}{3},$ l) $y = \ln x,\ y = \ln^2 x,$
   m) $y = x,\ y = x + \sin^2 x,\ x = 0,\ x = \pi,$ n) $y = \mathrm{e}^{-x}\sin x,\ y = 0,\ x \in \langle 0, \pi\rangle.$

8. Vypočtěte plošný obsah části roviny ohraničené parabolou $y = x^2 - 6x + 8$ a jejími tečnami v bodech $A = [1,3]$ a $B = [4,0]$.

9. Vypočtěte objem těles, která vzniknou rotací částí roviny popsaných danými nerovnostmi kolem osy x:
   a) $-2 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x^2 + 4,$ b) $0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq \sqrt{4x},$
   c) $0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \sin x,$ d) $1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \frac{4}{x},$
   e) $-2 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq \cosh x,$ f) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq y \leq \operatorname{tg} x.$

10. Vypočtěte délku křivek o rovnicích:

a) $y = x^2,\ x \in \langle 0, 3 \rangle,$	b) $y = 2\sqrt{x},\ x \in \langle 1, 2 \rangle,$
c) $2y = x - x^2,\ x \in \langle 0, 1 \rangle,$	d) $y^2 = 4x^3,\ y > 0,\ x \in \langle 0, 2 \rangle,$
e) $y = \dfrac{2 + x^6}{8x^2},\ x \in \langle 1, 2 \rangle,$	f) $y = \mathrm{e}^x,\ x \in \langle 0, 1 \rangle,$
g) $y = \ln x,\ x \in \langle \sqrt{3}, \sqrt{8} \rangle,$	h) $y = 1 - \ln \cos x,\ x \in \langle \ln 2, \ln 5 \rangle,$
i) $y = \ln \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1},\ x \in \langle \ln 2, \ln 5 \rangle,$	j) $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2},\ x \in \langle 0, 1 \rangle.$

11. Vypočtěte délku křivek daných parametrickými rovnicemi:

a) $\begin{array}{l} x = t^2, \\ y = t - \frac{t^3}{3}, \end{array}\quad t \in \langle 0, \sqrt{3} \rangle,$	b) $\begin{array}{l} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t, \end{array}\quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle,$
c) $\begin{array}{l} x = \cos^4 t, \\ y = \sin^4 t, \end{array}\quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle,$	d) $\begin{array}{l} x = \sin^2 t, \\ y = \sin^2 t\ \mathrm{tg}\, t, \end{array}\quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{3} \rangle.$

Výsledky

1. a) $-\frac{1}{6}$, b) $\frac{65}{6}$, c) $-\ln 2$, d) $4 - 3\ln 3$, e) $\frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$, f) $\frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}$, g) $\ln\frac{32}{27}$, h) $6 + \frac{9}{4}\sqrt[3]{3}$, i) $\frac{\pi}{4}$, j) $\frac{\mathrm{e}^5}{5} + 3\frac{\mathrm{e}^4}{4} + \mathrm{e}^3 + \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{49}{20}$, k) $\frac{\pi}{6}$, l) $\frac{21}{16}\sqrt[3]{2} - \frac{9}{8}$, m) $\ln 2$, n) $\frac{4}{3}$, o) $\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{3}$, p) $2\ln 2 - 1$, q) $8 + \frac{3}{2}\pi\sqrt{3}$, r) $\ln(7 + 2\sqrt{7}) - \ln 9$, s) $1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$, t) 1, u) $\frac{1}{8}(\mathrm{e}^2 + 3)$, v) $\frac{1}{5}(\mathrm{e}^\pi + 1)$, x) $\frac{\pi}{36}(9 - 4\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$, y) $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$;
2. $\frac{5}{6}$;
3. a) 0, b) 1, c) 0, d) $14 - \ln 5040$;
4. a) $\sqrt{5 + 7x^2}$, b) $-\sin^3 x$, c) $2\sqrt[3]{x^4 + 1}$;
5. $\frac{\pi}{3}$;
6. všechna k;
7. a) 36, b) $\frac{9}{2}$, c) $\frac{9}{2}$, d) $\frac{1}{3}$, e) $\frac{343}{3}$, f) $\frac{2}{3}(2 - \sqrt{2})$, g) 8, h) $\frac{15}{2} - 8\ln 2$, i) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2e}$, j) $\frac{1}{2}$, k) $\frac{3}{4}(2\sqrt{3} - 1)\pi + \frac{9}{2}(1 - \sqrt{3})$, l) $3 - \mathrm{e}$, m) $\frac{\pi}{2}$, n) $\frac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{-\pi})$;
8. $\frac{9}{4}$;
9. a) $\frac{1792}{15}\pi$, b) 18π, c) $\frac{\pi^2}{2}$, d) 8π, e) $\frac{\pi}{4}(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^{-4})$, f) $\frac{\pi}{4}(4 - \pi)$;
10. a) $\frac{3}{2}\sqrt{37} + \frac{1}{4}\ln(6 + \sqrt{37})$, b) $\sqrt{6} - \sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{2\sqrt{6}+5}{2\sqrt{2}+3}$, c) $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{5})$, d) $\frac{2}{27}(\sqrt{19^3} - 1)$, e) $\frac{33}{16}$, f) $\sqrt{1 + \mathrm{e}^2} - \sqrt{2} + \ln\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{1+\mathrm{e}^2}}1$, g) $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$, h) $\ln \mathrm{tg}\,\frac{3\pi}{8}$, i) $\ln\frac{16}{3}$, j) $4 - 2\sqrt{2}$;
11. a) $2\sqrt{3}$, b) $2\pi^2$, c) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1 + \sqrt{2})$, d) $\sqrt{7} - 2 - \sqrt{3}\ln\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$.

3.5 Nevlastní integrály

Určitý integrál jsme definovali pro případ konečného intervalu $\langle a,\, b \rangle$ a ohraničené funkce $f : \langle a,\, b \rangle \to \mathbb{R}$. V této kapitole podáme definici tak, že od těchto omezujících předpokladů upustíme. Takový integrál se nazývá nevlastní na rozdíl od integrálů vlastních, o nichž jsme hovořili doposud.

Nevlastní integrál na neohraničeném intervalu

Definice 3.49. Buď f funkce definovaná v intervalu $\langle a, \infty)$. Nechť je f integrovatelná v intervalu $\langle a, \xi\rangle$ pro každé $\xi > a$. Nechť existuje vlastní limita

$$\lim_{\xi\to\infty} \int_a^\xi f(x)\, dx.$$

Pak tuto limitu nazýváme ***nevlastním integrálem*** funkce f v intervalu $\langle a, \infty)$ (se singularitou v horní mezi) a píšeme

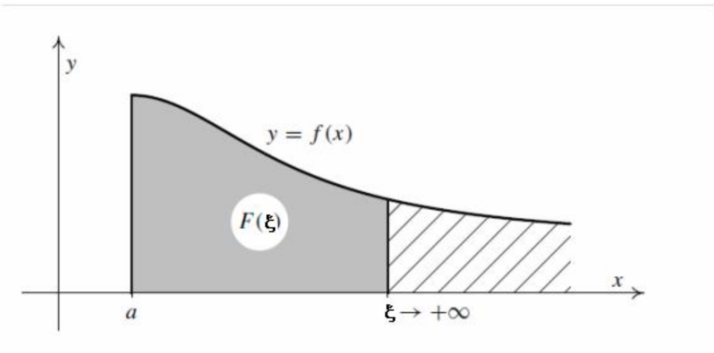
$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{\xi\to\infty} \int_a^\xi f(x)\, dx$$

a říkáme, že integrál $\int\limits_a^\infty f(x)\, dx$ ***konverguje***. Je-li funkce f taková, že předchozí limita je nevlastní nebo neexistuje, říkáme, že integrál $\int\limits_a^\infty f(x)\, dx$ ***diverguje***.

Podobně definujeme nevlastní integrál v intervalu $(-\infty, a\rangle$ (se singularitou v dolní mezi) pomocí limity:

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx = \lim_{\xi\to-\infty} \int_\xi^a f(x)\, dx,$$

jestliže pro každé $\xi < a$ existuje $\int\limits_\xi^a f(x)\, dx$ a jestliže existuje limita na pravé straně.



Obr. 3.14: Integrál na neohraničeném intervalu

Příklad 3.50. Máme vypočítat nevlastní integrály

$$\text{a)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\, dx, \qquad \text{b)} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\, dx, \qquad \text{c)} \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}\,.$$

Řešení. a)

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{\xi\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^\xi = \lim_{\xi\to\infty} \left[-e^{-\xi} + e^0\right] = 0 + 1 = 1.$$

b)

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\xi\to-\infty} \int_{\xi}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\xi\to-\infty} [\operatorname{arctg} x\,]_{\xi}^{0} =$$

$$= \lim_{\xi\to-\infty} [-\operatorname{arctg}\xi\,] = \frac{\pi}{2}.$$

c)

$$\text{Buď} \quad \alpha \neq 1. \quad \text{Potom}$$

$$\int_{1}^{\xi} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{1}^{\xi} = \frac{\xi^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}.$$

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{\xi^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} \infty & \text{pro} \quad \alpha < 1, \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{pro} \quad \alpha > 1. \end{cases}.$$

Dále je

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{\xi\to\infty} [\,\ln|x|\,]_{1}^{\xi} = \lim_{\xi\to\infty} [\ln|\xi| - \ln 1] = \infty.$$

Tedy $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha \leq 1$.

□

Integrály z neohraničených funkcí

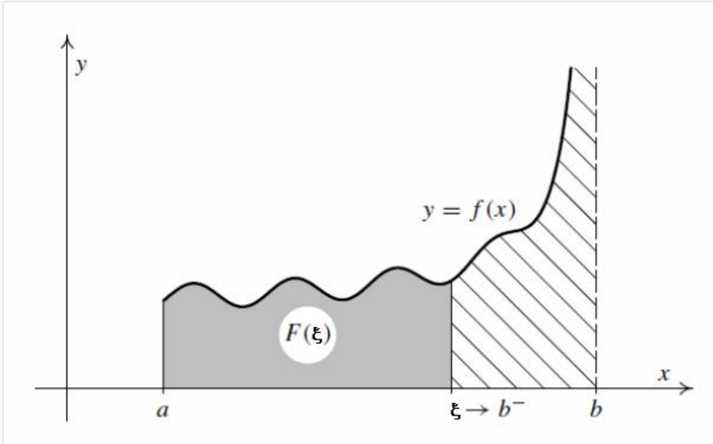
Definice 3.51. Nechť je funkce f definovaná v intervalu $\langle a,\, b)$ a v okolí bodu b je neohraničená. Nechť pro každé $\xi \in (a,\, b)$ existuje integrál $\int\limits_{a}^{\xi} f(x)\,dx$ a nechť existuje limita $\lim\limits_{\xi\to b^-} \int\limits_{a}^{\xi} f(x)\,dx$. Pak tuto limitu nazýváme ***nevlastním integrálem*** (se singularitou v horní mezi) funkce f v intervalu $\langle a,\, b)$ a píšeme

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\xi\to b^-} \int_{a}^{\xi} f(x)\,dx.$$

Podobně definujeme nevlastní integrál v intervalu $(a,\, b\rangle$ z funkce neohraničené v okolí bodu a (se singularitou v dolní mezi) vztahem

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\xi\to a^+} \int_{\xi}^{b} f(x)\,dx.$$

V obou případech říkáme opět, že integrál ***konverguje***, je-li limita napravo vlastní.



Obr. 3.15: Integrál z neohraničené funkce

Příklad 3.52. Vypočítáme následující integrály:

$$\text{a)} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{b)} \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}\,.$$

Řešení. a)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\xi\to 1^-} \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\xi\to 1^-} [\arcsin x]_0^\xi = \lim_{\xi\to 1^-} \arcsin\xi = \frac{\pi}{2}.$$

b)

Buď $\alpha \neq 1$. Potom

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\xi\to a^+} \int_\xi^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\xi\to a^+} \frac{(b-a)^{1-\alpha} - (\xi-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{pro} \quad \alpha < 1 \\ \infty & \text{pro} \quad \alpha > 1 \end{cases} ;$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\xi\to a^+} \int_\xi^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\xi\to a^+} [\ln(x-a)]_\xi^b =$$

$$= \lim_{\xi\to a^+} [\ln(b-a) - \ln(\xi-a)] = \infty.$$

Celkem tedy $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(x-a)^\alpha}$ konverguje pro $\alpha < 1$ a diverguje pro $\alpha \geq 1$.

□

Obecná definice nevlastního integrálu

V předchozích úvahách jsme vyšetřovali pouze ty nevlastní integrály, které měly singularitu v jedné mezi. Přirozeným způsobem lze tyto úvahy zobecnit:

Definice 3.53. Nechť je funkce f definovaná v intervalu (a, b), kde a může být $-\infty$ a b může být ∞, s výjimkou konečně mnoha bodů, v jejichž okolí je neohraničená. Nechť existují čísla $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ z intervalu (a, b) tak, že integrály

$$\int_a^{c_1} f(x)\,dx, \quad \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx, \quad \ldots, \quad \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx$$

mají singularitu pouze v jedné mezi a konvergují. Potom definujeme

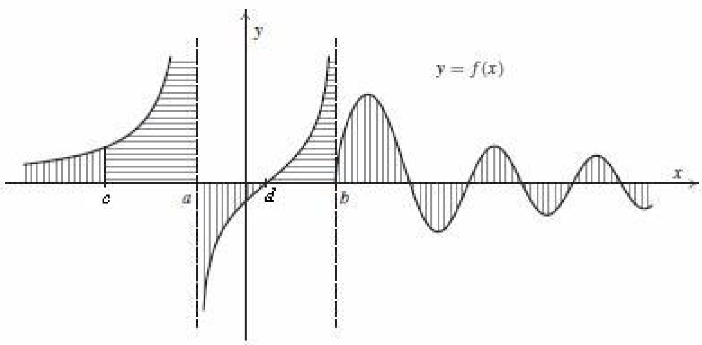
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx,$$

a říkáme také, že integrál nalevo konverguje.

Máme vypočítat integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ pro funkci f v následujícím obrázku. Integrál má zřejmě singularity v horní a dolní mezi, a dále v bodech a a b , v jejichž okolí je funkce neohraničená. Podle předchozí definice máme integrál vyjádřit jako součet takových integrálů, aby každý z nich měl singularitu vždy v jedné mezi – zvolíme body $c \in (-\infty, a)$ a $d \in (a, b)$ a potom

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Přitom zadaný integrál konverguje, konverguje-li každý z integrálů ve výrazu napravo.



Obr. 3.16: Obecný nevlastní integrál

Příklad 3.54.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx =$$

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{arctg} x = t & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \frac{1}{1+x^2}\,dx = dt & \end{array} \right| =$$

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{\operatorname{arctg} a}^0 t\,dt + \lim_{b\to\infty}\int_0^{\operatorname{arctg} b} t\,dt = \frac{1}{2}\left[0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 0\right] = 0.$$

Shrnutí

V této kapitole jsme zobecnili pojem určitého integrálu na případy, kdy buď integrační interval, nebo integrand je neohraničený; zavedli jsme:

- nevlastní integrál z funkce f na neohraničeném intervalu $\langle a,\infty)$ resp. $(-\infty,a\rangle$:
$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{\xi\to\infty}\int\limits_a^\xi f(x)\,dx$ resp. $\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim\limits_{\xi\to-\infty}\int\limits_\xi^a f(x)\,dx,$

- nevlastní integrál z funkce f, která je neohraničená v okolí horní meze b resp. dolní meze a:
$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\xi\to b^-}\int\limits_a^\xi f(x)\,dx$ resp. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\xi\to a^+}\int\limits_\xi^b f(x)\,dx,$

přitom říkáme, že

- nevlastní integrál má singularitu v horní mezi: je-li horní mez nevlastního integrálu ∞ nebo je-li integrand v okolí horní meze integrálu neohraničená funkce,

- nevlastní integrál má singularitu v dolní mezi: je-li dolní mez nevlastního integrálu $-\infty$ nebo je-li integrand v okolí dolní meze integrálu neohraničená funkce.

Má-li integrand v integračním intervalu (a,b) (a může být rovno $-\infty$ a b může být rovno ∞) konečně mnoho bodů nespojitosti, v jejichž okolí je neohraničenou funkcí, vyjádříme daný integrál jako součet integrálů přes dílčí intervaly tak, aby jednotlivé integrály měly singularitu pouze v jedné mezi. Jestliže všechny tyto integrály konvergují, je daný nevlastní integrál roven jejich součtu; v opačném případě diverguje.

Cvičení

1. Vypočítejte následující integrály:

a) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,dx$, b) $\int\limits_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$, c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$,

d) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$, e) $\int\limits_{0}^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$, f) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$,

g) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx$, h) $\int\limits_{-1}^{1} x^{-\frac{2}{3}}\,dx$, i) $\int\limits_{0}^{4} \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$,

j) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, k) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 2x}\,dx$, l) $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{1+2\cos x}\,dx$,

m) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,dx$, n) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\,dx$.

2. Vypočítejte plošný obsah části roviny ohraničené křivkou $y = \mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}$, $x \geq 0$ a souřadnými osami.

3. Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací části roviny ohraničené hyperbolou $xy = 1$ a osou x ($x \geq 1$) kolem osy x.

Výsledky

1. a) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, c) π, d) $\frac{\pi}{2}$, e) $\frac{1}{2}$, f) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, g) $\frac{\pi^3}{12}$, h) 9, i) diverguje, j) π, k) diverguje, l) diverguje, m) diverguje, n) $\ln 3$;

2. 3; **3.** π.

4 Nekonečné řady

4.1 Číselné řady

V této části rozšíříme operaci sečítání v $\mathbb{R}$ i v $\mathbb{C}$ na nekonečně mnoho sčítanců – zavedeme pojem nekonečné řady čísel a zodpovíme dvě základní otázky pro počítání s nekonečnými číselnými řadami:

- Jak sečíst nekonečnou množinu čísel?
- Platí pro nekonečné součty podobné zákony jako pro konečné součty, zejména zákon distributivní, asociativní a komutativní?

Nejdříve zavedeme potřebné pojmy – zobecníme pojem geometrické řady, který je znám ze střední školy. Postup použitý při určení jejího součtu, tj. utvoření tzv. částečných součtů a provedení limitního přechodu je návodem pro obecnou definici.

Základní pojmy

Definice 4.1. Nechť je dána číselná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

1. ***Nekonečnou řadou*** (nebo jen ***řadou***)nazýváme symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

2. Číslo a_n se nazývá ***n-tý člen*** nekonečné řady.

3. ***Posloupnost částečných součtů*** nekonečné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je posloupnost

$$(s_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \text{kde} \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

4. Řekneme, že nekonečná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***konverguje k číslu s***, a píšeme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, právě když $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

   Číslo s nazýváme ***součtem*** nekonečné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

5. Řekneme, že nekonečná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***diverguje***, jestliže diverguje posloupnost jejích částečných součtů.

Příklad 4.2. Řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$, $q \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ se nazývá ***geometrická***. Vyšetříme, kdy řada konverguje.

Řešení. 1. Nechť $q = 1$. Pak $s_n = n$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, tj. řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ je divergentní.

2. Nechť $q = -1$. Řada má tvar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 + (-1) + 1 + \cdots + (-1)^{n-1} + \cdots$, takže pro n-tý částečný součet platí

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{pro liché } n, \\ 0 & \text{pro sudé } n. \end{cases}$$

Posloupnost $(1,\, 0,\, 1,\, \dots)$ nemá limitu, proto tato řada diverguje.

3. Nechť $|q| \neq 1$. Platí

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} \\ q \cdot s_n &= \phantom{1 + {}} q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n \\ s_n - q \cdot s_n &= (1-q)\, s_n = 1 - q^n \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$s_n = \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Uvažujme následující případy pro $q \in \mathbb{R}$:

a) pro $|q| < 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, proto $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$;

b) pro $q > 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, proto $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$;

c) pro $q < -1$ limita $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ neexistuje.

Proto je geometrická řada pro $|q| \geq 1$ divergentní a pro $|q| < 1$ konvergentní. V tomto případě pro její součet platí:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

□

Stejné tvrzení platí i pro $q \in \mathbb{C}$.

Poznámka: Obvykle se nazývá geometrickou řadou řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a\, q^{n-1}$; uvidíme dále, že naše definice není na újmu obecnosti.

Rozhodnutí o konvergenci (resp. o divergenci) dané řady usnadní často následující věta:

Věta 4.3. **(Nutná podmínka konvergence)** *Jestliže řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak platí* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Důkaz věty naleznete na konciu kapitoly v části **Pro zájemce**.

Je třeba si uvědomit, že opak této věty neplatí – splnění podmínky $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ neznamená konvergenci řady, což ilustrujeme na následujícím příkladu:

Příklad 4.4. Ukážeme, že platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$:

$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n};$$

tedy

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty.$$

Odtud plyne, že zadaná řada diverguje, i když platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

Vlastnosti číselných řad

Konvergentní řady mají některé vlastnosti konečných součtů; první taková vlastnost je vlastnost analogická asociativnosti. Jak víme, platí pro konečný počet sčítanců asociativní zákon, např:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4).$$

Dejme do závorek v řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ určité skupiny členů podle tohoto schématu:

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + \cdot + a_{n_1})}_{b_1} + \underbrace{(a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdot + a_{n_2})}_{b_2} + \underbrace{(a_{n_2+1} + a_{n_2+2} + \cdot + a_{n_3})}_{b_3} + \cdots .$$

Přitom zachováváme původní pořadí členů řady; $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ jsou nějaká (libovolně zvolená) čísla. Tím vytvoříme řadu

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad \text{kde} \quad b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}.$$

Posloupnost částečných součtů této nové řady je vybraná posloupnost z posloupnosti částečných součtů řady původní, která je podle předpokladu konvergentní - podle věty o relativní limitě musí konvergovat také. Platí tedy

Věta 4.5. *Je-li řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní a má-li součet* s*, pak řada* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *je také konvergentní a má součet* s*.*

Věta obrácená k předchozí větě neplatí. Konverguje-li řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, může být řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, jak ukazuje následující příklad:

Příklad 4.6. Řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = [3 + (-3)] + [3 + (-3)] + \cdots$$

je konvergentní, neboť její posloupnost částečných součtů $(\bar{s_k}) = (0)$. Ale řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 + (-3) + 3 + (-3) + \cdots ,$$

která vznikne z dané řady odstraněním závorek je divergentní, neboť příslušná posloupnost částečných součtů nemá limitu (osciluje). V konvergentních nekonečných řadách „odstranění" závorek může narušit konvergenci.

Násobíme-li všechny členy řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ číslem k, dostaneme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k\, a_n$, pro kterou platí:

Věta 4.7. *Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní a má-li součet s, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k\, a_n$, kde k je libovolná konstanta, je rovněž konvergentní a má součet $\bar{s} = k\, s$.*

Důkaz věty naleznete v části **Pro zájemce** na konci kapitoly.

Předchozí věta je rozšířením distributivního zákona na nekonečný počet sčítanců.

Příklad 4.8. Je-li $|q| < 1$, platí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1} = \frac{a}{1-q}$.

Poznámka: Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní a je-li $k \neq 0$, je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ také divergentní (proč?)

Věta 4.9. *Jsou-li řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ konvergentní, je konvergentní i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ a má součet $s = A + B$.*

Důkaz věty je naznačen v části **Pro zájemce** na konci kapitoly.

Příklad 4.10. Máme najít součet řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{2}{3^n}\right)$.

Řešení. Platí $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 3$, tedy
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{2}{3^n}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} + 2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 5.$ □

V řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{p-1} + a_p + \cdots$ vynechejme prvních p členů. Dostaneme řadu $\sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_n = a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots$, kterou nazýváme ***zbytek po p-tém členu*** řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
Platí:

Věta 4.11. *Nechť $p \in \mathbb{N}$. Řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_n$ současně buď konvergují nebo divergují. Jestliže konvergují, pak platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n.$$

Z této věty plyne, že z hlediska konvergence nezáleží na tom, od kterého indexu začneme sečítat.

Kriteria konvergence

V předcházejících příkladech jsme většinou zkoumali konvergenci daných řad přímo z definice tak, že jsme dokázali existenci (popř. neexistenci) vlastní limity posloupnosti částečných součtů (s_n). Výhodou tohoto postupu je, že určením limity posloupnosti (s_n) je zároveň určen součet dané řady. K tomu však potřebujeme znát jednoduchý explicitní vzorec pro s_n, což se podaří jen ve velmi jednoduchých případech. Proto ve většině případů postupujeme jinak: Vyšetříme nejdříve konvergenci dané řady a její součet pak určíme přibližně. Vztahy, pomocí kterých vyšetřujeme konvergenci řad, se nazývají ***kriteria konvergence***. Základním takovým kriteriem je jistě nutná podmínka konvergence řady 4.3; další kriteria jsou formulována pro následující typ řad:

Definice 4.12. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá ***řadou s nezápornými členy***, je-li $a_n \geq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Tyto řady mají některé specifické vlastnosti:

a) posloupnost jejich částečných součtů $\{s_n\}$ je neklesající, neboť
$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$.

b) Je-li navíc tato posloupnost shora ohraničená, pak existuje vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, tj. řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.

Proto jsou řady s nezápornými členy buď konvergentní nebo divergují k ∞.

Základní kriterium, pomocí kterého se odvozují další (poněkud jednodušší pro vlastní výpočty) je

Věta 4.13. **(Srovnávací kriterium)**

Buďte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *řady s nezápornými členy a nechť platí* $a_n \leq b_n$ *pro skoro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *(tedy všechna s výjimkou nejvýš konečně mnoha). Potom platí:*

1. *konverguje-li řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *konverguje i řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;
2. *diverguje-li řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *diverguje i řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Příklad 4.14. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^n}$ je konvergentní:

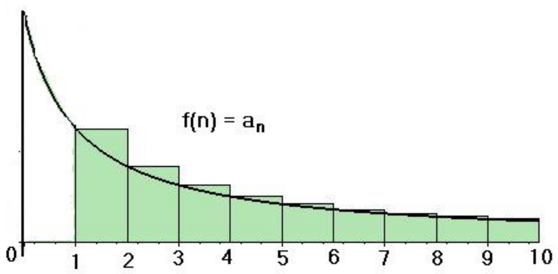
Platí $\frac{1}{n\,2^n} \leq \frac{1}{2^n}$, přičemž $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je konvergentní – je to geometrická řada s kvocientem $q = \frac{1}{2} < 1$. Tedy zadaná řada je také konvergentní.

Srovnávací kriterium má velkou nevýhodu v tom, že k vyšetřované řadě musíme zvolit nějakou jinou řadu, se kterou budeme srovnávat; je tedy předem nutné rozhodnout, jestli budeme ukazovat konvergenci nebo divergenci. Výhodnější je pracovat přímo se členy dané řady, tak jak to bude u dalších tří kriterií:

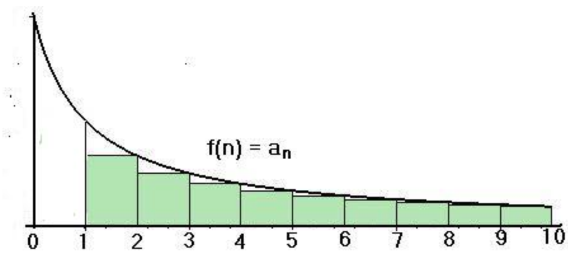
Věta 4.15. **(Integrální kriterium)**

Nechť f *je funkce definovaná na intervalu* $\langle 1, \infty)$, *která je na tomto intervalu nezáporná a nerostoucí. Nechť* $a_n = f(n)$ *pro* $n \in \mathbb{N}$. *Potom řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když konverguje nevlastní integrál* $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Platnost kriteria demonstrujeme v následujících dvou obrázcích.



Obr. 4.1: Integrální kriterium



Obr. 4.2: Integrální kriterium

Hodnota nevlastního integrálu z funkce f (v obrázku černou barvou) udává obsah plochy pod grafem funkce od jedné do nekonečna; součet příslušné nekonečné řady můžeme znázornit jako obsah (zelené) plochy tvořené obdélníky se základnou délky jedna a výškou rovnou funkční hodnotě v n.

a) Nechť $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ diverguje (první obrázek). Platí

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_1^n f(x)\,dx,$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n \geq \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx = \int_1^\infty f(x)\,dx = \infty,$$

tedy řada diverguje.

b) Nechť $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ konverguje (druhý obrázek). Potom je

$$s_n = a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq a_1 + \int_1^n f(x)\,dx,$$

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n \leq a_1 + \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx = a_1 + \int_1^\infty f(x)\,dx$$

a poslední integrál je podle předpokladu roven konečnému číslu – tedy řada konverguje.

Příklad 4.16. Vyšetříme konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, $a > 0$.

Položme $f(x) = \frac{1}{x^a}$ pro $x \in \langle 1, \infty)$, což je pro $a > 0$ klesající funkce. Platí

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^a} &= \lim_{t\to\infty} \int\limits_1^t x^{-a}\,dx = \frac{1}{a-1} \quad \text{pro } a > 1,\\
\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x} &= \lim_{t\to\infty} \int\limits_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} (\ln t) = \infty,\\
\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^a} &= \frac{1}{1-a}\left(\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{a-1}} - 1\right) = \infty \quad \text{pro } a \in (0, 1).
\end{aligned}$$

Proto daná řada konverguje pro $a > 1$ a diverguje pro $a \in (0, 1\rangle$.

Následující dvě kriteria se prověří srovnáním s geometrickou řadou a limitním přechodem:

Věta 4.17. **(Odmocninové kriterium – Cauchyovo)**

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Je-li*

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1, \qquad \textit{řada konverguje,}$$

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1, \qquad \textit{řada diverguje.}$$

V případě $\limsup \sqrt[n]{a_n} = 1$ *nelze o konvergenci řady tímto kriteriem rozhodnout.*

Věta 4.18. **(Podílové kriterium – d'Alembertovo)**

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Je-li*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \qquad \text{řada konverguje,}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \qquad \text{řada diverguje.}$$

V případě $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ *nelze o konvergenci řady tímto kriteriem rozhodnout.*

Příklad 4.19. Rozhodněte o konvergenci řad

$$\text{a)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3+\frac{1}{n})^n} \quad \text{b)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \quad \text{c)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$$

Řešení. a) Použijeme odmocninové kriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3} < 1.$$

Daná řada konverguje.

b) V n-tém členu se vyskytuje faktoriál, je vhodné podílové kriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Řada diverguje.

c) Použijeme podílové kriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,(2n+1)}{(2(n+1)+1)\,n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{2n^2+3n} = 1.$$

Kriterium nerozhodne; stejný výsledek dostaneme při použití odmocninového kriteria. Pro danou řadu však není splněna nutná podmínka konvergence:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

– řada diverguje.

□

Pro vyšetřování číselných řad lze použít tento maplet.

Absolutní konvergence

Základní kriteria konvergence jsou formulována pro řady s nezápornými členy, což se může jevit jako jisté omezení. Ovšem současně s řadou s obecnými členy můžeme vyšetřovat i řadu absolutních hodnot jejích členů; to nám umožní také vyšetřovat konvergenci řad komplexních čísel, kterou bez použití absolutní hodnoty nevyšetříme – uvědomme si, že do $\mathbb{C}$ nelze zavést uspořádání. Pro řadu, utvořenou z absolutních hodnot členů řady platí následující důležitá věta:

Věta 4.20. *Nechť je dána řada s libovolnými znaménky* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*. Utvořme řadu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$*; jestliže tato řada konverguje, potom původní řada je také konvergentní.*

Platnost věty nás vede k následující definici:

Definice 4.21. Jestliže konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $\quad a_n \in \mathbb{R}$ resp. $a_n \in \mathbb{C}$, říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***konverguje absolutně***.

Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, říkáme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ***konverguje neabsolutně***.

Příklad 4.22. Vyšetřeme konvergenci řad

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{\sin n}{n^2} \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(1+3\cdot(-1)^n)^n}{n\,8^n}$$

Řešení.

a) Ukážeme, že řada konverguje absolutně:

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2} \ \wedge\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,\text{konverguje} \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \text{konverguje.}$$

Tedy zadaná řada konverguje absolutně.

b) Pro absolutní konvergenci použijeme odmocninové kriterium; vyšetříme posloupnost n-tých odmocnin absolutních hodnot členů řady:

$$\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{|1+3\cdot(-1)^n|}{8\,\sqrt[n]{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} \frac{1}{2\,\sqrt[2k]{2k}} & \text{pro } n = 2k \\ \frac{1}{4\,\sqrt[2k-1]{2k-1}} = & \text{pro } n = 2k-1 \end{cases}$$

Platí

$$\lim_{k\to\infty} \tfrac{1}{2\,\sqrt[2k]{2k}} = \tfrac{1}{2},\quad \lim_{k\to\infty} \tfrac{1}{4\,\sqrt[2k-1]{2k-1}} = \tfrac{1}{4}$$

$$\text{Tedy}\qquad \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2} < 1$$

– řada konverguje absolutně.

□

Alternující řady

Definice 4.23. Nekonečná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$ se nazývá ***alternující***, právě když libovolné dva po sobě jdoucí členy mají opačná znaménka, tj. platí

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Každou alternující řadu lze psát ve tvaru $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, b_n$ nebo ve tvaru $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, b_n$, kde $b_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pro alternující řady platí následující kriterium konvergence:

Věta 4.24. (Leibnizovo kriterium)

Nechť (b_n) je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Potom alternující řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, b_n$ konverguje, právě když platí $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Příklad 4.25. Pomocí Leibnizova kriteria rozhodneme o konvergenci následujících alternujících řad:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, \frac{1}{n} \quad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\, \frac{3n+2}{2n-3} \quad \text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\, \frac{1}{n-\ln n}$$

Řešení. a) Tato řada se nazývá Leibnizova. Posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)$ je klesající a má limitu 0, proto podle Leibnizova kriteria konverguje (neabsolutně). Později ukážeme, že má součet $\ln 2$.

b) Platí $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{2}$, proto řada diverguje.

c) Nejprve ověříme, zda je posloupnost $\left(\frac{1}{n-\ln n}\right)$ klesající. Uvažujme funkci $y = \frac{1}{x-\ln x}$. Platí, že

$$y' = -\frac{1}{(x-\ln x)^2}\left(1 - \frac{1}{x}\right) < 0 \quad \text{pro} \quad x > 1,$$

tj. tato funkce je klesající na intervalu $(1, \infty)$, odkud plyne, že také posloupnost $\left(\frac{1}{n-\ln n}\right)$ je klesající.

Dále je $\lim\limits_{n\to\infty} (n - \ln n) = \lim\limits_{n\to\infty} \ln \frac{e^n}{n} = \infty$, a proto $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n-\ln n} = 0$. Daná řada konverguje.

$\square$

Přerovnání řad, násobení řad

Asociativní zákon, platný pro konečné součty, lze, jak jsme ukázali, v určitém smyslu rozšířit na konvergentní řady. Komutativní zákon, platný pro konečné součty, vyjadřuje, jak známo, nezávislost součtu na pořadí sčítanců. Tento zákon nelze rozšířit na konvergentní řady, jak je vidět na tomto příkladu:

Příklad 4.26. Leibnizova řada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

je konvergentní; označme její součet s. Dále je

$$\frac{s}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots .$$

Přepišme obě řady v následujícím tvaru (do druhé řady vložíme nuly, součet se nezmění):

$$\begin{aligned} s &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots \\ \frac{s}{2} &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots \end{aligned}$$

Sečtením těchto konvergentních řad dostaneme konvergentní řadu:

$$\frac{3}{2}s = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

Podrobnějším vyšetřením lze ukázat, že vzniklá řada obsahuje právě všechny členy Leibnizovy řady (a žádné jiné), ale v jiném pořadí.

Říkáme, že řada vznikla ***přerovnáním*** Leibnizovy řady; přitom přerovnáním řady o součtu s jsme dostali řadu o součtu $\frac{3}{2}s$.

Je tedy vidět, že komutativní zákon nelze rozšířit na konvergentní řady. Poznamenejme, že se dá ukázat platnost tvrzení:

a) *Libovolným přerovnáním absolutně konvergentní řady dostaneme absolutně konvergentní řadu o stejném součtu.*

b) *Je-li řada $\sum a_n$ neabsolutně konvergentní, pak vhodným přerovnáním této řady lze dostat divergentní řadu, popř. konvergentní řadu s libovolným předem daným součtem.*

Násobení řad

Pro násobení součtů o konečném počtu členů platí, jak známo, distributivní zákon – dva součty o konečném počtu členů násobíme podle tohoto zákona „člen po členu", tj. tak, že násobíme každý člen prvního z nich každým členem druhého a takto vzniklé součiny sečteme. Vzniká otázka, za jakých podmínek a do jaké míry lze platnost tohoto zákona rozšířit i na součty o nekonečném počtu členů, tj. na číselné řady. K tomuto účelu definujeme nejdříve součin řad:

Definice 4.27. ***Cauchyovským součinem řad*** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ rozumíme řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$, kde

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0.$$

Násobením daných dvou řad dostaneme tedy řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \cdots +$$

$$+(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0) + \cdots$$

Napíšeme-li do tabulky všechny součiny a_ib_k členů obou řad ($i = 0, 1, 2, \ldots, k = = 0, 1, 2, \ldots$), dostaneme schéma

$$\begin{array}{ccccc} a_0b_0 & a_1b_0 & a_2b_0 & a_3b_0 & \ldots \\ a_0b_1 & a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \ldots \\ a_0b_2 & a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \ldots \\ a_0b_3 & a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Každý člen c_n součinové řady je součtem členů ležících v „diagonálách“ tohoto schématu; je součtem takových součinů a_ib_k, že součet indexů $i + k = n$.

Pro takto definovaný součin řad platí

Věta 4.28. *Jsou-li řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B$ absolutně konvergentní, pak jejich Cauchyovský součin je absolutně konvergentní řada se součtem $A \cdot B$. Mimoto je absolutně konvergentní i řada, která ze součinové řady vznikne odstraněním závorek a má stejný součet.*

Příklad 4.29. Máme vynásobit řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n}$.

Řešení. Řady jsou zřejmě absolutně konvergentní a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Dále je

$$c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^0 =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \left((-1)^n + (-1)^{n-1} + \cdot + (-1)^0\right);$$

tedy je-li n liché, tj. $n = 2k + 1$, je $c_n = 0$, je-li n sudé, tj. $n = 2k$, je $c_n = \frac{1}{3^n}$.

Dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}}$$

to je geometrická řada s kvocientem $q = \frac{1}{9}$, tedy má součet

$$C = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{9}{8} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}.$$

□

Příklad 4.30. Ukážeme, že platí $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \left| (a+b)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad \text{tedy} \right| =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}$$

Numerická sumace

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní řada. Víme, že její součet s lze psát ve tvaru

$$s = s_n + R_n, \qquad \text{kde} \qquad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \text{a} \quad R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

je zbytek po n-tém členu. To znamená, že číslo R_n udává velikost chyby, které se dopustíme, jestliže přesnou hodnotu dané konvergentní řady aproximujeme částečným součtem. Přitom platí (řada je konvergentní!)

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (s - s_n) = s - s = 0.$$

V tomto odstavci uvedeme některé odhady pro velikost zbytku $|R_n|$.

Nejjednodušší tvar má tento odhad pro alternující řadu:

Věta 4.31. *Nechť $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Pak pro zbytek po n-tém členu alternující řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ platí $|R_n| < b_{n+1}$.*

Pokud daná řada není alternující, můžeme pro určování chyby použít následující dvě tvrzení, která plynou ze srovnávacího kriteria konvergence (s mocninnou řadou s kvocientem q) a z integrálního kriteria:

Věta 4.32. *Nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je číselná řada, pro kterou platí* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. *Pak pro zbytek* R_n *platí* $|R_n| \le |a_n| \, \frac{q}{1-q}$.

Věta 4.33. *Nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy. Nechť* $a_n = f(n)$*, kde* f *je nezáporná a nerostoucí funkce na intervalu* $\langle 1, \infty)$.
Pak pro zbytek R_n *platí* $R_n \le \int\limits_n^{\infty} f(x)\, dx$.

Příklad 4.34. Odhadneme zbytek řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, kde $a \in \mathbb{R},\ a > 1$.

Řešení. Daná řada konverguje. Platí

$$R_n \le \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a} \left[\frac{1}{x^{a-1}}\right]_n^{\infty} = \frac{1}{(a-1)\, n^{a-1}}.$$

Například pro řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ dostáváme $R_n \le \frac{1}{n}$, tj. její konvergence je „pomalá“. □

Příklad 4.35. Kolik členů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ je třeba sečíst, abychom její součet aproximovali s chybou menší než 0,001?

Řešení. Protože platí $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^3}$, plyne z předchozího příkladu odhad

$R_n < \frac{1}{2\,n^2}$. Nerovnost $\frac{1}{2\,n^2} \le 0{,}001$, tj. $n^2 \ge 500$, je splněna pro $n \ge 23$.

Stačí tedy sečíst 23 členů řady. □

Příklad 4.36. Kolik členů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ je třeba sečíst, abychom její součet aproximovali s chybou menší než 0,01?

Řešení. Platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \le \frac{1}{2}$ pro $n \ge 3$. Tedy pro $n \ge 3$ platí

$R_n \le a_n \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = a_n = \frac{2^n}{n!}$.

Nerovnost $\frac{2^n}{n!} < 0{,}01$, tj. $n! > 100 \cdot 2^n$, je splněna, jak se snadno přesvědčíme, pro $n \ge 8$.
Stačí tedy sečíst 8 členů řady. □

Pro zájemce

Důkaz nutné podmínky konvergence řady
Tvrzení věty je zřejmé:
Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Protože $a_n = s_n - s_{n-1}$, plyne odtud $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$.

Důkaz věty o násobení členů řady konstantou
Větu snadno dokážeme přímo z definice součtu řady jako limity posloupnosti částečných součtů:

$$\bar{s}_n = ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n = k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = k\, s_n; \qquad \bar{s} = \lim_{n\to\infty} \bar{s}_n = k \lim_{n\to\infty} s_n = k\, s.$$

Důkaz věty o součtu řad
Věta se prověří analogicky jako věta předchozí užitím definice součtu řady a vlastností limit konvergentních posloupností.

Shrnutí

V této kapitole jsme rozšířili sečítání i na nekonečný počet sčítanců a zkoumali jsme jeho vlastnosti – pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsme zavedli následující pojmy:

- nekonečná řada: symbol $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$,
- n-tý člen nekonečné řady: číslo a_n,
- posloupnost částečných součtů nekonečné řady: posloupnost $(\, s_n\,)_{n=1}^{\infty}$, kde $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,
- součet nekonečné řady: limita posloupnosti částečných součtů $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$;

přitom říkáme, že

- řada konverguje: je-li s vlastní,
- řada diverguje: je-li s nevlastní nebo neexistuje,
- řada konverguje absolutně: konverguje-li řada absolutních hodnot členů původní řady,

přitom z absolutní konvergence řady plyne její konvergence;

jedna z řad, jejíž součet umíme zjistit přesně, je:

- geometrická řada: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ pro $|q| < 1$;

V mnoha situacích nepotřebujeme znát přesný součet řady, stačí vědět, zda řada konverguje nebo diverguje. K ověření konvergence slouží kriteria konvergence.

Základním kriteriem pro konvergenci řady je

- nutná podmínka konvergence: jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

  Dále jsme uvedli kriteria pro řady s nezápornými členy, která u řad s členy s libovolnými znaménky slouží k zjištění absolutní konvergence.

Je-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s nezápornými členy, platí následující kriteria konvergence:

- srovnávací: je-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jiná řada, o které víme, že konverguje, potom platí-li $a_n \leq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$, konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$,
  jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje a platí $a_n \geq b_n$ pro skoro všechna $n \in \mathbb{N}$, diverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;
- integrální: je-li f nezáporná a nerostoucí funkce definovaná na intervalu $\langle 1, \infty)$ a $a_n = f(n)$ pro $n \in \mathbb{N}$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když konverguje nevlastní integrál $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$;
- odmocninové: je-li $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, řada konverguje,
  $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, řada diverguje;
- podílové: je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, řada konverguje,
  $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, řada diverguje;

pro neabsolutní konvergenci jsme uvedli kriterium, které rozhodne o konvergenci tzv. alternující řady – řady, jejíž členy pravidelně střídají znaménka:

- Leibnizovo kriterium: alternující řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, b_n$, kde $b_n > 0$, konverguje, platí-li $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost.

Dále jsme vyšetřovali vlastnosti nekonečných řad a operace s nekonečnými řadami; uvedli jsme následující pravidla:
je-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$=b, tedy řady jsou konvergentní, potom

- součet řady se nezmění, jestliže v ní sdružíme do závorek skupiny o konečně mnoha sčítancích,
- řadu můžeme násobit číslem člen po členu: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k\, a_n = k \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = k\, a,$
- dvě řady můžeme sečíst člen po členu: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = a + b;$

je-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = b$ a řady jsou absolutně konvergentní, potom

- součet řady se nezmění, jestliže v ní libovolně přerovnáme členy,
- dvě řady můžeme násobit člen po členu: $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = a \cdot b,$
  kde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0;$

tedy absolutně konvergentní řady mají všechny vlastnosti, které mají součty konečně mnoha sčítanců.

Na závěr kapitoly jsme se věnovali problému, jaké chyby se dopustíme, jestliže součet konvergentní řady nahradíme součtem několika jejích prvních členů. Je-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + R_n$, R_n je zbytek po n-tém členu řady, platí následující vztahy :

- je-li daná řada alternující a $|a_n| = b_n$, potom $|R_n| < b_{n+1}$,
- jestliže $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, potom $|R_n| \le |a_n| \frac{q}{1-q}$,
- jestliže $a_n = f(n)$, kde f je nezáporná a nerostoucí funkce na intervalu $\langle 1, \infty)$, potom $R_n \le \int\limits_n^{\infty} f(x)\, dx$.

Otázky a úkoly

1. Co je to nekonečná řada a jak definujeme součet nekonečné řady?

2. Kdy řekneme, že je nekonečná řada konvergentní resp. divergentní?

3. Pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Které z následujících tvrzení je pravdivé a proč?

   a) řada je konvergentní, ale k určení jejího součtu potřebujeme více informací,
   b) řada je konvergentní a její součet je roven nule,
   c) řada diverguje,
   d) nemáme dost informací k rozhodnutí, zda řada konverguje nebo diverguje.

4. Předpokládejme, že pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 6$. Které z následujících tvrzení je pravdivé a proč?

   a) řada je konvergentní, ale k určení jejího součtu potřebujeme více informací,
   b) řada je konvergentní a její součet je roven 6,
   c) řada diverguje,
   d) nemáme dost informací k rozhodnutí, zda řada konverguje nebo diverguje.

5. Pro posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $\lim_{n\to\infty} s_n = 3$. Které z následujících tvrzení je pravdivé a proč?

   a) řada je konvergentní, ale k určení jejího součtu potřebujeme více informací,
   b) řada je konvergentní a její součet je roven 3,
   c) řada diverguje,
   d) $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$,
   e) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
   f) nemáme dost informací k rozhodnutí, zda řada konverguje nebo diverguje;

6. Ukažte, že platí: konverguje-li řada s kladnými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$;

7. Zjistěte, zda součet

   a) dvou divergentních řad
   b) divergentní a konvergentní řady

   může být konvergentní.

Cvičení

1. Napište prvních pět členů nekonečné řady, je-li dán její n-tý člen:

$$\text{a)}\quad a_n = \frac{1}{(3-(-1)^n)^n},\quad \text{b)}\quad a_n = \frac{4n-3}{n^2+n+1},\quad \text{c)}\quad \frac{(1-\sin(n\frac{\pi}{2}))\cos(n\pi)}{n!};$$

2. Najděte n-tý člen následujících řad, jsou-li všechny další členy utvořeny podle stejného pravidla:

$$\text{a)}\quad 1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{10}+\dots,\qquad \text{b)}\quad 1+\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{9}+\tfrac{4}{27}+\dots,$$

$$\text{c)}\quad \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{15}+\tfrac{1}{35}+\tfrac{1}{63}+\tfrac{1}{99}+\cdots.$$

3. Najděte součet následujících nekonečných řad:

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)},\quad \text{b)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\tfrac{2}{3}\right)^n,\quad \text{c)}\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\tfrac{5}{7}\right)^n.$$

4. Vyjádřete následující periodické dekadické rozvoje racionálních čísel ve tvaru zlomku:

$$\text{a)}\quad 0{,}999\overline{9},\quad \text{b)}\quad 0{,}4\overline{90},\quad \text{c)}\quad 0{,}30\overline{521}.$$

5. Ukažte, že následující řady divergují:

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{7n+1},\quad \text{b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n},\quad \text{c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+2(-1)^n}{n+1}.$$

6. Pomocí srovnávacího kriteria rozhodněte o konvergenci řad:

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{100n+1},\qquad \text{b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2},\qquad \text{c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-4)^2},$$

$$\text{d)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(\tfrac{3}{8}\right)^n,\quad \text{e)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n},\quad \text{f)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}.$$

7. Pomocí integrálního kriteria rozhodněte o konvergenci řad:

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3+n^2},\quad \text{b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right),\quad \text{c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}},$$

$$\text{d)}\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{n\ln n},\quad \text{e)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n},\qquad \text{f)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}}.$$

8. Pomocí odmocninového kriteria rozhodněte o konvergenci řad:

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\frac{1}{n},\quad \text{b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^n,\quad \text{c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n+1)^{n+1}}.$$

9. Pomocí podílového kriteria rozhodněte o konvergenci řad:

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}, \quad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

10. Pomocí nutné podmínky konvergence řady ukažte, že platí:

$$\text{a)}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n!} = 0, \quad \text{b)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(4n)!} = 0, \quad \text{c)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0.$$

11. Pomocí vhodného kriteria rozhodněte o konvergenci řad:

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n, \quad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}, \quad \text{c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n},$$

$$\text{d)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}, \quad \text{e)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}, \quad \text{f)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n.$$

12. Najděte součet řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n + 7^{n+1}}{14^n}$.

13. Vynásobte následující řady a vyšetřete konvergenci vzniklé řady:

$$\text{a)}\quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a^n \text{ a } \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,(-a)^n, \quad \text{b)} \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\right)^2.$$

14. Najděte součet řady

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ s chybou menší než 0,1,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ s chybou menší než 0,01,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n-3}$ s chybou menší než 0,03.

Výsledky

1. a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{1}{1024} + \cdots$, b) $\frac{1}{3} + \frac{5}{7} + \frac{9}{13} + \frac{13}{21} + \frac{17}{31} + \cdots$, c) $0 + \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} + \frac{1}{4!} + 0 + \cdots$;
2. a) $\frac{1}{3n-2}$, b) $\frac{n}{3^{n-1}}$, c) $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; **3.** a) $\frac{1}{2}$, b) $-\frac{3}{5}$, c) $\frac{7}{12}$; **4.** a) 1, b) $\frac{54}{110}$, c) $\frac{30491}{99900}$; **5.** nutná podm.,
6. a) div., b) div., c) konv., d) konv., e) konv., f) div.;
7. a) konv., b) konv., c) konv., d) div., e) konv., f) konv. pro $a > 1$, div. pro $a \leq 1$; **8.** a) konv., b) konv., c) konv.;
9. a) konv., b) konv., c) konv,; **11.** a) konv., b) konv., c) konv., d) konv. neabs., e) konv. neabs., f) konv. abs.;
12. $14 + \frac{14}{17}$; **13.** a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a^{2n}$, konv. pro $|a| < 1$, b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a^n$, konv. pro $|a| < 1$;

4.2 Mocninné řady

Pojem nekonečné číselné řady jsme motivovali snahou rozšířit operaci sčítání na nekonečně mnoho sčítanců; v tomto odstavci podobným způsobem zobecníme polynomy.

Základní pojmy

Definice 4.37. Nechť $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ je číselná posloupnost, $x_0 \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$. Řada tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots + c_n(x-x_0)^n + \cdots$$

se nazývá ***mocninná řada*** a číslo x_0 její ***střed***.

Řekneme, že mocninná řada konverguje

1. v x_1, právě když konverguje číselná řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\,(x_1-x_0)^n$,
2. na množině M, právě když řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n$ konverguje pro každé $x \in M$.

Jestliže řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n$ konverguje na množině M a současně pro každé $x \notin M$ diverguje, nazývá se M ***oborem konvergence*** této řady.

Příklad 4.38. Máme najít obory konvergence daných mocninných řad:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n} \quad \text{b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x+2)^n \quad \text{c)}\ \sum_{n=0}^{\infty} 2^n n^2 x^{2n} \quad \text{d)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n},\ z \in \mathbb{C}$$

Řešení. a) Použijeme podílové kriterium pro vyšetření absolutní konvergence:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}(x-x_0)^{n+1}|}{|c_n(x-x_0)^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{|x-1|^n} = |x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |x-1|;$$

tedy daná řada konverguje absolutně pro $|x-1| < 1$. Pro $|x-1| > 1$ diverguje, protože zde není splněna nutná podmínka konvergence.
Situaci v krajních bodech konvergenčního intervalu vyšetříme tak, že hodnoty $x = 1 \pm 1$ do dané řady dosadíme:

- $x = 2:$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje
- $x = 0:$ $\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje neabsolutně

Tedy obor konvergence dané řady je interval $\langle 0,\,2\,)$; konvergence pro $x = 0$ je neabsolutní.

b) Použijeme odmocninové kriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(x-x_0)^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n|x+2|^n} = 2|x+2|;$$

Tedy řada konverguje absolutně pro $2|x+2| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x+2| < \frac{1}{2}$.
V krajních bodech $x = -2 \pm \frac{1}{2}$ není splněna nutná podmínka konvergence:

$x = -2 \pm \frac{1}{2}$: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot (-2 \pm \frac{1}{2} + 2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n$ diverguje.

Tedy obor konvergence dané řady je interval $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

c) Použijeme podílové kriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)^2 x^{2n+2}}{2^n n^2 x^{2n}} = 2x^2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) = 2x^2;$$

Řada konverguje absolutně pro $2x^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. V krajních bodech intervalu i pro $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ není splněna nutná podmínka konvergence.

Poznamenejme, že řada má tvar $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n n^2 x^{2n} = x^2 + 4x^4 + 9x^6 + \cdots$, tedy posloupnost koeficientů má každý druhý člen nulový: $(c_n)_{n=0}^{\infty} = (0, 0, 1, 0, 4, 0, 9, 0, \ldots)$.

d) Vyšetříme absolutní konvergenci pomocí odmocninového kriteria – vypočítáme limitu n-té odmocniny n-tého členu řady:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{z^n}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{2} = \frac{|z|}{2};$$

Řada konverguje pro $\frac{|z|}{2} < 1 \Rightarrow |z| < 2$ a diverguje pro $\frac{|z|}{2} > 1 \Rightarrow |z| > 2$ – oborem konvergence je tedy kruh se středem v 0 a poloměrem 2.

Pro $|z| = 2$ je $|c_n z^n| = 1$, tedy není splněna nutná podmínka konvergence a řada zde diverguje.

□

Poloměr konvergence

Viděli jsme, že obor konvergence byl v reálném oboru vždy interval souměrný podle středu řady, v komplexním oboru kruh se středem ve středu řady; to platí i obecně, jak říká následující věta:

Věta 4.39. *Pro obor konvergence mocninné řady jsou možné následující tři situace:*

1. *řada konverguje pouze ve svém středu,*
2. *řada konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$,*
3. *existuje kladné číslo r tak, že řada konverguje absolutně pro $|x - x_0| < r$ a diverguje pro $|x - x_0| > r$.*

Definice 4.40. Číslo r z předchozí věty se nazývá ***poloměr konvergence*** mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x - x_0)^n$.

V případě 1. resp. 2. předchozí věty klademe $r = 0$ resp. $r = \infty$.

Příklad 4.41. Najděte poloměr konvergence a součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2+(-1)^n)^n}$

Řešení. V případě, že řada konverguje, můžeme její členy po dvou uzávorkovat; platí tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2+(-1)^n)^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^{2k-1}}{(2+(-1)^{2k-1})^{2k-1}} + \frac{x^{2k}}{(2+(-1)^{2k})^{2k}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x^{2k-1} + \frac{x^{2k}}{3^{2k}} \right).$$

Vyšetříme řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{2k-1}$ a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{3^{2k}}$ zvlášť:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{2k-1} = x + x^3 + x^5 + \cdots$ je geometrická řada s kvocientem $q = x^2$, ta konverguje pro $|x| < 1$ absolutně;

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{3^{2k}}$ je geometrická řada s kvocientem $q = \frac{x^2}{9}$, konverguje absolutně pro $\frac{x^2}{9} < 1$, tedy pro $|x| < 3$.

Je-li tedy $|x| < 1$, konvergují absolutně obě řady a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2+(-1)^n)^n} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{3^{2k}} = \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-\frac{x^2}{9}} = \frac{x(9+9x-x^2-9x^3)}{(1-x^2)(9-x^2)}.$$

□

Posloupnost koeficientů řady v předchozím příkladu má následující tvar:

$$(c_n)_{n=1}^{\infty} = (1, \frac{1}{3^2}, 1, \frac{1}{3^4} 1, \frac{1}{3^6}, \dots)$$

Sestavme posloupnost $(\sqrt[n]{c_n})_{n=1}^{\infty}$:

$$(\sqrt[n]{c_n})_{n=1}^{\infty} = (1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}, \dots);$$

tato posloupnost má dvě hromadné hodnoty

$$h_1 = 1,\ h_2 = \frac{1}{3}$$

přičemž horní limita této posloupnosti $\limsup c_n = 1$.

Pomocí horní limity posloupnosti koeficientů mocninné řady se vždy dá vypočítat její poloměr konvergence:

Věta 4.42. *Pro poloměr konvergence mocninné řady* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ *platí*

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Pro vyšetřování mocninných řad lze použít tento maplet.

Derivace a integrace mocninných řad

Mocninná řada je vyjádřením svého součtu ve tvaru „nekonečného polynomu“; je přirozené ptát se, zda můžeme tuto řadu derivovat (nebo integrovat) člen po členu, a jak souvisí součet vzniklé řady s derivací součtu řady původní. Tohoto problému si nyní blíže všimneme.

Věta 4.43. *Nechť mocninná řada* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n$ *má poloměr konvergence* $r>0$. *Pak platí:*

a) *součet této řady je spojitá funkce na* $(x_0-r,\, x_0+r)$

b) *pro všechna* $x \in (x_0-r,\, x_0+r)$

$$\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(t-x_0)^n\right)dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x} c_n(t-x_0)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1},$$

přičemž mocninná řada na pravé straně má stejný poloměr konvergence r

c) *pro všechna* $x \in (x_0-r,\, x_0+r)$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(c_n\,(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\,c_n\,(x-x_0)^{n-1}$$

přičemž mocninná řada na pravé straně má stejný poloměr konvergence r.

Příklad 4.44. Určete součet řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ a pomocí integrace této řady určete součet číselné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,2^n}$.

Řešení. Je

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \quad \text{pro} \quad |x|<1$$

(je to geometrická řada s kvocientem x). Dále platí

$$\int x^{n-1}\,dx = \frac{x^n}{n} \qquad \text{a} \qquad \int_0^{\frac12} x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n\,2^n},$$

tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac12} x^{n-1}\,dx = \int_0^{\frac12}\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\right)dx = \int_0^{\frac12}\frac{1}{1-x}\,dx = -\ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

□

Příklad 4.45. Určete poloměr konvergence a součet mocninné řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,x^n$. Pomocí získaného výsledku sečtěte číselnou řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

Řešení. Obor konvergence zadané řady určíme podílovým kriteriem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad |x| < 1.$$

Platí tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

pro všechna $x \in (-1,\, 1)$. Odtud dosazením za $x = \frac{1}{2}$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2.$$

□

Příklad 4.46. Máme vypočítat s přesností na šest desetinných míst (tj. s chybou menší než 10^{-6}) integrál

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^4+81}\, dx$$

Řešení. Platí

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^4+81}\, dx = \frac{1}{81} \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{x^4}{3^4}}\, dx$$

Integrand $\frac{1}{1+\frac{x^4}{3^4}}$ můžeme chápat jako součet geometrické řady s kvocientem $q = -\frac{x^4}{3^4}$:

$$\frac{1}{1+\frac{x^4}{3^4}} = 1 - \frac{x^4}{3^4} + \left(\frac{x^4}{3^4}\right)^2 - \left(\frac{x^4}{3^4}\right)^3 + \cdots$$

která konverguje pro $|q| < 1$, tedy pro $|x| < 3$.
Protože platí $(0,1) \subset (-3,3)$, můžeme použít větu o integraci člen po členu, tedy

$$\int_0^1 \frac{1}{x^4+81}\, dx = \frac{1}{3^4} \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{x^4}{3^4}}\, dx = \frac{1}{3^4} \int_0^1 \left(1 - \frac{x^4}{3^4} + \left(\frac{x^4}{3^4}\right)^2 - \left(\frac{x^4}{3^4}\right)^3 + \cdots \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3^4} \left[x - \frac{x^5}{5\cdot 3^4} + \frac{x^9}{9\cdot 3^8} - \frac{x^{13}}{13\cdot 3^{12}} + \cdots \right]_0^1 = \frac{1}{3^4} - \frac{1}{5\cdot 3^8} + \frac{1}{3^{14}} - \frac{1}{13\cdot 3^{16}} + \cdots$$

$$3^{14} = 4782969 > 10^6 \qquad \Rightarrow \frac{1}{3^{14}} < 10^{-6}.$$

Víme, že chyba v alternující řadě je (v absolutní hodnotě) menší než absolutní hodnota prvního vynechaného členu, viz 4.31; proto platí

$$I = \frac{1}{3^4} - \frac{1}{5\cdot 3^8} + R, \quad \text{kde } |R| < 10^{-6}.$$

□

Známe-li součet mocninné řady , můžeme určovat součty číselných řad pro všechna x ležící uvnitř oboru konvergence – kruhu v $\mathbb{C}$ a intervalu v $\mathbb{R}$. Chceme-li určit součet číselné řady v krajním bodě konvergenčního intervalu v $\mathbb{R}$, je třeba použít následující Abelovu větu:

Věta 4.47. **(Abelova)** *Nechť mocninná řada* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n$ *má poloměr konvergence* r, *kde* $0 < r < \infty$ *a nechť je konvergentní v krajním bodě* x_0+r *(resp.* x_0-r*) konvergenčního intervalu. Pak součet* $s(x)$ *této řady je funkce zleva spojitá v bodě* x_0+r *(resp. zprava spojitá v bodě* x_0-r*).*

Příklad 4.48. Vyjádřete funkci $\ln(1+x)$ mocninnou řadou a odtud určete součet Leibnizovy řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}$.

Řešení. Pro $x \in (-1,\,1)$ Platí

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,x^n.$$

Odtud

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \cdots)\,dt =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n}.$$

Pro $x = 1$ dostaneme Leibnizovu řadu, která je (neabsolutně) konvergentní a podle Abelovy věty je její součet

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{x\to 1^-}\ln(1+x) = \ln 2.$$

□

Taylorovy řady

V tomto odstavci budeme řešit obrácenou úlohu, a to jak rozvinout danou funkci do mocninné řady – tedy k dané funkci najít mocninnou řadu, které je součtem.

V diferenciálním počtu jsme uvedli Taylorovu větu, kde je funkce vyjádřena ve tvaru polynomu a zbytku. Pro dostatečně mnohokrát diferencovatelnou funkci f jsme uvedli vyjádření

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\,(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

kde $R_{n+1}(x)$ je Taylorův zbytek, pro který platí $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}$ a ξ je mezi x_0 a x.

Je proto přirozené zavést následující definici:

Definice 4.49. Nechť funkce f má v bodě x_0 derivace všech řádů. Mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

nazýváme ***Taylorovou řadou*** funkce f v bodě x_0.

Poznamenejme, že v případě $x_0 = 0$ se řada nazývá též ***Maclaurinova***.

Obecně nemusí platit, že součet Taylorovy řady funkce f je roven této funkci. Uvedeme podmínky, kdy tato rovnost platí:

Věta 4.50. *Nechť funkce f má derivace všech řádů na jistém intervalu $\mathcal{J}$ a existuje takové číslo $k \in \mathbb{R}$, že*

$$|f^{(n)}(x)| < k \quad \text{pro všechna} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{a všechna} \quad x \in \mathcal{J}.$$

Potom pro libovolné $x_0 \in \mathcal{J}$ platí:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{na intervalu } \mathcal{J}.$$

Taylorovy (resp. Maclaurinovy) řady elementárních funkcí dostaneme pomocí jejich Taylorových polynomů, které jsme odvodili v kapitole 2.5. Obory konvergence těchto řad najdeme pomocí kriterií konvergence, nebo pomocí známého vztahu najdeme poloměr konvergence.

Taylorovy řady některých elementárních funkcí jsou v závěrečném shrnutí.

Příklad 4.51. Najdeme Maclaurinův rozvoj funkce $f(x) = (1 + x)^a$, $a \in \mathbb{R}$ – tzv. binomickou řadu.

Řešení. Vypočítáme potřebné derivace:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^a, & f(0) &= 1;\\
f'(x) &= a\,(1+x)^{a-1}, & f'(0) &= a;\\
f''(x) &= a(a-1)\,(1+x)^{a-2}, & f''(0) &= a(a-1);\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n)}(x) &= a(a-1)\cdots(a-n+1)(1+x)^{a-n}, & f^{(n)}(0) &= a(a-1)\cdots(a-n+1).
\end{aligned}$$

Pro n-tý koeficient řady tedy platí

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} = \binom{a}{n}$$

a řada má tvar

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \cdots + \binom{a}{n}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n.$$

Pomocí podílového kriteria určíme, že řada konverguje absolutně pro $|x| < 1$. Konvergence v krajních bodech intervalu závisí na čísle a. □

Pomocí již známých Taylorových řad můžeme rozkládat další funkce do řad pomocí dovolených operací – substitucí, derivací resp. aritmetických operací:

Příklad 4.52. Rozviňte následující funkce do Maclaurinovy řady a určete jejich obor konvergence:

$$\text{a)} \quad f(x) = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{b)} \quad f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad \text{c)} \quad \ln\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right).$$

Řešení. a) Položíme-li $-x^2 = t$, dostaneme funkci $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{-\frac{1}{2}}$. Její rozvoj do binomické řady je

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1} t + \binom{-\frac{1}{2}}{2} t^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{3} t^3 + \cdots + \binom{-\frac{1}{2}}{n} t^n + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!} t + \frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})}{2!} t^2 + \cdots + \frac{(-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{3}{2})\cdot(-\frac{5}{2})\cdot\cdots\cdot(-\frac{2n-1}{2})}{n!} t^n + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} t + \frac{3}{2^2\,2!} t^2 - \frac{15}{2^3\,3!} t^3 + \cdots + (-1)^n \frac{3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n\, n!} t^n + \cdots$$

na intervalu $(-1, 1)$. Dosazením $t = -x^2$ dostaneme hledanou Maclaurinovu řadu

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2^2\,2!} x^4 + \frac{15}{2^3\,3!} x^6 + \cdots + \frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\, n!} x^{2n} + \cdots,$$

$$|x| < 1.$$

b) Derivace dané funkce je $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, což je součet geometrické řady s kvocientem $-x^2$, tj. platí

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots \qquad \text{pro } |x| < 1.$$

Podle věty o integraci řady dostaneme pro $x \in (-1, 1)$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - \cdots)\, dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Vyšetříme krajní body konvergenčního intervalu $x = \pm 1$:

Po dosazení dostaneme alternující číselné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$, které konvergují, a podle Abelovy věty tedy nalezený rozvoj platí pro $x \in \langle -1, 1\rangle$.

c) Platí $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$. Víme, že

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \qquad x \in (-1,\, 1\rangle, \qquad \text{tedy}$$

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, \qquad x \in \langle -1,\, 1).$$

Proto

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots\right) =$$

$$= 2\,x + 2\,\frac{x^3}{3} + 2\,\frac{x^5}{5} + \cdots = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \qquad |x| < 1.$$

□

Příklad 4.53. Určete součet mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\,x^{2n}}{n!}$

Řešení. Platí

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\,x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x^{2n+1})' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}\right)' = \left(x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\right)'.$$

Přitom

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!} = e^{x^2},$$

tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\,x^{2n}}{n!} = (x\,e^{x^2})' = e^{x^2}(1+2x^2) \qquad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

□

Příklad 4.54. Pomocí známých řad najděte Taylorovu řadu funkce $\frac{3}{x^2-x-2}$

a) se středem $x_0 = 0$,

b) se středem $x_0 = 3$.

Řešení. Danou funkci rozložíme na parciální zlomky, dostaneme

$$\frac{3}{x^2-x-2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}$$

a každý zlomek budeme rozkládat zvlášť s využitím vztahu pro součet geometrické řady $\frac{1}{1-q} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$:

a) rozklad má být v mocninách x:

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}, \qquad \text{pro } \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \text{ tj. } |x| < 2$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n, \qquad \text{pro } |x| < 1,$$

$$\frac{3}{x^2-x-2} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n\right)x^n =$$

$$= -\frac{3}{2} + \frac{3}{4}x - \frac{9}{8}x^2 + \frac{15}{16}x^3 - \frac{33}{32}x^4 + \frac{63}{64}x^5 - \cdots, \quad \text{pro } |x| < 1.$$

V krajních bodech konvergenčního intervalu řada diverguje – není splněna nutná podmínka konvergence.

b) rozklad má být v mocninách $x-3$:

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-3+3-2} = \frac{1}{1+(x-3)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(x-3)^n$$

$$\text{pro } |x-3| < 1, \ \text{tj. } x \in (2,\, 4),$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x-3+3+1} = \frac{1}{4+x-3} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\frac{x-3}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{4^n}\,(x-3)^n$$

$$\text{pro } \left|\frac{x-3}{4}\right| < 1, \quad \text{tj. } x \in (-1,\, 7),$$

$$\frac{3}{x^2-x-2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(x-3)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{4^{n+1}}\,(x-3)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{n+1}-1}{4^{n+1}}\,(x-3)^n = \frac{3}{4} - \frac{15}{16}x + \frac{63}{64}x^2 - \frac{255}{256}x^3 + \cdots$$

$$\text{pro } x \in (2,\, 4).$$

V krajních bodech konvergenčního intervalu řada diverguje – není splněna nutná podmínka konvergence.

□

K nalezení Taylorových řad lze použít tento Maplet.

Pro zájemce

Exponenciální funkce e^z

Vyšetřujme řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ pro $z \in \mathbb{C}$.

Snadno se ukáže (pomocí podílového kriteria), že řada absolutně konverguje na celém $\mathbb{C}$, tedy její součet je zde spojitou funkcí. Označíme

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Počítejme derivaci této funkce:

$$(\exp z)' = \sum_{n=0}^{\infty} n\, \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp z$$

Z příkladu 4.30 víme, že

$$\exp(z_1 + z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = \exp z_1 \cdot \exp z_2$$

a analogicky

$$\exp(kz) = \underbrace{\exp z \cdot \exp z \cdot \ \ldots\ \cdot \exp z}_{k\times} = (\exp z)^k$$

Dosadíme-li do definiční řady $z = 0$, dostaneme $\exp 0 = 1$ a odtud

$$1 = \exp 0 = \exp(z - z) = \exp z \cdot \exp(-z) \quad \Rightarrow \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp z}.$$

Přitom se dá ukázat, že platí

$$\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

Proto budeme psát $\underline{\exp z = e^z}$.

Vyjádříme pro $t \in \mathbb{R}$ výraz e^{it} – najdeme reálnou a imaginární složku:

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} t^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Dostali jsme velmi důležitý Eulerův vzorec

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

a navíc

$$e^{ikt} = \left(e^{it}\right)^k \qquad \Rightarrow \qquad \cos kt + i \sin kt = (\cos t + i \sin t)^k .$$

Odtud dostaneme známou Moivreovu větu:

$$z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi) = |z| e^{i\varphi}, \qquad z^n = \left(|z| e^{i\varphi}\right)^n = |z|^n e^{ni\varphi} = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Vztah $z \in \mathbb{C},\ z = |z| e^{i\varphi}$ se nazývá ***exponenciální tvar komplexního čísla***.

Shrnutí

V této kapitole jsme zavedli pojmy

- mocninná řada se středem x_0: řada tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$,
- obor konvergence mocninné řady: množina M , v jejímž každém bodě řada konverguje a současně pro každé $x \notin M$ diverguje,
- poloměr konvergence mocninné řady: číslo r, pro které platí:
  - pro $|x-x_0| < r$ řada konverguje absolutně,
  - pro $|x-x_0| > r$ řada diverguje,

přičemž r vypočítáme podle vzorce $r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$;

je-li r poloměr konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$, potom v intervalu (x_0-r, x_0+r) platí:

- součet řady je spojitá funkce,
- řadu můžeme derivovat a integrovat člen po členu.

Dále jsme vyšetřovali problém, jak k dané funkci najít řadu, jejímž je součtem; zavedli jsme pojem

- Taylorova řada funkce f: řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$;

Taylorova řada se středem $x_0 = 0$ se nazývá Maclaurinova řada.

Taylorovy (Maclaurinovy) řady některých elementárních funkcí

e^x	$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$	$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$	$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$	$x \in \mathbb{R}$
$(1+x)^a$	$= 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \cdots + \binom{a}{n}x^n + \cdots$	$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n}x^n, \quad (*)$	$x \in (-1,\, 1)$
$\ln(1+x)$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$	$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},$	$x \in (-1,\, 1\rangle$
$\ln \frac{1+x}{1-x}$	$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right)$	$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$	$x \in (-1,\, 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$	$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$	$x \in \langle -1,\, 1\rangle$

$$(*) \qquad a \in \mathbb{R}, \binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}.$$

Otázky a úkoly

1. Co je to mocninná řada?

2. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ konverguje pro $x = 9$ a diverguje pro $x = -12$. Které z následujících tvrzení o této řadě je pravdivé a proč:

   a) konverguje pro $x = 7$,
   b) absolutně konverguje pro $x = -7$,
   c) absolutně konverguje pro $x = 9$,
   d) konverguje pro $x = -9$,
   e) diverguje pro $x = 10$,
   f) diverguje pro $x = 15$.

3. Předpokládejme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-1)^n$ konverguje pro $x = -4$ a diverguje pro $x = 9$. Které z následujících tvrzení o této řadě je pravdivé a proč:

   a) konverguje pro $x = 5$,
   b) absolutně konverguje pro $x = 5$,
   c) konverguje pro $x = 8$,
   d) absolutně konverguje pro $x = -4$,

e) diverguje pro $x = -7$,

f) diverguje pro $x = 6$.

4. Jestliže řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ konverguje pro všechna kladná x, musí konvergovat i pro záporná x?

5. Jestliže řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ diverguje pro $x = 3$, pro která další x musí divergovat?

6. Jestliže řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x+5)^n$ diverguje pro $x = -2$, pro která další x musí divergovat?

7. Jestliže řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-3)^n$ konverguje pro $x = 7$, pro která další x musí konvergovat?

8. Jestliže řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ má poloměr konvergence 3 a řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ má poloměr konvergence 5, co můžeme říci o poloměru konvergence řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$?

Cvičení

1. Najděte obor konvergence mocninných řad:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\, 5^n\, x^n$, b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$,

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 10^{2n}\, (2x-3)^n$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!x^n}{n^n}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}}$,

g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$, h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\, 3^n}$, i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\, (x+1)^n$,

j) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+4)^n}{n+2}$, k) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\, (x-1)^n$, l) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1}\, (x+2)^n$.

2. Derivováním nebo integrováním vhodné řady najděte součty řad

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n+1)\, x^{2n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{2n}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^{n-1}}{2^n}$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}\, x^{n-1}$, f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \left(x - \frac{1}{2}\right)^n$.

3. Vypočítejte následující integrály tak, že integrovanou funkci rozložíte do mocninné řady, a to s přesností na tři desetinná místa:

a) $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$, b) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^{10}}$.

4. Pomocí operací s řadami pro známé funkce najděte Maclaurinovy rozvoje následujících funkcí:

$$\text{a)}\ \frac{x}{2-x}, \qquad \text{b)}\ (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}, \qquad \text{c)}\ \cos^2 x,$$

$$\text{d)}\ (1-x)^{-2}, \quad \text{e)}\ \sin 3x + x\,\cos 3x, \quad \text{f)}\ (1+x)\operatorname{arctg} x.$$

Výsledky

1. a) $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$, b) $(-\infty, \infty)$, c) $\langle -9, -7\rangle$, d) $(\frac{299}{200}, \frac{301}{200})$, e) $(-e, e)$, f) $(-1, 1)$, g) $(-\infty, \infty)$, h) $\langle -2, 4)$, i) $(-2, 0)$, j) $(-5, -3\rangle$, k) $\{1\}$, l) $\langle -3, -1)$;
2. a) $\frac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2}$, b) $\frac{1}{(1-x)^2}$, c) $-\frac{1}{2}\ln|1-9x-3)^2|$, d) $\frac{2}{(2-x)^2}$, e) $\frac{1}{(1-x)^3}$, f) $\frac{4x-2}{(3-2x0^2}$; **3)** a) 0,747, b) 0,500;
4. a) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{32}x^5 + \cdots$, b) $1 - 2 * x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{1}{20}x^5 + \frac{7}{720}x^6 - \cdots$, c) $1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 - - \frac{2}{45}x^6 + \frac{1}{315}x^8 - \cdots$, d) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 8x^7 + \cdots$, e) $4x - 9x^3 + \frac{27}{5}x^5 - \frac{81}{56}x^7 + \frac{243}{1120}x^9 + \cdots$, f) $x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{5}x^6 - \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{7}x^8 + \frac{1}{9}x^9 - \cdots$.

5 Diferenciální počet II.

V posledních dvou kapitolách - diferenciálním a integrálním počtu funkcí více proměnných - se budeme pohybovat ve vícerozměrných prostorech; bylo by správné upřesnit, jaké prostory budeme mít na mysli.

Našim cílem bude vybudovat v těchto prostorech matematickou analýzu a ta, jak víme, zkoumá pojmy konvergence, spojitosti a diferencovatelnosti, jejichž zavedení vyžaduje pojem okolí bodu, tedy pojem vzdálenosti.

Jediné obecnější prostory, které se doposud zkoumaly a které jsou z tohoto hlediska vhodné, byly vektorové prostory se skalárním součinem, tj. unitární prostory, a speciálně eukleidovské prostory – aritmetické vektorové prostory, kde je skalární součin definován „po složkách". V této závěrečné části potřebné pojmy zopakujeme a dále shrneme základy o lineárních a kvadratických útvarech v rovině a prostoru - přímkách, rovinách, kuželosečkách a kvadrikách.

5.1 Bodové eukleidovské prostory

Připomeňme, že eukleidovský vektorový prostor je vektorový prostor konečné dimenze, ve kterém je definován skalární součin. Prvky dvoj- resp. trojrozměrného eukleidovského vektorového prostoru se dají představit jako šipky s počátečním koncem v pevném bodě, přičemž jaký je to bod se neuvádí. Při interpretaci aritmetických operací s těmito šipkami je možné v případě potřeby je různě přemisťovat do jiných bodů – tedy se vlastně současně uvažují body i vektory (šipky). V následující definici tuto intuitivní interpretaci precizujeme:

Definice 5.1. Nechť $\mathcal{V}$ je eukleidovský vektorový prostor, E množina taková, že pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ je určena bijekce množiny $E : X \mapsto X + \mathbf{v}$ pro niž platí:

1. $\forall X, Y \in E \;\; \exists!\, \mathbf{v} \in \mathcal{V},\; Y = X + \mathbf{v}$
2. $(X + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = X + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$.

Potom se E nazývá ***bodový eukleidovský prostor***,
$\mathcal{V}$ jeho ***zaměření***,
bijekce $X \mapsto X + \mathbf{v}$ ***translace*** o vektor $\mathbf{v}$ a
$\dim \mathcal{V}$ ***dimenze*** prostoru E.

Je-li například $\mathcal{V} = \mathbb{E}_2$ – aritmetický vektorový prostor se standardním skalárním součinem dimenze 2 a $E = \mathbb{R}^2$, je $\mathbb{R}^2$ spolu se zaměřením $\mathbb{E}_2$ bodový eukleidovský prostor – prostor bodů a vektorů v rovině.

Místo $Y = X + \mathbf{v}$ píšeme také $Y - X = \mathbf{v}$.
Bod X resp. Y nazýváme ***počátečním*** resp. ***koncovým*** bodem vektoru $\mathbf{v}$.
Nechť $P \in E$, $\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$ báze prostoru $\mathcal{V}$.

Pro každý bod $X \in E$ má vektor $\mathbf{x} = X - P$ vyjádření

$$\mathbf{x} = \sum x_i \mathbf{b}_i, \qquad \text{tedy} \qquad X = P + x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n.$$

Systém $\{P, \mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$ se nazývá ***soustava souřadnic***,
P ***počátek souřadnic***,
$x_1, ..., x_n$ ***souřadnice*** bodu X a
$\mathbf{x} = X - P$ ***polohový vektor*** bodu X.

Vzdálenost bodů $X, Y \in E$ je $\|X - Y\|$,
tedy velikost vektoru s počátečním bodem A a koncovým bodem B.

Souřadnice bodů budeme psát v hranatých závorkách: $X = [x_1, ...x_n]$, souřadnice vektorů, tak jak jsme zvyklí, v kulatých závorkách.

Je-li $(\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n)$ ortonormální báze, potom se $\{P, \mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$ nazývá ***kartézská soustava souřadnic***.

Soustava souřadnic

$$\{P_0, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) \qquad \text{kde} \qquad P_0 = [0, ..., 0],\ \mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0), ..., \mathbf{e}_n = (0, ..., 0, 1)$$

se nazývá ***kanonická soustava souřadnic***.

V úvodu této kapitoly jsme se zmínili, že nás bude zajímat především dvoj- a trojrozměrný prostor; v trojrozměrném prostoru je vhodné zavést kromě skalárního součinu ještě dva další typy součinů vektorů:

Vektorový a smíšený součin v $\mathbb{E}_3$

Definice 5.2. Řekneme, že dvě báze $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ a $(\mathbf{v'}_1, \mathbf{v'}_2, \mathbf{v'}_3)$ v eukleidovském prostoru $\mathbb{E}_3$ jsou ***souhlasně (nesouhlasně) orientované***, je-li determinant matice přechodu kladný (záporný).
Všechny báze v $\mathbb{E}_3$ se tak rozpadají na dvě disjunktní třídy souhlasně orientovaných bází. Prohlásíme-li báze jedné třídy za kladně orientované a báze druhé třídy za záporně orientované, řekneme, že jsme prostor $\mathbb{E}_3$ orientovali.

V dalším předpokládejme, že $\mathbb{E}_3$ je orientovaný. Označme $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ některou pevně vybranou ortonormální kladně orientovanou bázi.

Definice 5.3. Buďte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}_3$,

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \ \ \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}, \ \ \mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}.$$

Vektorový součin vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ je vektor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

neboli (symbolicky)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Smíšený součin vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ je číslo

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

neboli

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Z předchozí definice je vidět, že vektorový a tedy i smíšený součin podstatně závisí na tom, že vektory jsou trojice. Na prostory jiné dimenze než tři tyto pojmy nezobecňujeme.

Vektorový součin je definován pomocí souřadnic vektorů; mohlo by se zdát, že bude záviset na volbě báze. Bez důkazu formulujeme následující větu:

Věta 5.4. *Vektorový součin nezávisí na volbě kladně orientované ortonormální báze.*

Přímo z definice se prověří následující

Početní pravidla:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \\ \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha\mathbf{b}), \\ \mathbf{a} \times \mathbf{a} &= \mathbf{o}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \ \ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \ \ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Na závěr ještě uvedeme některé vlastnosti vektorového součinu:

Věta 5.5. ***Vlastnosti vektorového součinu:***

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$,

2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o} \iff \mathbf{a}, \mathbf{b}$ *jsou lineárně závislé,*

3. *jsou-li* **a**,**b** *lineárně nezávislé, potom* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ *je kladně orientovaná báze v* $\mathbb{E}_3$*,*

4. $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \; \|\mathbf{b}\| \sin \varphi$*, kde* φ *je úhel vektorů* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$*.*

Důkaz naleznete v části **Pro zájemce** na konci kapitoly.

Pro zájemce

Důkaz vlastností vektorového součinu

1. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$ a podobně pro $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}$.

2. $(\Leftarrow)$ $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ lineárně závislé $\Rightarrow \mathbf{a} = \alpha \mathbf{b}$;
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\alpha \mathbf{b}) \times \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{b} \times \mathbf{b}) = \alpha \mathbf{o} = \mathbf{o}$.
$(\Rightarrow)$ Jsou-li $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ lineárně nezávislé, potom podle Steinitzovy věty existuje $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_3$ tak, že $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}$ jsou lineárně nezávislé; tedy $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x}$ je determinant regulární matice a je různý od nuly, tedy $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq 0$.

3. Nechť $\mathbf{A}$ je matice přechodu od $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ k $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Tedy

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ a_2 & b_2 & -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ a_3 & b_3 & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) > 0.$$

4. Nejdříve ukážeme, že platí
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.$$
Nechť $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ je kladně orientovaná ortonormální báze taková, že $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{i}', \mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{i}' + \beta_2 \mathbf{j}'$. Potom
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{vmatrix} = \alpha \beta_2 \mathbf{k}' \;\Rightarrow\; (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \alpha^2 \beta_2^2;$$
$$\|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \alpha^2(\beta_1^2 + \beta_2^2) - (\alpha \beta_1)^2 = \alpha^2 \beta_2^2.$$
Tedy
$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b})\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2 \left(1 - \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}\right)^2\right) =$$
$$\|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = \|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2 \sin^2 \varphi.$$

Otázky a úkoly

1. Co je to bodový eukleidovský prostor?
2. Co je to kartézská soustava souřadnic?
3. Kdy řekneme, že jsme trojrozměrný bodový eukleidovský prostor orientovali?
4. Jak definujeme vektorový a smíšený součin?
5. Jsou dány vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{E}_3$. Ukažte, že
   (a) vektory $\mathbf{a} \times \mathbf{d}$, $\mathbf{b} \times \mathbf{d}$, $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ jsou lineárně závislé
   (b) vektory $\mathbf{a} - \mathbf{d}$, $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ jsou lineárně závislé, jestliže platí $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{d}$ a $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{d}$.

Cvičení

1. V $\mathbb{E}_3$ určete $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$, je-li $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
2. V $\mathbb{E}_3$ vypočítejte
   (a) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$, je-li $\|\mathbf{a}\| = 1$, $\|\mathbf{b}\| = 5$ a $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -3$
   (b) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, je-li $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ a $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{o}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$
3. V $\mathbb{E}_3$ zjednodušte

$$a)\quad \mathbf{i} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) + (\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) \qquad b)\quad (2\mathbf{i} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$

4. V $\mathbb{E}_3$ určete vektor $\mathbf{x}$, který je ortogonální k vektorům $\mathbf{a} = (6, 3, 0)$ a $\mathbf{b} = (1, 7, 2)$ a pro který platí $\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = 6$, kde $\mathbf{c} = (4, -4, -2)$.

5.2 Funkce více proměnných

Pojem funkce dvou a více proměnných, definiční obory, graf

Definice 5.6. ***Reálnou funkcí*** v $\mathbb{R}^n$ rozumíme zobrazení

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ X \mapsto f(X) \end{cases}.$$

Protože libovolný bod $X \in \mathbb{R}^n$ je popsán pomocí svých n souřadnic $x_1, \ldots, x_n$, závisí hodnota funkce f v bodě $X = [x_1, \ldots, x_n]$ na n hodnotách $x_1, \ldots, x_n$. Z tradičních důvodů se proto funkce v $\mathbb{R}^n$ nazývají ***funkcemi n reálných proměnných.***

Budeme se převážně zabývat funkcemi v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$, tedy funkcemi dvou a tří proměnných, kde se k označení proměnných obvykle používá několik písmen místo písmen s indexy, např.:

$$f = f(x, y) \text{ v } \mathbb{R}^2, \quad f = f(x, y, z) \text{ v } \mathbb{R}^3.$$

Příklad 5.7. Objem V rotačního válce o poloměru r a výšce v je dán vzorcem

$$V = \pi r^2 v.$$

Tímto vzorcem je každé dvojici čísel $[r, v]$ jednoznačně přiřazeno číslo V – objem válce. Je tedy tímto vzorcem definována funkce dvou proměnných $V = V(r, v)$. I když výraz má smysl pro libovolné hodnoty r, v, je přirozené vzít za definiční obor funkce množinu

$$\left\{[r, v] \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0, v > 0\right\}.$$

Příklad 5.8. Gravitační pole hmotného bodu o hmotnosti M je charakterizováno gravitačním (Newtonovým) potenciálem. Zvolíme-li v prostoru kartézskou soustavu souřadnic tak, aby hmotný bod ležel v jejím počátku, je hodnota potenciálu U v bodě $P = [x, y, z] \neq [0, 0, 0]$ dána vzorcem

$$U = \frac{-\kappa M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

kde $\kappa > 0$ je tzv. gravitační konstanta. Jde zřejmě o funkci v $\mathbb{R}^3$.

Nechť se v tomto gravitačním poli pohybuje další hmotný bod o hmotnosti m. Stav tohoto systému je určen uspořádanou šesticí $(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$, kde první tři souřadnice udávají polohu pohybujícího se bodu v prostoru v daném časovém okamžiku a poslední tři souřadnice jsou souřadnicemi vektoru hybnosti v tomto časovém okamžiku. Uspořádané šestice tvoří tzv. stavový prostor daného systému, je to tedy prostor $\mathbb{R}^6$. Kinetická energie E_k systému ve stavu $S = (x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$ je dána vzorcem

$$E_k(S) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2).$$

I když z tohoto vzorce je patrné, že E_k závisí pouze na třech proměnných, je nutno E_k považovat za funkci na stavovém prostoru, tj. za funkci šesti proměnných, i když se zde všechny proměnné efektivně nevyskytují.

To se stane zřejmějším, jestliže si uvědomíme, že celková energie E je součtem energie kinetické a potenciální a je dána vzorcem

$$E(S) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{\kappa Mm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Příklad 5.9. Cobbova - Douglasova produkční funkce Jestliže výstup (produkce za určité časové období) Q výrobního podniku závisí na množství investovaného kapitálu K a na využívání pracovní síly L předpisem

$$Q(K, L) = A \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha},$$

kde A je určitá konstanta a pro α platí $0 < \alpha < 1$, pak funkce uvedeného tvaru se nazývá *Cobbova - Douglasova produkční funkce.* Tato funkce má následující důležitou vlastnost, reflektující situaci z praxe:
Jestliže se kapitálový vstup K zvětší m-krát a současně se také velikost využívané pracovní síly L zvětší m-krát, pak se výstup Q zvětší m-krát:

$$Q(mK, mL) = A{\cdot}(mK)^{\alpha}{\cdot}(mL)^{1-\alpha} = A{\cdot}m^{\alpha}{\cdot}K^{\alpha}{\cdot}m^{1-\alpha}{\cdot}L^{1-\alpha} = m{\cdot}A{\cdot}K^{\alpha}{\cdot}L^{1-\alpha} = m{\cdot}Q(K, L).$$

Příklad 5.10. Booleovské neboli logické funkce. Nechť n je přirozené číslo a nechť množina M_n obsahuje všechny uspořádané n-tice čísel 0 nebo 1, tj.

$$M_n = \{[a_1, \dots, a_n] : a_i \in \{0, 1\}, 1 \le i \le n\}.$$

Každá funkce $b : M_n \to \{0, 1\}$ se nazývá *booleovskou* nebo *logickou funkcí* n proměnných. Je to tedy speciální případ reálné funkce n proměnných. Booleovská funkce je jednoznačně určena tabulkou svých hodnot. V následující tabulce jsou uvedeny některé (ze 16 možných) booleovských funkcí dvou proměnných (logické spojky, které jsou také booleovské funkce, zde neuvádíme):

x	y	$min(x, y)$	$max(x, y)$	$p_1(x, y)$	$p_2(x, y)$	$d(x, y)$	$f(x, y)$	$g(x, y)$
0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1	0

Obr. 5.1:

Příklad 5.11. Je dána funkce $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Přirozený definiční obor této funkce tvoří body, pro které platí $1 - x^2 - y^2 \ge 0$, tedy $D_f = \{[x, y] \mid x^2 + y^2 \le 1\}$, což je uzavřený kruh se středem v počátku a s poloměrem 1.

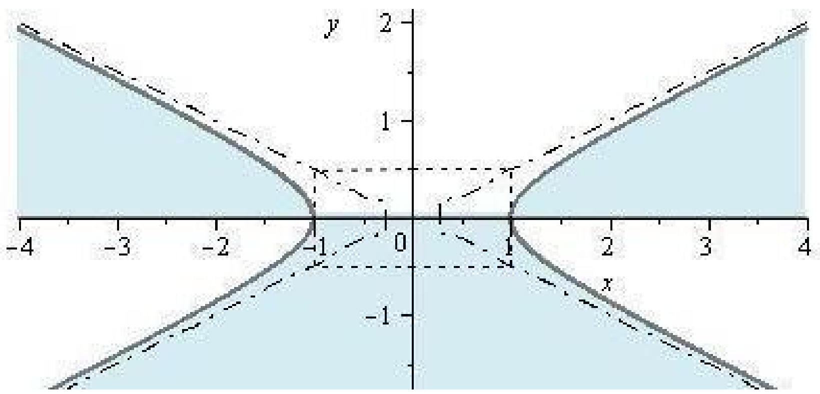
Příklad 5.12. Vyšetříme přirozený definiční obor funkce

$$f(x,y)=\sqrt{y(x^2-4y^2-1)}+\frac{1}{\ln(4-x^2+4y)}$$

Zřejmě musí platit

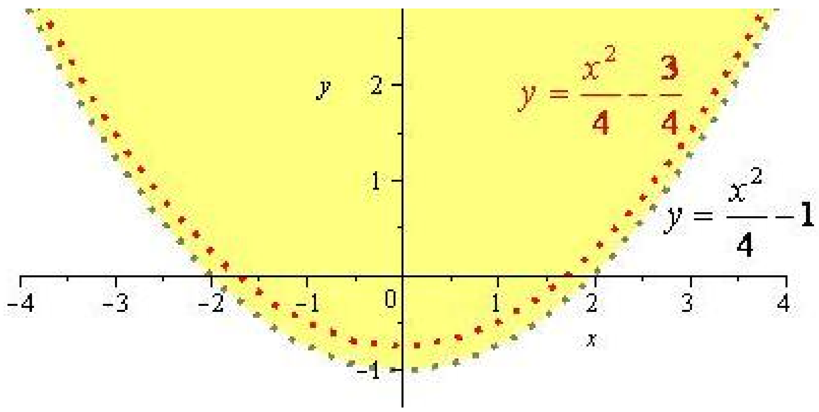
$$y(x^2-4y^2-1)\geq 0 \quad\wedge\quad 4-x^2+4y>0 \quad\wedge\quad 4-x^2+4y\neq 1$$

Křivka o rovnici $x^2-4y^2-1=0$ je rovnoosá hyperbola s reálnou osou x a asymptotami $y=\pm\frac{x}{2}$, první podmínku splňují ty body „uvnitř“ hyperboly, které mají y-ovou souřadnici kladnou a body „vně“ hyperboly, které mají y-ovou souřadnici zápornou, a dále body na hyperbole a ose x:



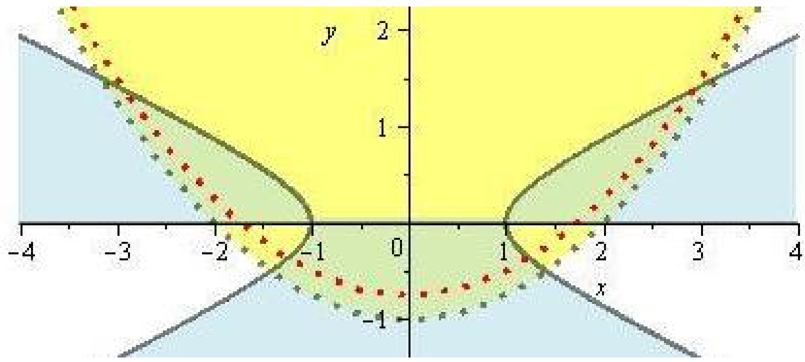
Obr. 5.2: Definiční obor funkce $f(x,y)=\sqrt{y(x^2-4y^2-1)}$

Křivka o rovnici $4-x^2+4y=0$ je parabola $y+1=\frac{x^2}{4}$, do definičního oboru logaritmu, který je ve jmenovateli druhé funkce, padnou body nad touto parabolou. Funkce $f(x,y)=$ $=\ln(4-x^2+4y)$ ale vystupuje ve jmenovateli druhého sčítance - do definičního oboru nepadnou body, ve kterých je $\ln(4-x^2+4y)=0$, tedy body na křivce $4-x^2+4y=1$, což je parabola o rovnici $y+\frac{3}{4}=\frac{x^2}{4}$:



Obr. 5.3: Definiční obor funkce $f(x,y)=\frac{1}{\ln(4-x^2+4y)}$

Definiční obor zadané funkce dostaneme jako průnik definičních oborů obou sčítanců:



Obr. 5.4: Definiční obor funkce $f(x,y)=\sqrt{y(x^2-4y^2-1)}+\frac{1}{\ln(4-x^2+4y)}$

Analogicky jako u funkce jedné proměnné můžeme každé funkci $f: D_f \to \mathbb{R},\ D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ přiřadit její ***graf***. Tento pojem má názorný význam pro funkci dvou proměnných, kdy definujeme

$$\mathrm{graf} f = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid [x,y] \in D_f, z = f(x,y)\right\};$$

graf$f$ je v tomto případě podmnožina prostoru $\mathbb{R}^3$, v jednoduchých případech plocha, a tu lze graficky znázornit (použitím některé zobrazovací metody nebo pomocí matematického software na počítači).

U funkcí více než dvou proměnných jistě nebudeme znázorňovat podmnožiny čtyř- a vícerozměrných prostorů, v těchto situacích je výhodnější fyzikální interpretace.

Grafem funkce $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ z příkladu 5.11 je plocha o rovnici

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}, \text{ přičemž zřejmě platí } z \geq 0,$$

a to je horní polovina kulové plochy $x^2+y^2+z^2=1,\ z \geq 0$, s poloměrem 1.

Při sestrojování grafu funkce dvou proměnných je výhodné sestrojit řezy grafu funkce rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami nebo rovinami procházejícími některou ze souřadných os.

Příklad 5.13. Máme vyšetřit graf funkce $f(x,y)=y^2-x^2$.

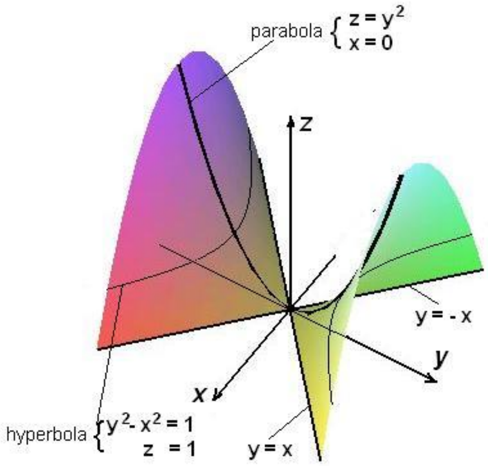
Řešení. Zkoumejme řezy plochy o rovnici $z=y^2-x^2$ rovinami $z=k,\ k>0$. Tyto řezy jsou popsány rovnicemi $\left\{\begin{aligned} y^2-x^2&=k,\\ z&=k;\end{aligned}\right.$, speciálně pro $k=1$ je řezem hyperbola o rovnici $\left\{\begin{aligned} y^2-x^2&=1,\\ z&=1.\end{aligned}\right.$

Je-li $k=0$, dostaneme rovnici $y^2-x^2=0$ neboli $\left\{\begin{aligned} (y-x)(y+x)&=0,\\ z&=0;\end{aligned}\right.$; v tomto případě je tedy řez složen ze dvou přímek $y=x$ a $y=-x$ ležících v rovině $z=0$.

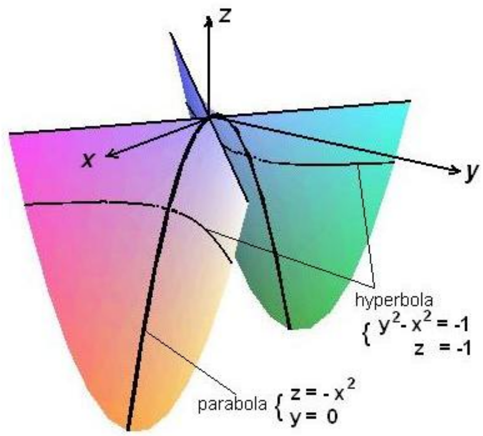
Stopa plochy v rovině $x = 0$, tedy její řez touto rovinou, je parabola $\begin{cases} z = y^2, \\ x = 0. \end{cases}$

Zkoumejme nyní řezy rovinami $z = -k$, $k > 0$. Tyto řezy jsou popsány rovnicemi $\begin{cases} x^2 - y^2 = k, \\ z = -k; \end{cases}$ speciálně pro $k = 1$ je řezem hyperbola o rovnici $\begin{cases} y^2 - x^2 = -1, \\ z = -1. \end{cases}$

Stopa plochy v rovině $y = 0$, tedy její řez touto rovinou, je parabola $\begin{cases} z = -x^2, \\ y = 0. \end{cases}$ □



Obr. 5.5: $f(x, y) = y^2 - x^2$, $z \geq 0$



Obr. 5.6: $f(x, y) = y^2 - x^2$, $z \leq 0$

Příklad 5.14. Vyšetřeme graf funkce $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

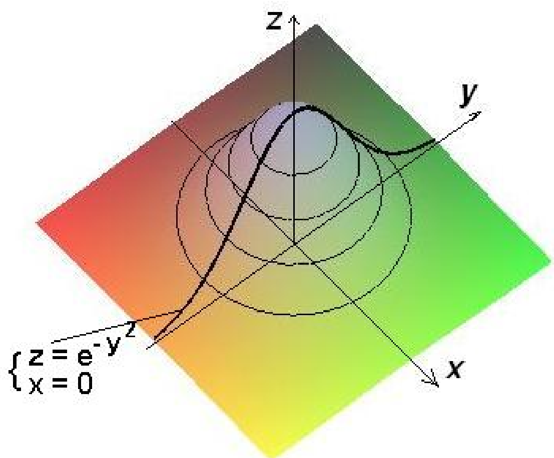
Řešení. Funkce je definována v celém $\mathbb{R}^2$. Abychom zjistili, jak vypadá její graf, najdeme řezy rovinami $z = k$:

$$\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = k \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = -\ln k \;\Rightarrow$$

řezy jsou kružnice se středem na ose z, graf je rotační plocha s osou rotace v ose z. Pro představu grafu stačí získat křivku, jejíž rotací graf vznikne. Položme $x = 0$, dostaneme křivku

$$\begin{cases} z = \mathrm{e}^{-y^2}, \\ x = 0 \end{cases}$$

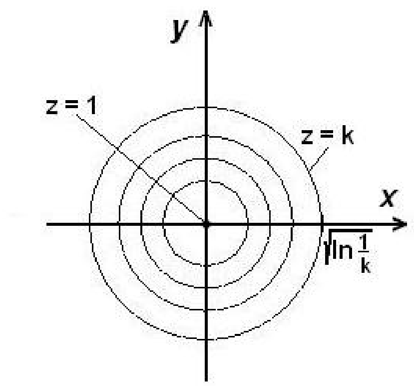
– graf vznikne rotací této křivky kolem osy z. □



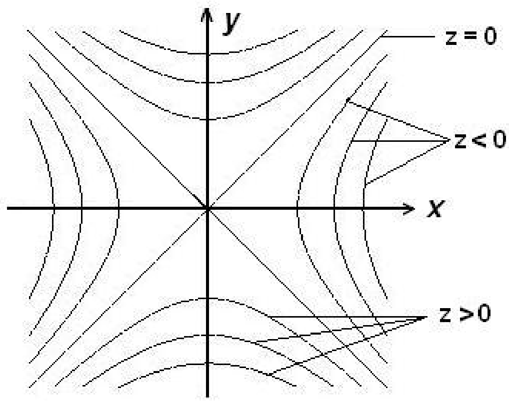
Obr. 5.7: $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$

Průmět řezů grafu funkce rovinami rovnoběžnými s rovinou xy do této roviny nazýváme ***vrstevnice***; jsou to tedy křivky v rovině $z = 0$ (v definičním oboru funkce) o rovnicích $f(x, y) = c =$konst.

Nakreslíme vrstevnice funkcí z předchozích dvou příkladů:



Obr. 5.8: Vrstevnice $z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$



Obr. 5.9: Vrstevnice $z = y^2 - x^2$

Množinám $\{[x_1, \ldots, x_n] \mid f(x_1, \ldots, x_n) = c = \text{konst.}\}$ v obecném případě říkáme ***hladiny*** funkce f.

Je-li například $T = f(x, y, z)$ funkce udávající teplotu v bodě $[x, y, z]$, je plocha o rovnici $f(x, y, z) = 20$ hladina tvořená body v prostoru o teplotě $20(^o\mathrm{C})$.

Příklad 5.15. Máme popsat hladiny funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Řešení. Pro libovolné k zkoumejme plochu o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = k$. Je-li $k < 0$, žádná plocha tohoto tvaru zřejmě neexistuje; je-li $k = 0$, jedná se o bod – počátek souřadné soustavy $[0, 0, 0]$. Pro $k > 0$ dostáváme kulovou plochu o poloměru $\sqrt{k}$. □

Podobně jako u funkcí jedné proměnné se zavádějí pojmy ***ohraničená funkce*** (shora, zdola), ***zúžení funkce*** a ***aritmetické operace s funkcemi*** (součet, rozdíl, součin a podíl dvou funkcí).

Příklad 5.16. Ukažme, že funkce $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ z příkladu 5.14 je ohraničená.

Řešení. Při výpočtu vrstevnic funkce jsme získali podmínku na velikost konstanty k („kóta" vrstevnice):

$$x^2 + y^2 = -\ln k \quad \Rightarrow \quad \ln k \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < k \leq 1$$

– tedy funkce je nezáporná a ohraničená; největší hodnoty 1 nabývá v počátku. Obor hodnot $H_f = (0, 1\rangle$. □

Složená funkce

Definice 5.17. Nechť je dána funkce $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^m$ (tedy funkce m proměnných $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$) a m funkcí n proměnných φ_1, $\varphi_2, \dots, \varphi_m$, které jsou definované na množině $M \subset \mathbb{R}^n$ tak, že platí

$$[\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_n), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_n), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_n)] \in A \text{ pro } [t_1, t_2, \dots, t_n] \in M.$$

Potom funkci

$$F(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_n), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_n), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_n)),$$

která je definovaná na množině M, nazýváme ***složenou funkcí***. Funkci f nazýváme ***hlavní*** nebo ***vnější složkou*** a funkce φ_1, $\varphi_2, \dots, \varphi_m$ ***vedlejšími*** nebo ***vnitřními složkami***.

Je-li například $f(x, y, z)$ funkce tří proměnných a $\varphi_1(u, v)$, $\varphi_2(u, v)$, $\varphi_3(u, v)$ trojice funkcí dvou proměnných, je

$$F(u, v) = f(\varphi_1(u, v),\ \varphi_2(u, v),\ \varphi_3(u, v))$$

složená funkce s vnější složkou f a vnitřními složkami $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Příklad 5.18. Najděme hlavní a vedlejší složky funkce

$$F(t_1, t_2) = \arcsin(1 - t_1 - t_2) + \mathrm{e}^{t_1 + t_2}.$$

Řešení. Rozklad dané funkce na složky není jednoznačný. Uvedeme dvě možnosti rozkladu na složky:

1. $$f(x_1, x_2) = \arcsin x_1 + \mathrm{e}^{x_2} \quad \text{a} \ \ x_1 = 1 - t_1 - t_2,\ \ x_2 = t_1 + t_2,$$

2. $$f(x) = \arcsin(1 - x) + \mathrm{e}^{x} \quad \text{a} \ \ x = t_1 + t_2.$$

□

Shrnutí

V této kapitole jsme pojem reálné funkce reálné proměnné zobecnili tak, že jsme zavedli pojem

- funkce více proměnných: zobrazení $f : A \to \mathbb{R}$, kde $A \subset \mathbb{R}^n$, tedy předpis, který uspořádané n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$ přiřadí právě jedno číslo $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Přitom je

- definiční obor funkce f: množina $A \subset \mathbb{R}^n$ stanovená při definici funkce,
- přirozený definiční obor funkce f: množina bodů, pro které má definiční předpis funkce smysl.

Nejčastěji vyšetřujeme funkce dvou (resp. tří) proměnných, tedy zobrazení

$$(x, y) \mapsto f(x, y) \qquad (\text{resp. } (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)\,).$$

Pro funkci dvou proměnných se definuje

- graf funkce f: množina $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid [x, y] \in D_f, z = f(x, y)\}$.

Představu o grafu funkce získáme pomocí řezů rovinami rovnoběžnými s některou souřadnou rovinou, přitom

- vrstevnice funkce je průmět křivky vzniklé jako řez rovinou $z = k$, $k \in \mathbb{R}$, tj. rovinou rovnoběžnou se souřadnou rovinou $z = 0$, do definičního oboru funkce, tedy křivka o rovnici $f(x, y) = k$.

Pro funkce tří proměnných se zavádí analogický pojem

- hladina funkce $f(x, y, z)$: plocha o rovnici $f(x, y, z) = k$, $k \in \mathbb{R}$.

Je-li dána funkce m proměnných $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,)$ a m funkcí n proměnných $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, potom

- složená funkce s vnější složkou f a vnitřními složkami φ_i je funkce

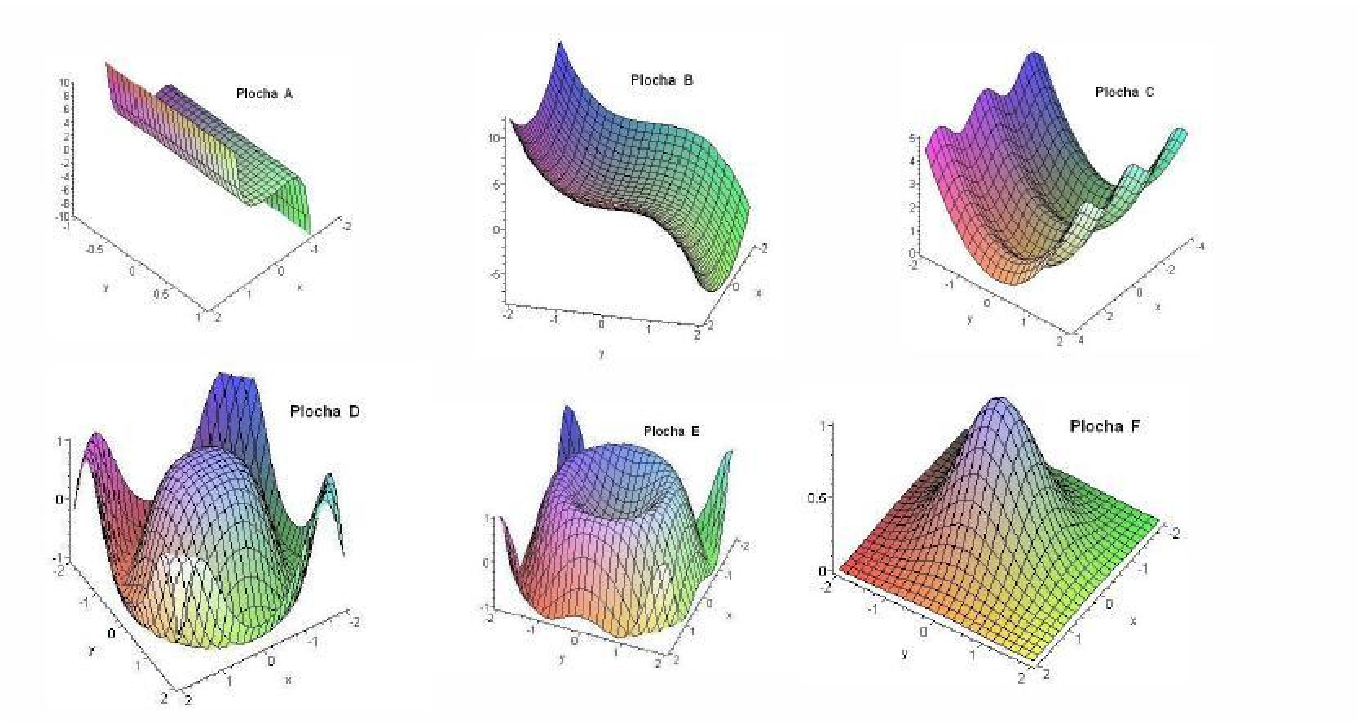
$$F(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_n), \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_n), \ldots, \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_n)\,).$$

Analogicky jako u funkce jedné proměnné se definují aritmetické operace s funkcemi a pojem ohraničené funkce.

Otázky a úkoly

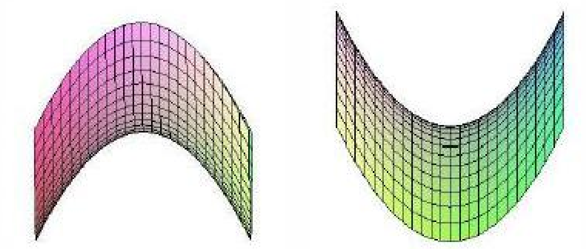
1. Co rozumíme funkcí dvou (tří) proměnných?
2. Jak hledáme přirozený definiční obor funkcí dvou (tří) proměnných?
3. Co je to graf funkce dvou proměnných a jak můžeme získat představu o jeho průběhu?
4. Funkcím a) – f) přiřaďte grafy A – F:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & f(x,y) = x^2 + 3x^7, & \text{b)} & f(x,y) = x^2 - y^3, \\ \text{c)} & f(x,y) = \cos^2 x + y^2, & \text{d)} & f(x,y) = \cos(x^2 + y^2), \\ \text{e)} & f(x,y) = \sin(x^2 + y^2), & \text{f)} & f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}. \end{array}$$



Obr. 5.10:

5.



Ve vedlejších obrázcích jsou dva pohledy na graf funkce

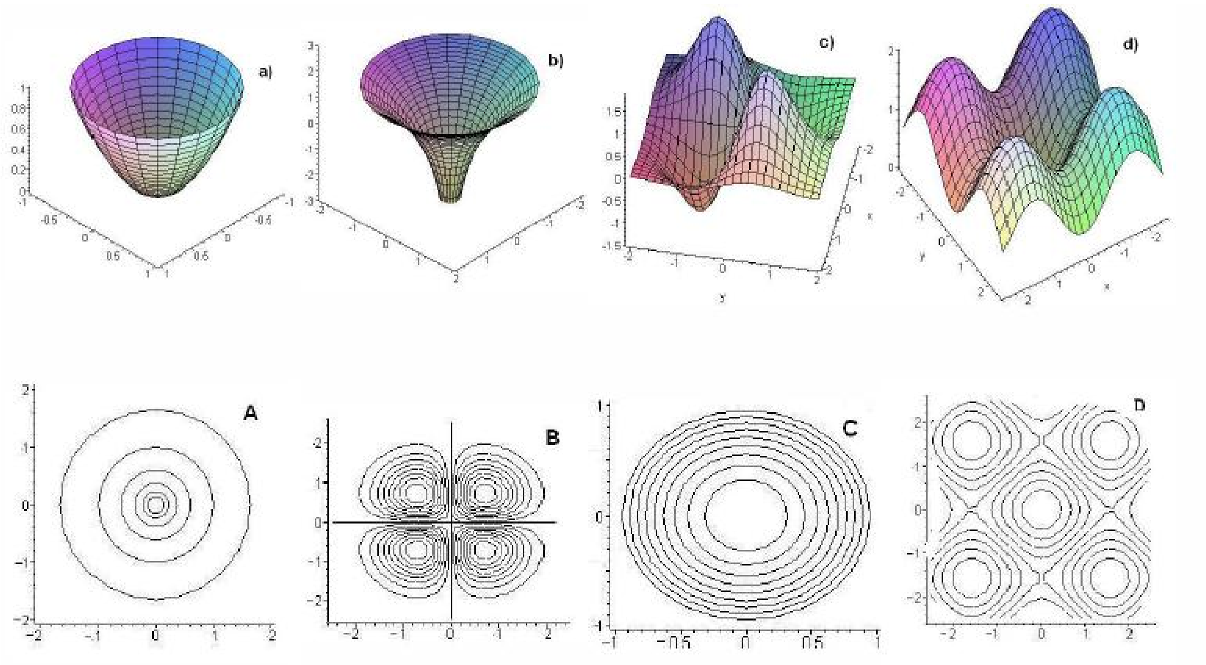
$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Dokreslete do obrázků souřadné osy.

Obr. 5.11:

6. Co jsou to vrstevnice funkce dvou proměnných a hladiny funkce tří proměnných?

7. Grafům funkcí v obrázcích a) až d) přiřaďte jejich „mapy“ – soustavy vrstevnic v obrázcích A až D:



Obr. 5.12:

Cvičení

1. Vyjádřete plošný obsah trojúhelníka daného obvodu $2p$ jako funkci jeho dvou stran x a y.

2. Vyjádřete objem pravidelného čtyřbokého jehlanu jako funkci strany a jeho základny a výšky h jeho boční stěny.

3. Vyjádřete výšku rotačního válce jako funkci jeho objemu V a pláště S.

4. Vypočítejte $f(1, \frac{1}{2})$, $f(-1, 2)$, je-li $f(x, y)$ rovno

$$\text{a)}\quad \sqrt{x^2y + y + 1},\quad \text{b)}\quad \tfrac{y^2-|x|}{x^2-|y|},\quad \text{c)}\quad \arcsin(x + y).$$

5. Vypočítejte $f(y, x, z)$, $f(-x, -y, -y)$, $f(1, 1, t)$, $f(1, \frac{y}{x}, \frac{x}{y})$, je-li $f(x, y, z) = xyz+\frac{xy}{z}$.

6. Najděte funkci $f(x, y)$, jestliže $f(x + y, x - y) = x^2 - 2xy - y^2$.

7. Najděte funkci $f(x)$, jestliže $f(\frac{x}{y}) = \frac{x}{y^2}\sqrt{x^2 + y^2}$.

8. Najděte D_f, je-li $f(x, y)$ rovno

$$\text{a)}\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y-1},\qquad \text{b)}\quad \frac{1}{y^2 - x^2},$$

$$\text{c)}\quad \frac{1}{25 - x^2 - y^2},\qquad \text{d)}\quad \sqrt{3x} - \frac{1}{\sqrt{y}},$$

$$\text{e)}\quad \sqrt{9 - x^2 - y^2},\qquad \text{f)}\quad \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)},$$

$$\text{g)}\quad \frac{1}{\sin \pi(x + y)},\qquad \text{h)}\quad \sqrt{y \sin x},$$

$$\text{i)}\quad \arcsin(x + y),\qquad \text{j)}\quad \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(2 - x^2 - y^2),$$

$$\text{k)}\quad \pi y^2\sqrt{x^2 - y^2} + \ln xy,\quad \text{l)}\quad \ln \sin[\pi(x^2 + y^2)].$$

9. Najděte D_f, je-li $f(x, y, z)$ rovno

$$\text{a)}\quad \frac{x}{|y + z|},\quad \text{b)}\quad \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2},\quad \text{c)}\quad \ln xyz.$$

10. Najděte obor hodnot funkcí f, je-li $f(x, y)$ rovno

$$\text{a)}\quad \sqrt{2 + x - y},\quad \text{b)}\quad \sqrt{9 - x^2 - y^2},\quad \text{c)}\quad \cos(x^2 + y^2),$$

$$\text{d)}\quad \mathrm{e}^{x-y},\qquad \text{e)}\quad x^2 + y^2 - 1,\qquad \text{f)}\quad 4 - x^2 - y^2.$$

11. Najděte vrstevnice grafů daných funkcí f, je-li $f(x, y)$ rovno

$$\text{a)}\quad \sqrt{1 - x^2 - y^2},\quad \text{b)}\quad 3x^2 + 2y^2,\quad \text{c)}\quad x - y,$$

$$\text{d)}\quad \frac{2y}{x^2 + y^2},\qquad \text{e)}\quad x^2 - y^2,\qquad \text{f)}\quad \frac{y}{x}.$$

12. Najděte hladiny funkcí f, je-li $f(x,y,z)$ rovno

$$\text{a)}\quad 2x+y-z,\quad \text{b)}\quad x^2+y^2+z^2,\quad \text{c)}\quad x^2+y^2-z^2.$$

13. Rozložte na složky složené funkce, je-li $f(x,y)$ rovno

$$\text{a)}\quad \sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}, \qquad \text{b)}\quad \frac{x}{y}\,\mathrm{e}^{\frac{y}{x}},$$

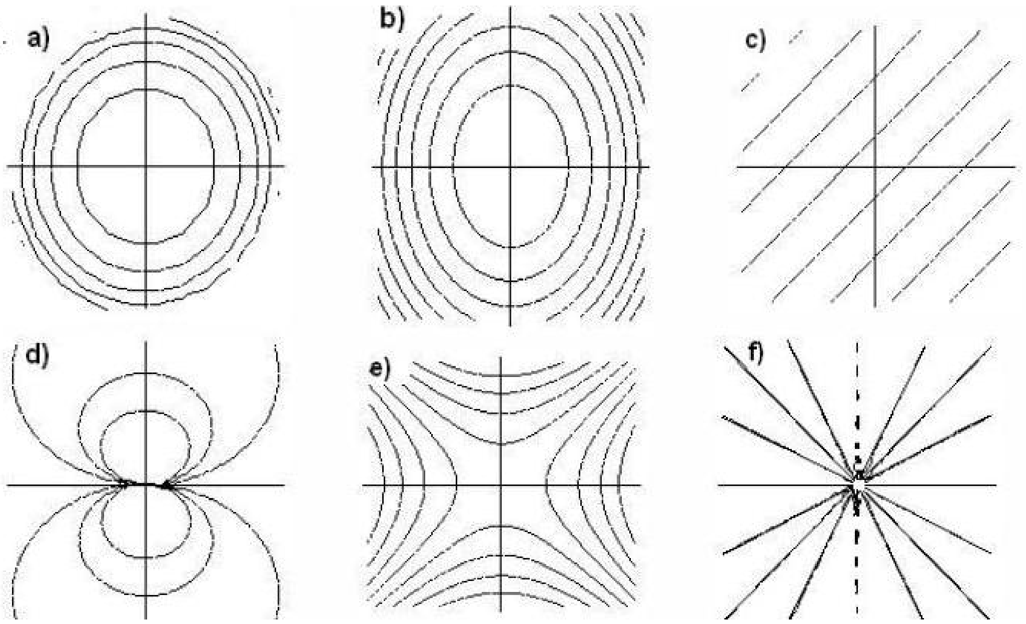
$$\text{c)}\quad \sqrt{x^2+y^2-2}+\ln(4-x^2-y^2), \qquad \text{d)}\quad \sin\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\text{e)}\quad \ln\frac{xy}{x^2-y^2}, \qquad \text{f)}\quad \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{y}{x-y}}.$$

Výsledky

1. $\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$; **2.** $a^2\sqrt{4h^2-\frac{a^2}{6}}$; **3.** $S^2/4\pi V$;
4. a) $\sqrt{2}, \sqrt{5}$, b) $-\frac{3}{2}, -3$, c) není def.; **5.** $xyz+\frac{xy}{z}$, $-f(x,y,z)$, $t+\frac{1}{t}$, $1+\frac{y^2}{x^2}$;
6. $f(x,y)=xy+\frac{1}{2}(x^2-y^2)$; **7.** $f(x)=x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$;
8. a) $x\neq 0, y\neq 1$, b) $y\neq \pm x$, c) $x^2+y^2\neq 25$, d) $x\geq 0, y>0$, e) $-3\leq x\leq 3, -\sqrt{9-x^2}\leq y\leq \sqrt{9-x^2}$, f) $(|x|\geq 1\wedge|y|\geq 1)\vee(|x|\leq 1\wedge|y|\leq 1)$, g) $x+y\neq k$, $k\in\mathbb{Z}$, h) $(2k\pi\leq x\leq(2k+1)\pi\wedge y\geq 0)\vee((2k-1)\pi\leq x\leq 2k\pi\wedge y\leq 0)$, i) $-1-x\leq y\leq 1-x$, j) mezikruží se středem $[0,0]$ a poloměry 1 a $\sqrt{2}$, bez vnější kružnice, k) $(x<0\wedge x\leq y<0)\vee(x>0\wedge 0<y\leq x)$, l) $2k<x^2+y^2<2k+1$, $k\in\mathbb{Z}$;
9. a) $\mathbb{R}^3$ vyjma roviny $y+z=0$, b) koule $x^2+y^2+z^2\leq 4$, c) $(x>0,y>0,z>0)\vee(x>0,y<0,z<0)\vee(x<0,y<0,z>0)\vee(x<0,y>0,z<0)$;
10. a) $\langle 0,\infty)$, b) $\langle 0,3\rangle$, c) $\langle -1,1\rangle$, d) $(0,\infty)$, e) $\langle -1,\infty)$, f) $(-\infty,4\rangle$;

11.



Obr. 5.13:

12. a) roviny $2x + y - z = k$, $k \in \mathbb{R}$, b) kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = k$, $k > 0$, bod $[0, 0, 0]$ pro $k = 0$, c) jednodílné hyperboloidy $\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{k} - \frac{z^2}{k} = 1$ pro $k > 0$, kuželová plocha $x^2 + y^2 = z^2$ pro $k = 0$ a dvojdílné hyperboloidy $\frac{z^2}{l} - \frac{x^2}{l} - \frac{y^2}{l} = 1$ pro $k < 0$, $k = -l$.

5.3 Limita, spojitost

Limita funkce, jak víme, stojí na pojmu okolí – pracuje s hodnotami funkcí v bodech blízkých nějakému bodu. Proto nejdříve zavedeme pojem vzdálenosti v n-rozměrném prostoru.

Z geometrie známe pojem vzdálenosti dvou bodů $X_1 = [x_1, y_1]$, $X_2 = [x_2, y_2]$ v rovině $\mathbb{R}^2$, ta se vypočítá podle vzorce

$$d(X_1, X_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

a bodů $X_1 = [x_1, y_1, z_1]$, $X_2 = [x_2, y_2, z_2]$ v prostoru $\mathbb{R}^3$ podle vzorce

$$d(X_1, X_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

. V souhlasu s těmito vzorci je také výpočet vzdálenosti na přímce:

$$d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}.$$

To nás vede k následující definici:

Definice 5.19. ***Vzdálenost dvou bodů*** $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ v n-rozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$ je číslo $d(X, Y)$ definované předpisem

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Prostor, v němž je vzdálenost dvou bodů definovaná předchozím vzorcem, se nazývá ***eukleidovský***.

Poznamenejme, že k pojmu eukleidovský prostor můžeme také dojít jiným postupem – jedná se o příklad aritmetického vektorového prostoru se skalárním součinem (viz Dodatek Geometrie) a „vzdálenost“ vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ je velikost jejich rozdílu, jestliže velikost vektoru $\mathbf{u}$ definujeme jako $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$.

Pojem okolí bodu v n-rozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$ nyní můžeme definovat pomocí vzdálenosti:

Definice 5.20. Buď $A \in \mathbb{R}^n$. Množina

$$\mathcal{U}_\delta(A) = \{\, X \in \mathbb{R}^n \mid d(A, X) < \delta\}$$

se nazývá ***okolí*** bodu A, množina

$$\mathcal{U}^*_\delta(A) = \mathcal{U}_\delta(A) \setminus \{A\}$$

se nazývá ***redukované okolí*** bodu A. Číslo δ se nazývá ***poloměr okolí***.

V případech, kdy na poloměru okolí nezáleží, budeme index δ vynechávat a budeme pro okolí (resp. redukované okolí) používat označení $\mathcal{U}(A)$ (resp. $\mathcal{U}^*(A)$).

Ve dvojrozměrném prostoru je okolí bodu otevřený kruh se středem v tomto bodě, v trojrozměrném otevřená koule (na přímce to byl otevřený interval).

V diferenciálním počtu funkce jedné proměnné jsme uvedli věty o funkcích spojitých na uzavřeném intervalu; nejdůležitější z nich byla věta o existenci maxima a minima funkce spojité na uzavřeném intervalu. Analogické věty platí i pro funkce více proměnných. Pro jejich formulaci je třeba pojem uzavřeného intervalu dostatečně zobecnit. To nás vede k definici následujících pojmů:

Definice 5.21.

1. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ je ***otevřená*** v $\mathbb{R}^n$, jestliže každý její bod leží v této množině i s nějakým svým okolím, tedy platí-li
$$\forall x \in M\ \exists \mathcal{U}(X)\ : \mathcal{U}(X) \subset M,$$
2. $M \subset \mathbb{R}^n$ je ***uzavřená*** v $\mathbb{R}^n$, je-li $\mathbb{R}^n \setminus M$ otevřená,
3. bod $A \in \mathbb{R}^n$ je ***hromadný bod*** množiny M, jestliže v každém jeho redukovaném okolí leží nějaký bod patřící do množiny M, tedy když platí
$$\forall \mathcal{U}(A) :\ \mathcal{U}^*(A) \cap M \neq \emptyset,$$
4. ***hranicí*** množiny $M \subset \mathbb{R}^n$ nazveme množinu $h(M)$ bodů, v jejichž libovolném okolí leží alespoň jeden bod patřící do množiny M a alespoň jeden bod, který do M nepatří, tedy
$$h(M) = \{\, X \mid \forall \mathcal{U}(X) :\ \mathcal{U}(X) \cap M \neq \emptyset\ \wedge\ \mathcal{U}(X) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset \,\},$$
5. množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá ***ohraničená*** nebo také ***omezená***, jestliže libovolné dva její body mají vzdálenost menší než nějaká pevně zvolená konstanta, tedy platí-li
$$\exists k > 0\, \forall X, Y \in M :\ d(X,Y) < k,$$
6. množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá ***souvislá***, jestliže se každé její dva body dají spojit čarou, jejíž všechny body patří do M (pojem čáry zde chápeme intuitivně),
7. množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá ***oblast***, je-li otevřená, ohraničená a souvislá,
8. je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ oblast, potom množina M spolu se svou hranicí, tj. množina $M \cup h(M)$, se nazývá ***uzavřená oblast***.

Poznamenejme, že v eukleidovském prostoru platí:

- množina M je otevřená, jestliže neobsahuje žádný bod své hranice,
- množina M je uzavřená, jestliže obsahuje celou svou hranici.

Nyní přikročíme k definici limity a spojitosti funkce z $\mathbb{R}^n$; definice bude formálně stejná, jako analogické definice v $\mathbb{R}$:

Definice 5.22. 1. Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ má v bodě A ***limitu*** b, když

- A je hromadným bodem množiny M,
- k libovolnému okolí $\mathcal{U}(b)$ limity b existuje okolí $\mathcal{U}(A)$ bodu A tak, že funkce f zobrazí redukované okolí $\mathcal{U}^*(A)$ do $\mathcal{U}(b)$, tedy

$$\forall \mathcal{U}(b) \;\; \exists \mathcal{U}(A) : f(\mathcal{U}^*(A)) \subset \mathcal{U}(b).$$

Potom píšeme $\lim\limits_{X \to A} f(X) = b$.

2. Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ je v bodě A ***spojitá***, jestliže

$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A).$$

3. Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^n$ je ***spojitá na množině*** M, je-li spojitá v každém bodě této množiny.

Příklad 5.23. Prověřte přímo z definice, že

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} x = x_0.$$

Zvolme libovolné epsilonové okolí limity – interval (na ose z, na které jsou funkční hodnoty funkce dvou proměnných)

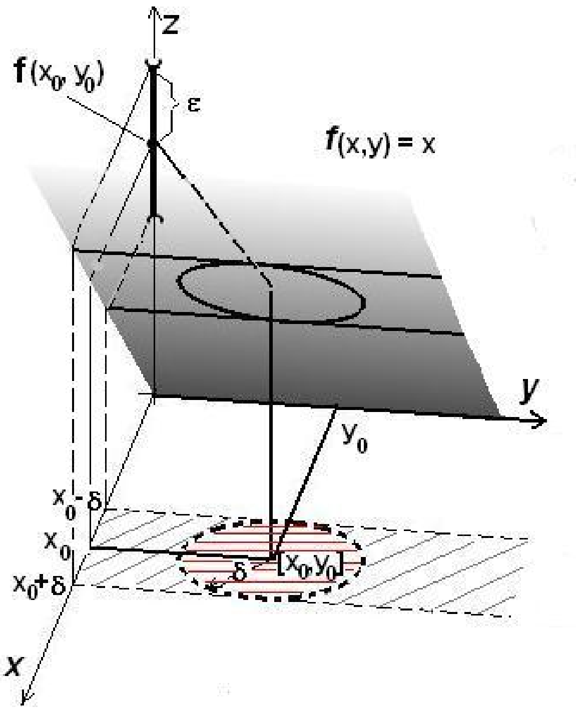
$$\mathcal{U}_\varepsilon = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Máme najít redukované δ-okolí bodu $[x_0, y_0]$ (tedy otevřený kruh se středem $[x_0, y_0]$, poloměrem δ a s odstraněným středem), tj. množinu

$$\mathcal{U}^*_\delta([x_0, y_0]) = \{\, (x, y) \mid$$

$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2 \,\},$$

která se prostřednictvím funkce f zobrazí dovnitř zvoleného okolí $\mathcal{U}_\varepsilon$, tedy má platit



Obr. 5.14: $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} x = x_0$

$$f\left(\mathcal{U}_\delta^*([x_0, y_0])\right) \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Ukážeme, že stačí položit $\delta = \varepsilon$:

Je-li $[x, y] \in \mathcal{U}_\delta^*\left([x_0, y_0]\right)$, tedy platí-li $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$, potom je $(x - x_0)^2 < \varepsilon^2$, tedy $-\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon$, odkud plyne, protože $f(x, y) = x$, že pro taková $[x, y]$ je $f(x, y) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, a to jsme měli dokázat.

Tento dosti jednoduchý příklad má zásadní význam: ukázali jsme totiž, že funkce $f(x, y) = x$, tak zvaná první projekce, je v libovolném bodě spojitá, poněvadž limita je zde rovna funkční hodnotě. Analogicky se totéž ukáže pro druhou projekci, konstantní funkci a ostatní základní elementární funkce a odtud pomocí vět o limitách dostaneme důležitý výsledek, obdobný tvrzení pro funkce jedné proměnné:

Věta 5.24. *Elementární funkce jsou spojité ve všech hromadných bodech svého definičního oboru.*

Nyní uvedeme zmíněné věty o limitách:

Věta 5.25. **(O limitě zúžené funkce)** *Existuje-li* $\lim\limits_{X \to A} f(x) = b$*, potom pro libovolnou množinu* $M \subset D_f$*, jejímž hromadným bodem je bod* A*, platí*

$$\lim_{X \to A} f/_M(X) = b.$$

Důsledek: *Jestliže* $\lim\limits_{X \to A} f/_M(X)$ *neexistuje, nebo jestliže pro dvě množiny* $M \subset D_f$, $N \subset D_f$ *platí*

$$\lim_{X \to A} f/_M(X) \neq \lim_{X \to A} f/_N(X),$$

potom $\lim\limits_{X \to A} f(X)$ *neexistuje.*

Věta 5.26. **(Aritmetické operace s limitami)** *Je-li* $\lim\limits_{X \to A} f(X) = b_1$, $\lim\limits_{X \to A} g(X) = b_2$ *a* $k \in \mathbb{R}$*, platí:*

$$\lim_{X \to A} (f(X) + g(X)) = b_1 + b_2, \quad \lim_{X \to A} k\, f(X) = k\, b_1,$$

$$\lim_{X \to A} (f(X) \cdot g(X)) = b_1 \cdot b_2, \quad \lim_{X \to A} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{b_1}{b_2}, \text{ je-li } b_2 \neq 0.$$

Věta 5.27. **(O limitě složené funkce)** *Nechť je dána složená funkce*

$$F(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_n), \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_n), \ldots, \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_n)),$$

nechť pro vnitřní složky φ_i, $i = 1, \ldots, m$, *této složené funkce platí*

$$\lim_{(t_1, t_2, \ldots, t_n) \to (a_1, a_2, \ldots, a_n)} \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_n) = b_i, \ i = 1, \ldots, m,$$

a nechť je vnější složka $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ spojitá v bodě $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$. Potom platí

$$\lim_{(t_1,t_2,\ldots,t_n)\to(a_1,a_2,\ldots,a_n)} F(t_1, t_2, \ldots, t_n) = f(b_1, b_2, \ldots, b_m).$$

Věta 5.28. (Věta o sevření) *Jestliže pro každé $X \in \mathcal{U}(A)$ platí $g(X) \leq f(X) \leq h(X)$ a jestliže $\lim\limits_{X\to A} g(X) = \lim\limits_{X\to A} h(X) = b$, pak také $\lim\limits_{X\to A} f(X) = b$;*

je-li speciálně $|f(X)| \leq h(X)$ pro $X \in \mathcal{U}(A)$ a $\lim\limits_{X\to A} h(X) = 0$, potom $\lim\limits_{X\to A} f(X) = 0$.

V dalších několika příkladech budeme počítat limity (resp. prověřovat, že tyto neexistují) u několika funkcí dvou proměnných, poněvadž zde je možno pro lepší pochopení situaci znázornit graficky; bez újmy na obecnosti budeme počítat limity v počátku (v případě výpočtu limity v jiném bodě je možno posunout počátek do tohoto bodu).

Příklady uvádíme hlavně proto, abychom na nich ilustrovali, jak komplikovaná situace může být v okolí bodů, v nichž funkce více proměnných není definovaná, narozdíl od funkce jedné proměnné, kdy ke kompletní představě o průběhu funkce v okolí takového bodu stačily jednostranné limity.

Příklad 5.29. Vyšetřete limity $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, je-li

$$\text{a)} \quad \frac{x^2-y^2}{x+y}, \quad \text{b)} \quad f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, \quad \text{c)} \quad f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\tfrac{1}{xy}.$$

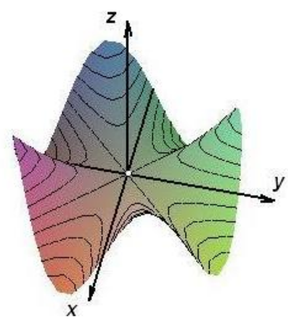
Řešení. a) Platí $\frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x+y} = x - y \big/_{x\neq -y}$, přičemž $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x - y = 0$.

Odtud podle věty o limitě zúžené funkce plyne, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x+y} = 0$.

b) Definičním oborem funkce je množina $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, přičemž

$$\left|\frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\right| = |xy| \left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| \leq |xy| \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |xy|,$$

a protože $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |xy| = 0$, je hledaná limita rovna nule.
Chování funkce v okolí počátku je naznačeno v sousedním obrázku.



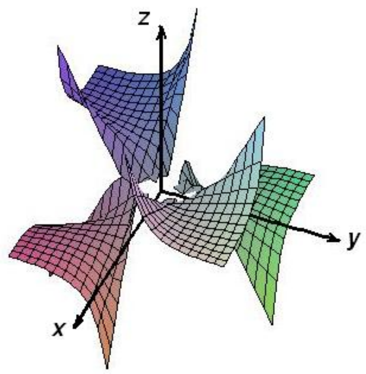
Obr. 5.15: $\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$

c) Definičním oborem funkce je množina $D_f = \{\,(x,y)\,|\,x \neq 0, y \neq 0\}$, tedy rovina s vyjmutými souřadnými osami; vyšetřujeme samozřejmě limitu vzhledem k tomuto definičnímu oboru. Platí

$$\left|(x^2+y^2)\,\sin\frac{1}{xy}\right| \leq x^2+y^2$$

$$\text{a} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2) = 0,$$

tedy hledaná limita je rovna nule.
Sousední obrázek opět naznačuje chování funkce v okolí počátku; graf „kmitá“ se zmenšující se amplitudou, ale s narůstající frekvencí.



Obr. 5.16: $(x^2+y^2)\,\sin\frac{1}{xy}$

□

Rozmanitější a zajímavější bývají případy, kdy limita neexistuje; pro ověření tohoto faktu používáme důsledku věty 5.25 – jestliže pro dvě různá zúžení funkce je limita v některém bodě různá, potom limita původní funkce v tomto bodě neexistuje.

Příklad 5.30. Vyšetřete limity $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, je-li $f(x,y)$ rovno

$$\text{a)}\ \ \frac{2xy}{x^2+y^2}, \quad \text{b)}\ \ \frac{x^4y^2}{x^8+y^4}, \quad \text{c)}\ \ \frac{x^2+y^2}{x-y}.$$

a) Proveďme zúžení funkce na libovolnou přímku procházející počátkem $z = k\,x$. Dostaneme systém funkcí

$$h_k(x,y) = f(x,kx) = \frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{2k}{1+k^2},$$

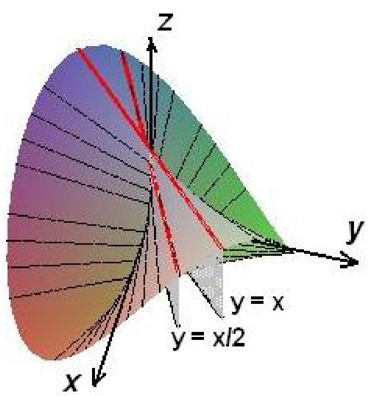
je to systém konstantních funkcí – například pro $k = 1$, tj. pro přímku $y = x$ dostaneme

$$h_1(x,y) = \frac{2x^2}{x^2+x^2} = 1\,\big/_{x\neq 0}\,,$$

pro $k = \frac{1}{2}$, tj. pro přímku $y = \frac{1}{2}\,x$ dostaneme

$$h_{\frac{1}{2}}(x,y) = \frac{x^2}{x^2+\frac{1}{4}x^2} = \frac{4}{5}\,\big/_{x\neq 0}\,,$$

tak jak je vidět v sousedním obrázku.
Po každé přímce tedy vychází jiná limita – zadaná limita neexistuje.



Obr. 5.17: $\frac{2xy}{x^2+y^2}$

b) Provedeme-li opět zúžení na libovolnou přímku procházející počátkem, dostaneme systém funkcí

$$h_k(x,y) = f(x,kx) = \frac{k^2x^6}{x^8+k^4x^4} = x^2\,\frac{k^2}{x^4+k^4},$$

přičemž

$$\lim_{x\to 0} x^2\,\frac{k^2}{x^4+k^4} = 0$$

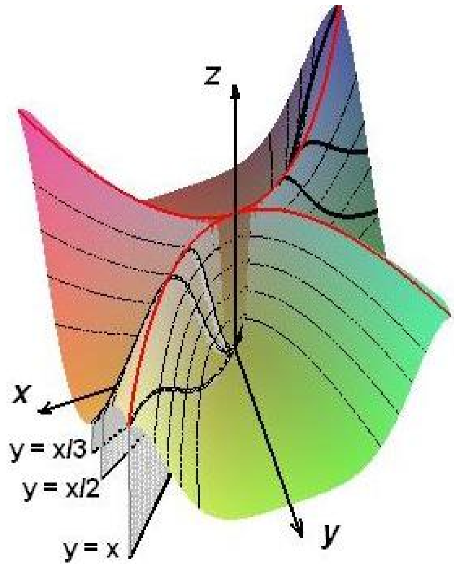
pro každé k.

Zdálo by se tedy, že hledaná limita je rovna nule (vždyť se blížíme k počátku „všemi směry“).

Proveďme zúžení dané funkce na parabolu $y = x^2$. Dostaneme

$$h(x) = f(x,x^2) = \frac{x^4\cdot x^4}{x^8+x^8} = \frac{1}{2}\Big/_{x\neq 0},$$

a $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \frac{1}{2}$, hledaná limita opět neexistuje.

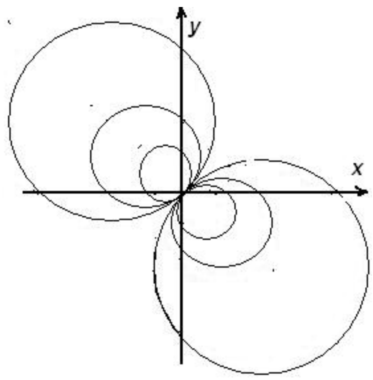


Obr. 5.18: $\frac{x^4y^2}{x^8+y^4}$

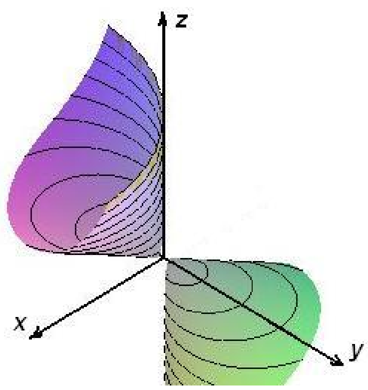
c) Provedeme-li zúžení funkce na libovolnou přímku procházející počátkem, nebo jako v předchozím příkladě na parabolu, bude limita zúžené funkce rovna nule. Grafem funkce je ale kuželová plocha bez osy z – vrstevnice jsou kružnice; pro $z = k$ dostaneme
$\frac{x^2+y^2}{x-y} = k \quad \Rightarrow \quad \left(x-\frac{k}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{2}$.
Provedeme-li tedy zúžení funkce např. na křivku $y = -1+\sqrt{2-(x-1)^2}$, dostaneme

$$h(x) = f(x,-1+\sqrt{2-(x-1)^2}) = \frac{x^2+1-2\sqrt{2-(x-1)^2}+2-x^2+2x-1}{x+1-\sqrt{2-(x-1)^2}} = 2\Big/_{x\neq 0}$$

a $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 2$, tedy hledaná limita neexistuje.



Obr. 5.19: $\frac{x^2+y^2}{x-y}$ – vrstevnice



Obr. 5.19: $\frac{x^2+y^2}{x-y}$

Na závěr této kapitoly uvedeme věty o funkcích spojitých na uzavřených ohraničených množinách:

Věta 5.31. *Jestliže je funkce f spojitá na ohraničené uzavřené množině M, potom*

- *je na množině M ohraničená,*
- *má na množině M maximum a minimum.*

Je-li navíc M souvislá, potom

- *pro libovolné body $A, B \in M$, $A \neq B$, nabude f každou hodnotu mezi $f(A)$ a $f(B)$ alespoň v jednom bodě množiny M.*

Shrnutí

V této kapitole jsme formulovali pojem limity pro funkce více proměnných. Definovali jsme

- limitu funkce f v bodě A: $\lim\limits_{X \to A} f(X) = b$, jestliže k libovolnému okolí $\mathcal{U}(b)$ limity b existuje okolí $\mathcal{U}(A)$ bodu A tak, že funkce f zobrazí množinu $\mathcal{U}^*(A) \cap D_f$ do zvoleného $\mathcal{U}(b)$.

Analogicky jako u funkce jedné proměnné platí věty o limitě zúžené funkce, o aritmetických operacích s limitami, o limitě složené funkce a o nerovnostech mezi limitami.

Pojem spojitosti funkce více proměnných je definován stejně jako u funkce jedné proměnné. Funkce f je

- spojitá v bodě A: platí-li $\lim\limits_{X \to A} f(X) = f(A)$,
- spojitá na množině M: je-li spojitá v každém bodě této množiny.

Otázky a úkoly

1. Jak je definována limita funkce více proměnných?
2. Ukažte z definice limity, že platí $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} 1 = 1$. Situaci znázorněte graficky.
3. Je-li $\lim\limits_{x \to a} [\lim\limits_{y \to b} f(x, y)] = 0$, platí také $\lim\limits_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = 0$? Jestliže ano, dokažte. Jestliže ne, pokuste se najít protipříklad.

4. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení:

- Jestliže platí $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, potom $\lim\limits_{x\to a} f(x,b) = L$.
- Jestliže platí $\lim\limits_{x\to a} f(x,b) = L$, potom $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$.
- Jestliže platí $\lim\limits_{x\to a} f(x,b) = L$, potom $\lim\limits_{y\to b} f(a,y) = L$.
- Jestliže platí $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, potom $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(cx,y) = 0$ pro libovolnou konstantu c.

5. Je možné na základě soustavy vrstevnic dané funkce v okolí nějakého bodu usoudit, zda limita funkce v tomto bodě existuje nebo ne? Pokuste se odhadnout, ve kterém bodě nemají limitu funkce z příkladu 11 ze cvičení ke kapitole o funkcích více proměnných.

6. Pro funkci $f(x,y) = \sqrt{\cos(x^2+y^2)-1}$ zřejmě platí $f(0,0) = 0$, a přesto tato funkce není v bodě $(0,0)$ spojitá. Proč?

Cvičení

1. Vypočítejte následující limity:

$$\text{a)}\ \lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{x^2y}{4x^2-y}, \qquad \text{b)}\ \lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{1-\sqrt{(x-2)(y+1)+1}}{(x-2)(y+1)},$$

$$\text{c)}\ \lim_{(x,y)\to(\pi,1)} \frac{\cos xy}{y^2+1}, \qquad \text{d)}\ \lim_{(x,y)\to(0,-1)} \left(1+x\sin\tfrac{1}{y+1}\right)^{\frac{2}{x\sin\frac{1}{y+1}}},$$

$$\text{e)}\ \lim_{(x,y,z)\to(1,0,2)} \frac{4xz}{y^2+z^2}, \qquad \text{f)}\ \lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} \frac{\mathrm{e}^{2(x+y-z)}-1}{\mathrm{e}^{x+y-z}-1}.$$

2. Ukažte, že následující limity neexistují:

$$\text{a)}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2}{x^2+y^2}, \qquad \text{b)}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^2}{2x^2-y^2},$$

$$\text{c)}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy}{3y^2-x^2}, \qquad \text{d)}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3\sqrt{y}}{x^4+y^2},$$

$$\text{e)}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin x}{x^2+y^2}, \qquad \text{f)}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(\cos y-1)}{x^3+y^3}.$$

3. Zjistěte body nespojitosti následujících funkcí:

a) $f(x,y) = \sin\frac{1}{x-y}$, b) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y}$,

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2+3y^2+5}{y^2-2x}$, d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & x = 0, y = 0 \end{cases}$,

e), $f(x,y) = \ln|1-x^2-y^2|$, f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & x \neq 0, y \neq 0 \\ 0 & x = 0, y = 0 \end{cases}$.

Výsledky

1. a) 3, b),c) $-\frac{1}{2}$, d) e^2, e),f) 2;
3. a) $y = x - k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, b) $x = k \wedge y = l$, $k,l \in \mathbb{Z}$, c) $y^2 = 2x$, d) $(0,0)$, e) $x^2+y^2 = 1$, f) všude spojitá.

5.4 Derivace

Parciální derivace

Definice 5.32. Nechť je funkce $f(x,y)$ definována v jistém okolí bodu $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Zvolme $y = y_0$ a uvažujme funkci $f_1(x) = f(x, y_0)$ jedné proměnné x, která je definovaná v jistém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Existuje-li vlastní derivace $f_1'(x_0)$ funkce f_1 v bodě x_0 , tedy existuje-li konečná limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_1(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(X_0 + h\mathbf{i}) - f(X_0)}{h}$$

nazýváme ji ***parciální derivací prvního řádu funkce f v bodě*** X_0 podle proměnné x.

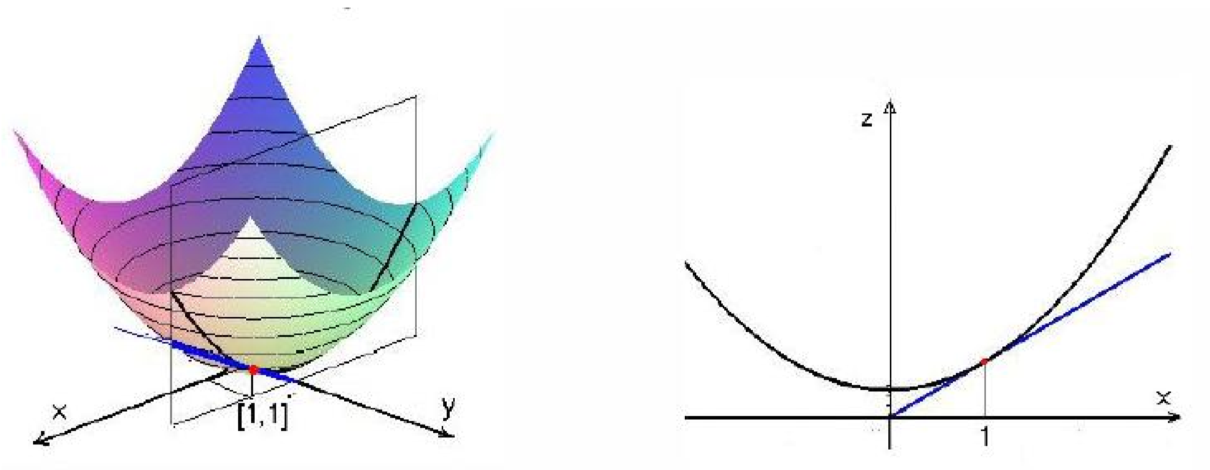
Obvyklá označení: $f_x'(X_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(X_0)$.

Podobně se definuje parciální derivace funkce f podle (druhé) proměnné y v bodě X_0. Rozumí se jí vlastní derivace funkce $f_2(y) = f(x_0, y)$ v bodě $y = y_0$.
Obvyklá označení: $f_y'(X_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(X_0)$.

Z definice parciálních derivací je patrné, jak se provádí jejich výpočet. Počítáme-li například $f_x'(X_0)$, dosadíme $y = y_0$ do funkčního předpisu $f(x,y)$ a derivujeme vzniklou funkci jedné proměnné podle obvyklých pravidel. Požadavek dosazení $y = y_0$ můžeme při praktickém výpočtu nahradit tím, že y nepovažujeme za proměnnou a derivujeme obvyklým způsobem podle proměnné x. Z definice dále vyplývá, že pro výpočet parciálních derivací platí pravidla o derivování součtu, součinu a podílu funkcí.

Geometrický význam parciálních derivací

Jestliže roviny $x = x_0$ a $y = y_0$ protínají graf funkce $f(x,y)$ v křivkách $y = y_0,\ z = f(x,y)$ resp. $x = x_0,\ z = f(x,y)$ a v bodě X_0 existují parciální derivace $f_x',\ f_y'$, potom tečny k těmto křivkám v bodě X_0 svírají s osou x resp. osou y úhly α, β, pro které platí $\operatorname{tg}\alpha = f'_x(X_0)$, $\operatorname{tg}\beta = f'_y(X_0)$.



Obr. 5.20: Parciální derivace podle x

Analogicky se definují parciální derivace funkcí více proměnných:

Nechť $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $X_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ je vnitřní bod množiny A. Existuje-li (vlastní) derivace funkce $g : g(t) = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)$ v bodě $t = x_i^0$, nazýváme tuto derivaci $g'(x_i^0)$ ***parciální derivací funkce f v bodě*** X_0 a značíme ji $f'_{x_i}(X_0)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$, tedy

$$f'_{x_i}(X_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(X_0 + h\,\mathbf{e}_i) - f(X_0)}{h}.$$

Nechť $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ a nechť $B \neq \emptyset$ je množina všech bodů X, v nichž existuje parciální derivace $f'_{x_i}(X)$. Funkci $g : B \to \mathbb{R}$, $g(X) = f'_{x_i}(X)$ nazýváme ***parciální derivací funkce f podle i-té proměnné na množině B*** a značíme ji f'_{x_i} nebo $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Příklad 5.33. Máme vypočítat parciální derivace funkce

$$f(x, y, z) = xy^2 + 3x^3z + z^4 + 2xyz$$

podle všech proměnných; potom máme určit $f'_x(X_0)$, $X_0 = (3, 0, -1)$.

Řešení. Počítejme f'_x : Proměnné y, z považujeme za konstanty a f derivujeme jako funkci jedné proměnné x; dostaneme:

$f'_x = y^2 \cdot 1 + 3z \cdot 3x^2 + 0 + 2yz \cdot 1 = y^2 + 9x^2z + 2yz,$
podobně $f'_y = 2xy + 2xz, \quad f'_z = 3x^3 + 4z^3 + 2xy.$

Odtud po dosazení $f'_x(3, 0, -1) = -81$. □

Příklad 5.34. Máme vypočítat $f'_y(1, 1)$, je-li

$$f(x, y) = x^{x^{x^{x^y}}} + (\ln x) \cdot (\operatorname{arctg}(\operatorname{arctg}(\operatorname{arctg}(\sin(\cos xy - \ln(x + y)))))).$$

Řešení. Nemáme za úkol vypočítat parciální derivaci na množině, ale jen v bodě. Proto bude výhodnější sestavit příslušnou funkci jedné proměnné, která vystupuje v definici derivace v bodě – funkci $g(y) = f(1, y)$, vypočítat g' a potom dosadit $y = 1$:

$$g(y) = 1^{1^{1^{1^y}}} + 0 \cdot (\operatorname{arctg}(\operatorname{arctg}(\operatorname{arctg}(\sin(\cos y - \ln(1 + y)))))) = 1;$$

$$g'(y) = 0, \quad g'(1) = f'_y(1, 1) = 0.$$

□

Má-li funkce jedné proměnné derivaci, je spojitá. Na více než jednu proměnnou se však tento výsledek nepřenáší. I když existují f'_x a f'_y, nemusí být funkce f spojitá. Je tomu tak proto, že parciální derivování se týká jen limit podél přímek rovnoběžných s osami souřadnic, zatímco u spojitosti jde o limity „ve všech směrech libovolným způsobem“. My se budeme zabývat převážně jedním speciálním typem funkcí, u kterých tyto problémy odpadnou; jsou to tzv. hladké funkce:

Definice 5.35. Jestliže funkce f má na nějaké oblasti $A \subseteq D_f$ spojité parciální derivace podle všech proměnných, řekneme, že je na této oblasti ***hladká*** (nebo ***třídy*** C_1). Graf hladké funkce dvou proměnných se nazývá ***hladká plocha***.

Pro hladké funkce platí následující věta:

Věta 5.36. *Hladká funkce je spojitá.*

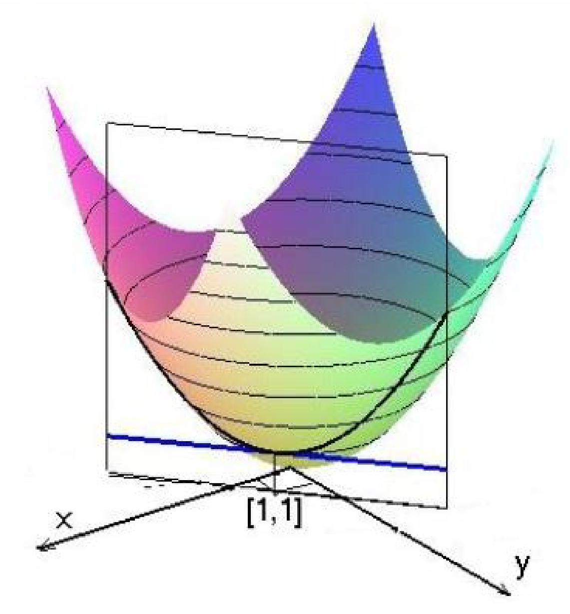
Směrová derivace

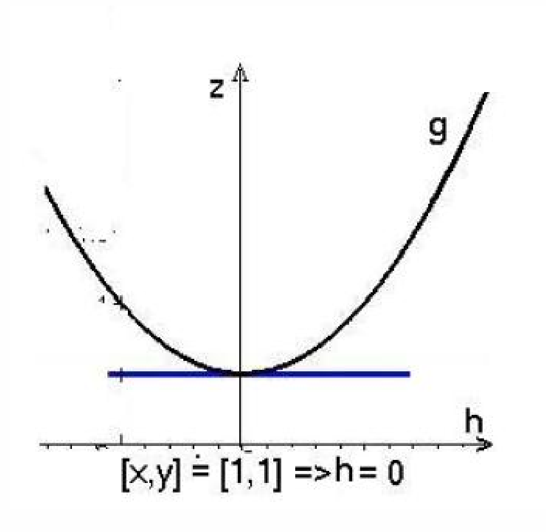
Pojem parciální derivace zobecníme tak, že místo jednotkových vektorů rovnoběžných se souřadnými osami báze budeme uvažovat libovolný vektor $\mathbf{u} \in E_n$:

Definice 5.37. Existuje-li konečná limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(X_0 + h\,\mathbf{u}) - f(X_0)}{h} = f'_{\mathbf{u}}(X_0),$$

nazýváme ji ***derivací funkce f v bodě*** X_0 ***podle vektoru*** $\mathbf{u}$. Je-li vektor $\mathbf{u}$ jednotkový, hovoříme o ***směrové derivaci***.





Obr. 5.21: Směrová derivace

Poznamenejme, že přímo z definice bezprostředně plyne

$$f'_{c\mathbf{u}} = c\, f'_{\mathbf{u}}.$$

Jestliže si uvědomíme, že pro pevně daný bod X_0 a vektor $\mathbf{u}$ je výraz $f(X_0 + h\,\mathbf{u}) = g(h)$, tedy funkce jedné proměnné h, přičemž $f(X_0) = g(0)$, můžeme předchozí definici napsat ve tvaru:

$$f'_{\mathbf{u}}(X_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(X_0 + h\,\mathbf{u}) - f(X_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0);$$

takže derivaci podle vektoru můžeme počítat následovně:

Příklad 5.38. Vypočítáme derivaci funkce $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y - z^2$ podle vektoru $\mathbf{u} = (3, 2, 1)$ v obecném bodě $X = (x, y, z)$ a potom v bodě $X_0 = (1, 2, -1)$.

Řešení. Sestavme pro tento případ funkci g:
$X_0 + h\,\mathbf{u} = (x + 3h, y + 2h, z + h)$, $\quad g(h) = 2(x + 3h)^2 + 3(y + 2h) - (z + h)^2$
$g'(h) = 4(x + 3h) \cdot 3 + 6 - 2(z + h)$, $\quad g'(0) = 12x - 2z + 6 = f'_{\mathbf{u}}(x, y, z)$;
$f'_{\mathbf{u}}(1, 2, -1) = 20.$

Vypočítáme ještě derivaci zadané funkce v daném bodě ve směru vektoru $\mathbf{u}$, tedy podle jednotkového vektoru $\mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$:

$f'_{\mathbf{u}_0}(1, 2, -1) = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \cdot f'_{\mathbf{u}}(1, 2, -1) = \frac{1}{\sqrt{9+4+1}} \cdot 20 = \frac{20}{\sqrt{14}}.$ □

Gradient

K výpočtu směrových derivací je výhodné použít tzv. gradient funkce:

Definice 5.39. Vektor

$$\operatorname{grad} f(X_0) = (f'_{x_1}(X_0), \ldots, f'_{x_n}(X_0))$$

se nazývá ***gradient funkce f v bodě*** X_0.

Poznámka: V případě, že funkce f je hladká, používá se někdy namísto názvu gradient a označení $\operatorname{grad} f(X_0)$ též názvu derivace funkce a označení $f'(X_0)$.

Věta 5.40. *Je-li f funkce hladká na oblasti A, platí pro každý vektor* $\mathbf{u}$

$$X \in A \quad \Rightarrow \quad f'_{\mathbf{u}}(X) = \mathbf{u} \cdot \mathit{grad} f(X).$$

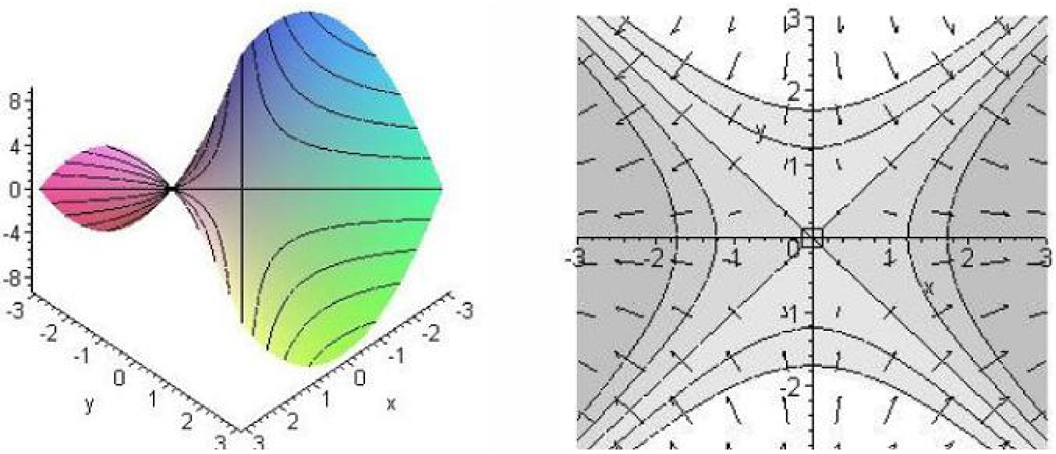
Z této věty vyplývá velmi důležitá vlastnost gradientu:
Pro skalární součin vektorů platí $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\alpha$, kde α je úhel mezi vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$. Pro směrovou derivaci ($\|\mathbf{u}\| = 1$) tedy platí

$$f'_{\mathbf{u}}(X) = \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} f(X) = \|\operatorname{grad} f(X)\| \cos\alpha.$$

Ptáme se, ve kterém směru bude v daném bodě směrová derivace největší: je vidět, že to bude v případě $\alpha = 0$, kdy je $\cos\alpha = 1$, a v tomto případě bude rovna velikosti gradientu.

Geometrický význam gradientu

Gradient $\operatorname{grad} f(X)$ udává (v definičním oboru!) směr, ve kterém, vycházíme-li z bodu X, funkce nejrychleji roste (v případě funkce dvou proměnných je to směr kolmý na vrstevnici, v případě funkce tří proměnných směr kolmý na hladinu funkce).



Obr. 5.22: $f(x,y) = x^2 - y^2$, graf, vrstevnice a gradient

Nyní zobecníme na funkce více proměnných pojem diferenciálu:
U funkce jedné proměnné jsme definovali diferenciál jako lineární část přírůstku funkce, jinak řečeno bylo to zobrazení $h \mapsto f'(x_0)\,h$ (pro funkci diferencovatelnou v x_0). Analogicky budeme postupovat u funkce více proměnných:

Diferenciál funkce více proměnných

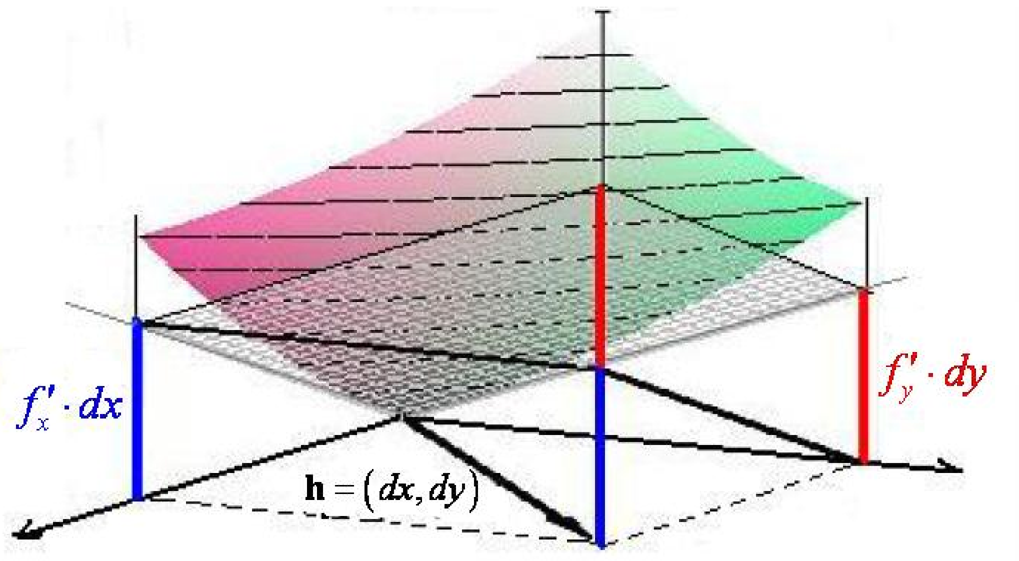
Definice 5.41. Nechť funkce f je hladká na oblasti A, bod $X_0 \in A$ a $\mathbf{h}$ je vektor. Potom zobrazení

$$df(X_0, \mathbf{h}) = \operatorname{grad} f(X_0) \cdot \mathbf{h} = f'_{\mathbf{h}}(X_0)$$

nazýváme ***diferenciálem funkce f v bodě*** X_0. Místo $\mathrm{d}f(X_0, \mathbf{h})$ někdy píšeme jen $df(X_0)$.

Je-li f funkce dvou proměnných, $f = f(x, y)$, $X_0 = [x_0, y_0]$, $\mathbf{h} = (dx, dy)$, potom

$$df(X_0, \mathbf{h}) = f'_x(x_0, y_0)\,dx + f'_y(x_0, y_0)\,dy.$$



Obr. 5.23: Geometrický význam diferenciálu

Také u funkce více proměnných vyjadřuje diferenciál lineární část přírůstku funkce vzhledem k přírůstkovému vektoru $X - X_0$. V případě funkce jedné proměnné se pomocí diferenciálu dala určit rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě x_0:

$$y - f(x_0) = \mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0),$$

analogicky v případě funkce dvou proměnných dostaneme pomocí diferenciálu ***rovnici tečné roviny*** v bodě $[x_0, y_0]$:

$$z - f(x_0, y_0) = \mathrm{d}f((x_0, y_0), (x, y)) = f'_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\,(y - y_0),$$

neboli

$$f'_x(x_0,y_0)\,x + f'_y(x_0,y_0)\,y - z + f(x_0,y_0) - x_0\,f'_x(x_0,y_0) - y_0\,f'_y(x_0,y_0) = 0,$$

což je obecná rovnice tečné roviny. Z tohoto tvaru rovnice vidíme, že normálový vektor k tečné rovině a tedy i ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$ má tvar

$$\mathbf{n} = (f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0), -1)$$

a ***normála ke grafu funkce*** f v tomto bodě má rovnice

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z-f(x_0,y_0)}{-1}.$$

Umíme tedy najít tečnou rovinu k ploše, která je grafem nějaké funkce dvou proměnných; může se stát, že plochu nemůžeme chápat jako graf funkce (např. kulovou plochu). Ukážeme si, jak lze postupovat v takovém případě.

Uvažujme plochu o rovnici $f(x,y,z) = 0$ a na ní bod $X_0 = [x_0, y_0, z_0]$ (např. elipsoid $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0$ s bodem $X_0 = [1,1,1]$); máme najít rovnici tečné roviny k zadané ploše v zadaném bodě. V některých případech je možné chápat část této plochy kde leží zadaný bod jako graf jisté funkce (v případě uvažovaného elipsoidu by to byla funkce $z = f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{6-x^2-2y^2}$) a použít příslušný vzorec, výpočet by však byl dosti komplikovaný, navíc existují případy, kdy takto postupovat nelze (např. pro plochu o rovnici $x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^z + z\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e} = 0$ a bod [1,1,1]). Ukážeme si jiný postup:

Rovnici $f(x,y,z) = 0$ můžeme chápat jako nulovou hladinu funkce tří proměnných $f(x,y,z)$ (je to prostorová analogie vrstevnice funkce dvou proměnných). Víme, že gradient funkce f v bodě na hladině má směr kolmý na tuto hladinu (je to, jak víme, směr nejrychlejšího růstu funkce) – je to tedy normálový vektor této hladiny v příslušném bodě, tedy i normálový vektor hledané tečné roviny. Jeho složky budou tedy koeficienty u jednotlivých proměnných v rovnici hledané tečné roviny, která bude mít tvar:

$$f'_x(X_0)x + f'_y(X_0)y + f'_z(X_0)z + d = 0.$$

Absolutní člen d pak určíme z podmínky, že zadaný bod na této rovině leží.

Příklad 5.42. Máme najít rovnice tečné roviny ploch daných rovnicemi $f(x,y,z) = 0$ v bodě $X_0 = [1,1,1]$, je-li

a) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6$, b) $f(x,y,z) = x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^z + z\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}$.

Řešení. a)

$$\operatorname{grad} f = (2x, 4y, 6z), \quad \operatorname{grad} f(X_0) = (2,4,6),$$

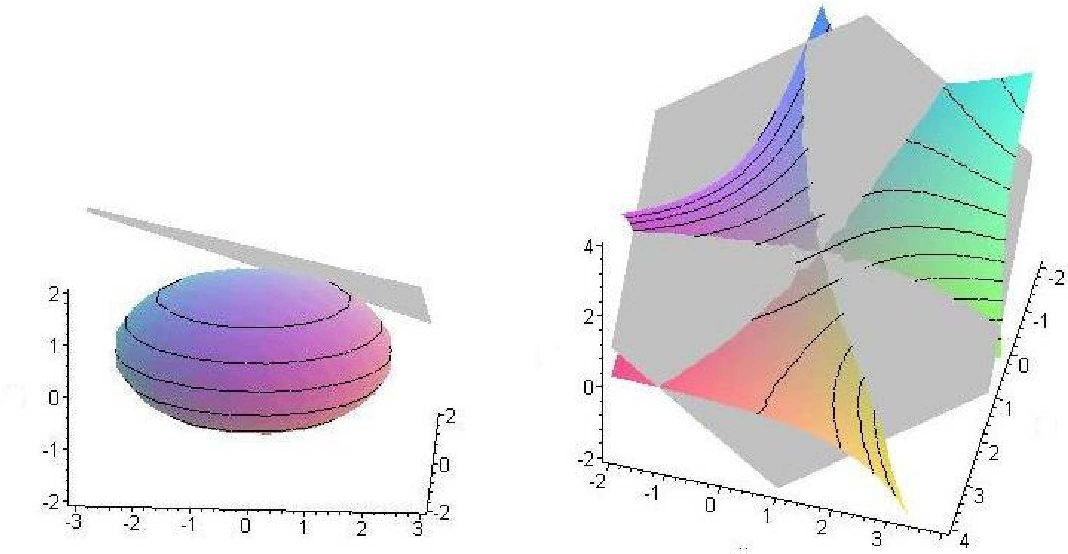
rovnice tečné roviny má tedy následující tvar

$$x + 2y + 3z + d = 0, \quad \text{kde} \quad d = -(x+2y+3z)_{|[1,1,1]} = -6;$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x + 2y + 3z - 6 = 0}}.$$

b)

$$\operatorname{grad} f(x,y,z) = (\mathrm{e}^y + z\mathrm{e}^x, x\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^z, y\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^x), \quad \operatorname{grad} f(X_0) = (2\mathrm{e}, 2\mathrm{e}, 2\mathrm{e}),$$
$$x + y + z + d = 0, \quad d = -(x+y+z)_{|[1,1,1]} = -3; \Rightarrow \underline{\underline{x + y + z - 3 = 0}}.$$



Obr. 5.24: Plochy a tečné roviny z příkladu 5.42

□

Poznamenejme, že rovnici tečné roviny k ploše o rovnici $f(x,y,z) = 0$ v bodě $X_0 = [x_0, y_0, z_0]$ ležícím na této ploše můžeme napsat ve tvaru

$$(X - X_0) \cdot \operatorname{grad} f(X_0) = 0, \quad \text{neboli}$$

$$f'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0$$

– vektor s koncovým bodem v libovolném bodě tečné roviny a počátečním v bodě dotyku (tedy ležící v tečné rovině) je kolmý na gradient funkce, jejíž hladinou je rovnice dané plochy.

Shrnutí

V této kapitole jsme zavedli pro funkci více proměnných $f(x_1, \dots, x_n)$ pojmy

- parciální derivace podle x_i v bodě $[a_1, \dots, a_n]$: derivace funkce jedné proměnné $g(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ v bodě a_i, neboli (pro funkci dvou proměnných $f(x, y)$ a bod $[x_0, y_0]$)
$f'_x(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$,
$f'_y(x_0, y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$,

- parciální derivace podle x_i na množině M: funkce, která každému bodu množiny M přiřazuje parciální derivaci funkce f v tomto bodě,

- derivace funkce f podle vektoru: (pro funkci dvou proměnných $f(x, y)$, bod $[x_0, y_0]$ a vektor (u, v))
$$f'_{(u,v)}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hu, y_0 + hv) - f(x_0, y_0)}{h},$$

- gradient funkce v bodě: vektor, jehož jednotlivé složky jsou parciální derivace podle jednotlivých proměnných,
$$\operatorname{grad} f = (f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_n});$$

- hladká funkce (třídy C_1) na množině M: funkce, jejíž parciální derivace jsou spojité na množině M,

- gradient hladké funkce udává směr, ve kterém funkce nejrychleji roste, je to tedy směr kolmý na vrstevnici funkce dvou proměnných a na hladiny funkce tří proměnných,

- je-li f hladká funkce, platí pro výpočet její derivace podle vektoru $\mathbf{u}$ vztah
$$f'_{\mathbf{u}} = \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{u},$$

pro hladkou funkci f jsme dále zavedli pojem

- diferenciál funkce f: zobrazení, které každému vektoru přiřadí derivaci funkce f podle tohoto vektoru;

  je-li f funkce dvou proměnných, potom její diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ pro vektor $\mathbf{h} = (dx, dy)$ má tvar
$$df(X_0, \mathbf{h}) = f'_x(x_0, y_0)\, dx + f'_y(x_0, y_0)\, dy.$$

Otázky a úkoly

1. Napište vztahy pro definici derivace funkce tří proměnných v nějakém bodě podle všech proměnných.

2. Je dána křivka, která vznikla jako řez plochy $z = x^2 + y^2$ rovinou $x = 2$. Najděte směrnici tečny k této křivce jdoucí bodem $[2, 1, 5]$.

3. Je dána křivka, která vznikla jako řez plochy $z = x^2 y$ rovinou $y = \frac{1}{2}$. Najděte směrnici tečny k této křivce jdoucí bodem $[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

4. Jestliže platí $f(1, 1) = 3$, $f(1{,}02,\ 1) = 3{,}05$ a $f(1,\ 0{,}97) = 2{,}4$, odhadněte $f'_x(1, 1)$ a $f'_y(1, 1)$.

5. Najděte funkci $f(x, y)$ dvou proměnných tak, aby platilo $f'_x(x, y) = 1$, $f'_y(x, y) = 2$ v libovolném bodě $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, přičemž $f(0, 0) = 3$. Kolik je takových funkcí?

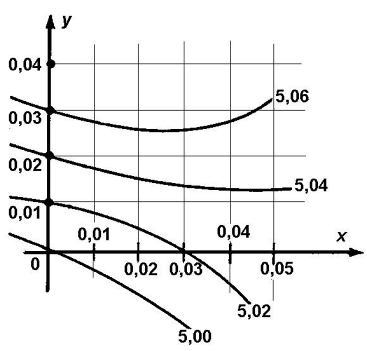
6. Nechť pro hladkou funkci f platí: $f'_x(2, 3) = 4$ a $f'_y(2, 3) = 5$.
   a) Nakreslete $\operatorname{grad} f(2, 3)$.
   b) Pro který vektor bude směrová derivace (tj. derivace podle jednotkového vektoru) v bodě $[2, 3]$ největší?
   c) Jakou hodnotu má tato největší směrová derivace?

7. Existuje pro danou hladkou funkci $f(x, y)$ a bod $[a, b]$ vždy vektor $\mathbf{u}$ tak, aby platilo $f'_{\mathbf{u}}(a, b) = 0$?

8. Jestliže platí $f'_x(a, b) = 2$ a $f'_y(a, b) = 3$, ve kterém směru (tj. podle kterého jednotkového vektoru) bude derivace
   a) rovna nule, b) největší možná, c) nejmenší možná?

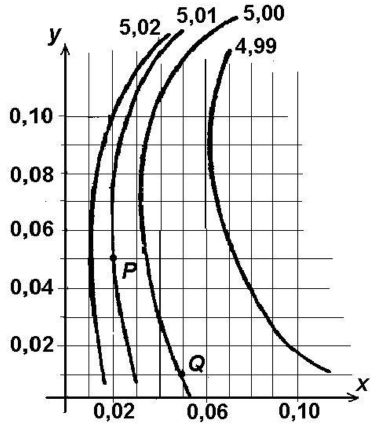
9. Nechť $X_0 = [1, 1, 2]$, $X = [1{,}01,\ 1{,}02,\ 1{,}99]$, $\mathbf{u} = X - X_0$, $\mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$ a pro funkci f platí $f(X_0) = 4$, $f'_{\mathbf{u}_0}(X_0) = 3$. Vypočtěte přibližně $f(X)$.

10. Ve vedlejším obrázku jsou nakresleny čtyři vrstevnice funkce f blízko bodu $[0, 0]$.
    a) Odhadněte $f'_x(0, 0)$.
    b) Odhadněte $f'_y(0, 0)$.
    c) Nakreslete $\operatorname{grad} f(0, 0)$.
    d) Jaký úhel svírá gradient v bodě $[0, 0]$ s vrstevnicí procházející tímto bodem?
    e) Odhadněte $f'_{\mathbf{u}}(0, 0)$, je-li $\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.



Obr. 5.25: Vrstevnice 1

11. Ve vedlejším obrázku jsou nakresleny čtyři vrstevnice funkce f.
    a) Nakreslete grad $f(P)$ a odhadněte jeho velikost.
    b) Ve kterém z bodů P, Q má grad f větší velikost?
    c) Odhadněte $f'_x(0{,}02,\ 0{,}05)$.
    d) Odhadněte $f'_{\mathbf{u}}(0{,}02,\ 0{,}05)$, je-li $\mathbf{u} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.



Obr. 5.26: Vrstevnice 2

Cvičení

1. Najděte parciální derivace daných funkcí f v daném bodě A podle všech proměnných, je-li $f(x,y)$ resp. $f(x,y,z,u)$ rovno:

a)	$\frac{\pi}{3}x^2y$,	$[4,6]$,	b)	$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$,	$[1,1]$,
c)	$\mathrm{e}^x \sin y$,	$[1,2]$,	d)	$3x^2y + \mathrm{e}^{xy}$,	$[3,2]$,
e)	$\operatorname{arctg} xy$,	$[0,1]$,	f)	$\sqrt{2x^3-3y^2}$,	$[3,2]$,
g)	$\dfrac{x\cos y - y\cos x}{1+\sin x+\sin y}$,	$[0,0]$,	h)	$\ln(x^2+y^2+z^2+u^2)$,	$[3,2,1,0]$.

2. Vypočtěte parciální derivace daných funkcí f podle všech proměnných, je-li $f(x,y)$ resp. $f(x,y,z)$ rovno:

a)	$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}-\frac{z}{x}$,	b)	$\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}$,
c)	$\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}$,	d)	$2\cos(xy-z)+(2x-z)^2y^3$,
e)	$\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+x^y$,	f)	$xy\mathrm{e}^{x+2y}$,
g)	$\ln(x-\ln(x^2+y^2))$,	h)	$\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}+\sqrt{1-x^2-y^2}$,
i)	$(\ln x)^{\cos y}$,	j)	$\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$,

k) x^{x^y}, l) $\sin(x^2+y^2)+\arcsin\frac{x}{y^2}$,

m) $(3x+2z)^{yz}$, n) $(y\operatorname{tg} z)^{\ln x}$,

o) $(\cos x)^{(\cos y)^{\cos z}}$, p) $(\sin x)^{\operatorname{tg} z}\,(\operatorname{cotg} z)^{\sin y}$.

3. Ukažte, že zadané funkce vyhovují daným diferenciálním rovnicím:

a) $z - y^2\sin(x^2-y^2)$, $y^2 z'_x + xy\, z'_y = 2xz$,

b) $u = \frac{y}{x}$, $x\,u'_x + y\,u'_y = 0$,

$u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $x\,u'_x + y\,u'_y = 0$,

$u = \ln y - \ln x$, $x\,u'_x + y\,u'_y = 0$,

$u = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, $x\,u'_x + y\,u'_y = 0$,

c) $z = f(x^2+y^2)$, $y\,z'_x - x\,z'_y = 0$, je-li f hladká funkce.

4. Vypočtěte derivace daných funkcí v daných bodech podle daných vektorů:

a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $X = [1,1,1]$, $\mathbf{u} = (0,2,-1)$,

b) $f(x,y,z) = (y\ \operatorname{tg} z)^{\ln x}$, $X = [1,1,\frac{\pi}{4}]$, $\mathbf{u} = (1,1,0)$,

c) $f(x,y) = x^y$, $X = [1,0]$, $\mathbf{u} = (1,1)$.

5. Vypočítejte směrové derivace funkcí f v daných bodech, je-li jednotkový vektor zadán pomocí úhlů α,β,γ, které svírá postupně se souřadnými osami x,y,z:

a) $f(x,y) = 3x^4 - x^2y^3 + y^2$, $X = [-1,1]$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$,

b) $f(x,y,z) = xy^2 + y^3 - xyz$, $X = [1,1,2]$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

6. Najděte derivaci funkce $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ v bodě $[x_0,y_0]$ ve směru vektoru, který je kolmý na vrstevnici funkce f procházející tímto bodem.

7. Najděte velikost a směr gradientu funkce $f(x,y,z) = \frac{1}{r}$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, v bodě $[x_0,y_0,z_0]$.

8. Najděte přírůstek funkce (diferenci) Δf a diferenciál df funkce $f(x,y) = 4x^2+2xy-y^2+2$, jestliže z bodu $X_0 = [3,-1]$ přejdeme do bodu $X = [-1,2]$.

9. Vyjádřete diferenciál funkce f v bodě $X = [x,y] \neq [0,0]$ resp. $X = [x,y,z] \neq$ $= [0,0,0]$, je-li $f(x,y)$ resp. $f(x,y,z)$ rovno:

$$\text{a)}\quad x^2 - 2xy + y^2, \quad \text{b)}\quad \ln\sqrt{x^2+y^2}, \quad \text{c)}\quad \operatorname{arctg}\frac{x-y}{x+y},$$

$$\text{d)}\quad \sqrt{x^2+y^2+y^2}, \quad \text{e)}\quad \mathrm{e}^{ax}\cos b\tfrac{y}{z}, \qquad \text{f)}\quad 3x^{yz}.$$

10. Vypočtěte hodnotu diferenciálů pro dané funkce f, dané body X_0 a přírůstky, je-li:

a) $\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $X_0 = [2,1]$, $dx = 0{,}01$, $dy = 0{,}05$,

b) $x^x \sin y \operatorname{arctg} z$, $X_) = [-4, \frac{\pi}{2}, 0]$, $dx = 0{,}05$, $dy = 0{,}06$, $dz = 0{,}08$.

11. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně:

a) $\sqrt{3{,}03^2 + 9{,}01^2}$, b) $4{,}004 \cdot 2{,}002^2 \cdot 3{,}003^3$,

c) $\ln(\sqrt{0{,}96} + \sqrt[3]{1'02} + 2)$, d) $\sin 151^o \cdot \operatorname{cotg} 41^o$,

e) $\sin 1{,}51 \cdot \operatorname{arctg} 0{,}8 \cdot 2^{-3{,}95}$, f) $1{,}05^{2{,}01}$.

12. O kolik se přibližně změní úhlopříčka a plošný obsah obdélníka se stranami $x = 12$m, $y = 9$m, jestliže se první strana zvětší o 2cm a druhá zmenší o 4cm?

13. Výška kužele je $h = 15$cm a poloměr základny $r = 8$cm. O kolik se přibližně změní objem kužele, jestli- že se výška zvětší o 0,3cm a poloměr základny se zvětší o 0,2cm?

14. Doba kmitu T matematického kyvadla se rovná $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, kde l je délka kyvadla a g gravitační zrychlení. S jakou chybou je určena doba kmitu T, jestliže při měření byla délka určena s chybou $dl = a$ a zrychlení s chybou $dg = b$?

15. Najděte rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce v daném bodě na grafu funkce:

a) $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - xy + x$, $T = [1,?,2]$,

b) $f(xy) = xy$, $T = [?,2,2]$.

16. Najděte délku úseku přímky $x+1 = 0$, $y-4 = 0$ mezi grafem funkce $f(x,y) = x^2 +$ $+ y^2 + 2x - 2y + 2$ a tečnou rovinou ke grafu této funkce v bodě $T = [0,2,2]$.

17. K elipsoidu $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ najděte tečnou rovinu, která je rovnoběžná s rovinou $4x + 2y + z = 0$.

Výsledky

1) a) 16π, $16\frac{\pi}{3}$, b) 0, 0, c) $e\sin 2$, $e\cos 2$, d) $36+2\mathrm{e}^6$, $27+3\mathrm{e}^6$, e) 1, 0, f) $0{,}9\sqrt{30}$, $-0{,}6\sqrt{30}$, g) 1, -1,
h) $\frac{3}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{7}$, 0; **2)** a) $\frac{f'_x=1}{z}+\frac{2}{x^2}, f'_y=\frac{-x}{y^2}+\frac{1}{z}, f'_z=\frac{-y}{z^2}-\frac{1}{x}$, b) $f'_x=\frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, c) $f'_x=\frac{1}{1+x^2}, f'_y=\frac{-1}{1+y^2}$,
d) $f'_x=-2y\sin(xy-z)+4x(2x-z)^2y^3, f'_y=-2x\sin(xy-z)+6(2x-z)^2y^2, f'_z=2\sin(xy-z)-2(2x-z)y^3$,
e) $f'_x=\frac{1}{y}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+y\,x^{y-1}, f'_y=-\frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}+x^y\ln x$, f) $f'_x=y(1+x)\mathrm{e}^{x+2y}, f'_y=x(1+2y)\mathrm{e}^{x+2y}$, g) $f'_x=\frac{-2x}{(x^2+y^2)(1-\ln(x^2+y^2))}$,
h) neex., i) $f'_x=\frac{1}{x}\cos y\,(\ln x)^{\cos y-1}, f'_y=-\sin y\,(\ln x)^{\cos y}\ln\ln x$, j) $f'_x=\frac{-(x^2+3y^2)}{2\sqrt{(x^2+y^2-x)(2x-x^2-y^2)^3}}$,
k) $f'_x=x^{x^y}x^{y-1}(y\ln x-1), f'_y=x^{x^y}x^y\ln^2 x$,
l) $f'_x=2x\cos(x^2+y^2+\frac{1}{\sqrt{y^4-x^2}}, f'_y=2y\cos(x^2+y^2)-\frac{2x}{y^3\sqrt{y^4-x^2}}$,
m) $f'_x=3yz(3x+2z)^{yz-1}, f'_y=z\cdot f(x,y)\cdot\ln(3x+2z), f'_z=f(x,y)\cdot(y\ln(3x+2z)+\frac{2yz}{3x+2z})$,
n) $f'_x=f(x,y)\cdot\frac{y}{x}\operatorname{tg} z, f'_y=\ln x\,y^{\ln x-1}(\operatorname{tg} z)^{\ln x}, f'_z=y^{\ln x}\ln x\,(\operatorname{tg} z)^{\ln x-1}\frac{1}{\cos^2 z}$,
o) $f'_x=(\cos y)^{\cos z}(\cos x)^{(\cos y)^{\cos z}-1}(-\sin x), f'_y=f(x,y)\cdot\ln\cos x\;\cos z\,(\cos y)^{\cos z-1}(-\sin y)$,
$f'_z=f(x,y)\cdot\ln\cos x\,(\cos y)^{\cos z}\ln\cos y\,(-\sin z)$,
p) $f'_x=\operatorname{tg} y(\sin x)^{\operatorname{tg} z-1}\cos x\,(\operatorname{cotg} z)^{\sin y}, f'_y=(\sin x)^{\operatorname{tg} z}(\operatorname{cotg} z)^{\sin y}\;\ln\operatorname{cotg} z\;\cos y$,
$f'_z=(\sin x)^{\operatorname{tg} z}\;\ln\sin x\,\frac{1}{\cos^2 z}\,(\operatorname{cotg} z)^{\sin y}-(\sin x)^{\operatorname{tg} z}\;\sin y\,(\operatorname{cotg} z)^{\sin y-1}\frac{1}{\sin^2 z}$;
3. a) $3\sqrt{3}$, b)c) 0; **4.** a) $-5\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, b) 1;
5 $\pm\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$; **6.** 1, při umístění do počátku směřuje k bodu $[x_0,y_0,z_0]$;
6. $\Delta f=-33, df=-96$; **8.** a) $-0{,}018$, b) 0,005; **9.** a) 49,605, b) 434,592, c) 1,38296, d) 0,555, e) 0,005, f) 1,1;
9. $du=-0{,}8\mathrm{cm}$, $dP=-0{,}3\mathrm{m}^2$; **10.** $70{,}37\mathrm{cm}^3$; **11.** $\pi(ag-bl)/g\sqrt{lg}$;
12. a) $5x+y-y+3-0, \frac{x-1}{5}=y=\frac{y-2}{-1}$, b) $2x+y-y=2, \frac{x-1}{2}=y-2=\frac{z-2}{-1}$;
13. 5; **14.** $4x+2y+z\pm\sqrt{19}=0$.

5.5 Derivace a diferenciály vyšších řádů, Taylorova věta

Parciální derivace, které jsme zavedli dříve, nazýváme parciálními derivacemi prvního řádu pro odlišení od parciálních derivací vyšších řádů, které se zavedou takto:

Definice 5.43. Nechť funkce $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ má v nějakém okolí bodu $X_0 \in A$ parciální derivaci podle i-té proměnné f'_{x_i} . Existuje-li derivace funkce f'_{x_i} podle j-té proměnné v bodě X_0 , nazýváme ji ***parciální derivací druhého řádu funkce f v bodě*** X_0 podle i-té a j-té proměnné (v tomto pořadí) a značíme ji $f''_{x_i x_j}$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0)$; je-li $i = j$, píšeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(X_0)$.
Je-li $i \neq j$, nazýváme parciální derivace $f''_{x_i x_j}$ resp. $f''_{x_j x_i}$ ***smíšenými parciálními derivacemi druhého řádu***.

Analogicky jako u parciální derivace prvního řádu zavádíme pojem ***parciální derivace druhého řádu na množině***. Nazýváme jí funkci $X \mapsto f''_{x_i x_j}$, která je definovaná na množině $B \subseteq A$ takové, že pro každé $X \in B$ existuje $f''_{x_i x_j}(X)$.

Jsou-li všechny parciální derivace druhého řádu funkce f spojité, potom matice sestavená z parciálních derivací druhého řádu

$$\begin{bmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & \cdots & f''_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \cdots & f''_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

se nazývá ***druhá derivace funkce*** f a značí symbolem f''.

V naznačeném postupu můžeme pokračovat při zavádění parciálních derivací vyšších řádů.

Pro smíšené parciální derivace druhého řádu platí následující tvrzení:

Věta 5.44. **(Schwarzova)** *Nechť funkce $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ má v nějakém okolí bodu $X_0 \in A$ parciální derivace f'_{x_i}, f'_{x_j} $f''_{x_i x_j}$, $f''_{x_j x_i}$, které jsou spojité v bodě X_0 . Potom platí*

$$f''_{x_i x_j}(X_0) = f''_{x_j x_i}(X_0).$$

Funkci mající spojité parciální derivace až do řádu k nazýváme ***funkcí třídy*** C_k. Má-li funkce spojité parciální derivace všech řádů, říkáme, že je ***třídy*** C_∞.

Pro funkce třídy C_k platí zobecnění Schwarzovy věty – smíšené parciální derivace pro libovolnou permutaci m-tice proměnných ($m \le k$), podle kterých derivujeme, jsou si rovny, tedy

$$f^{(m)}_{x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_m}} = f^{(m)}_{x_{j_1},x_{j_2},\ldots,x_{j_m}},$$

je-li $(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m})$ libovolná permutace m-tice $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$.

Můžeme také definovat derivace vyšších řádů podle vektoru:

Definice 5.45. Nechť funkce $f : A \to \mathbb{R}$ má v $\mathcal{U}(X_0) \subset A$ derivaci $f'_{\mathbf{u}}(X)$. Jestliže existuje v bodě X_0 derivace $(f'_{\mathbf{u}})'_{\mathbf{v}}(X_0)$ funkce $f'_{\mathbf{u}}$ podle vektoru $\mathbf{v}$, řekneme, že f má v bodě X_0 ***derivaci druhého řádu podle vektorů* u,v** a značíme ji $f''_{\mathbf{uv}}(X_0)$.

Obecně indukcí definujeme derivaci k-tého řádu podle vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$:

$$f^{(k)}_{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k} = \left(f^{(k-1)}_{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_{k-1}}\right)'_{\mathbf{u}_k}.$$

Nechť f je třídy (alespoň) C_2. Vyjádřeme funkci $\mathbf{u} \mapsto f''_{\mathbf{uu}}$ pomocí parciálních derivací; nejdříve pro funkci dvou proměnných a $\mathbf{u} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}$:

$$f''_{\mathbf{uu}} = (f'_{\mathbf{u}})'_{\mathbf{u}} = a\,(f'_{\mathbf{u}})'_x + b\,(f'_{\mathbf{u}})'_y =$$

$$= a\,(a\,f'_x + b\,f'_y)'_x + b\,(a\,f'_x + b\,f'_y)'_y = a^2 f''_{xx} + 2ab\,f''_{xy} + b^2 f''_{yy}$$

Vzniklý výraz můžeme symbolicky zapsat ve tvaru:

$$\left(a^2\frac{\partial^2}{\partial\,x^2} + 2ab\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(f) = \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 (f).$$

Obecně (indukcí) lze ukázat, že pro $\mathbf{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je

$$f^{(k)}_{\mathbf{u}^k} = \left(a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k (f).$$

Diferenciál k-tého řádu

Definice 5.46. Je-li $f : A \to \mathbb{R}$ třídy C_m, pak pro libovolné $X_0 \in A$ a $k \le m$ funkci, která každému vektoru $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ přiřadí k-tou derivaci funkce f podle vektoru h, tedy funkci

$$d^k f(X_0, \mathbf{h}) = f^{(k)}_{\mathbf{h}^k}(X_0) = \left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k (f(X_0))$$

nazýváme ***diferenciálem k-tého řádu funkce f v bodě*** X_0.

Místo $d^k f(X_0, \mathbf{h})$ někdy píšeme jen $d^k f(X_0)$.

Například pro funkci tří proměnných má druhý diferenciál pro obecný přírůstkový vektor $\mathbf{h} = (dx,\, dy,\, dz)$ následující tvar:

$$d^2 f(X_0) = f''_{xx}(X_0)\, dx^2 + f''_{yy}(X_0)\, dy^2 + f''_{zz}(X_0)\, dz^2 +$$

$$+2f''_{xy}(X_0)\, dx\, dy + 2f''_{xz}(X_0)\, dx\, dz + 2f''_{yz}(X_0)\, dy\, dz.$$

Druhý diferenciál bývá výhodné zapisovat v následujícím maticovém tvaru:

$$d^2 f = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) \begin{bmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & \cdots & f''_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \cdots & f''_{x_nx_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}.$$

Aproximace funkce Taylorovým polynomem

I v případě funkcí více proměnných bývá výhodné nahradit funkci v okolí nějakého bodu polynomem – stejně jako v případě jedné proměnné k tomu slouží Taylorův polynom:

Definice 5.47. Má-li funkce f spojité parciální derivace až do řádu k na okolí $\mathcal{U}(X_0)$ bodu X_0, potom ***Taylorovým polynomem*** funkce f v bodě X_0 nazýváme polynom

$$T_k(X) = f(X_0) + \frac{1}{1!}\, df(X_0, X - X_0) + \frac{1}{2!}\, d^2 f(X_0, X - X_0) + \cdots + \frac{1}{k!}\, d^k f(X_0, X - X_0).$$

Například pro funkci dvou proměnných $f(x, y)$, obecný přírůstkový vektor $\mathbf{h} = X - X_0 = (x - x_0, y - y_0)$ má Taylorův polynom druhého stupně následující tvar:

$$T_k(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left(f'_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(x_0, y_0)\,(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\,(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)\,(y - y_0)^2\right).$$

Věta 5.48. **(Taylorova)** *Má-li funkce f spojité parciální derivace až do řádu $k+1$ na okolí $\mathcal{U}(X_0)$ bodu X_0, potom pro $X = X_0 + \mathbf{h} \in \mathcal{U}(X_0)$ platí $f(X) = T_k(X) + R_{k+1}(X)$, tj.*

$$f(X_0 + \mathbf{h}) = f(X_0) + \frac{1}{1!}\, df(X_0, \mathbf{h}) + \frac{1}{2!}\, d^2 f(X_0, \mathbf{h}) + \cdots + \frac{1}{k!}\, d^k f(X_0, \mathbf{h}) + R_{k+1}(X),$$

$$\textit{kde} \quad R_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}\, d^{(k+1)} f(X_0 + \xi\, \mathbf{h}, \mathbf{h}), \quad \textit{a } \xi \textit{ je jisté číslo z intervalu } (0, 1).$$

Příklad 5.49. Máme odhadnout chybu, které se dopustíme při výpočtu hodnoty $1,94^2 \cdot\ e^{0,12}$ pomocí Taylorova polynomu 1. stupně (tedy pomocí diferenciálu).

Řešení. Hledané číslo je hodnota funkce $f(x, y) = x^2e^y$ pro $X = (1{,}94;\ 0{,}12)$ a tento bod je blízký bodu $(2, 0)$; položíme tedy $X_0 = (2, 0)$, $\mathbf{h} = (dx,\ dy) = (-0{,}06;\ 0{,}12)$. Počítejme potřebné parciální derivace:

$$f'_x = 2x\, e^y, \qquad f'_y = x^2e^y; \qquad f'_x(2, 0) = 4, \qquad f'_y(2, 0) = 4.$$

Tedy pro funkční hodnotu přibližně platí:

$$f(X) \doteq f(X_0) + f'_x\, dx + f'_y\, dy; \qquad 1{,}94^2 \cdot e^{0{,}12} \doteq 4 + 4 \cdot (-0{,}06) + 4 \cdot 0{,}12 = 4{,}24.$$

Nyní odhadneme chybu. Druhý diferenciál funkce $f(x, y) = x^2\mathrm{e}^y$ má tvar

$$d^2f(x, y) = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dx\, dy + f''_{yy}dy^2 = 2\mathrm{e}^y dx^2 + 4x\mathrm{e}^y dx\, dy + x^2e^y dy^2.$$

Pro zbytek R_2 v Taylorově větě platí $R_2 = \frac{1}{2}d^2f(X_0 + \xi\mathbf{h}, \mathbf{h})$, takže pro $X = X_0 + \xi\mathbf{h}$, tj. $x = 2 - 0{,}06\,\xi$, $y = 0{,}12\,\xi$ dostaneme

$$R_2 = \frac{1}{2}[0{,}0072\mathrm{e}^{0{,}12\xi} - 0{,}0288\,(2 - 0{,}06\xi)\mathrm{e}^{0{,}12\xi} + 0{,}0144\,(2 - 0{,}06\xi)^2\mathrm{e}^{0{,}12\xi}] =$$

$$= 0{,}0036\mathrm{e}^{0{,}12\,\xi}(1 - 0{,}24\,\xi + 0{,}0072\,\xi^2).$$

R_2 můžeme chápat jako funkci jedné proměnné ξ, kde $\xi \in (0, 1)$; máme tedy najít ohraničení jejího oboru hodnot. Platí

$$|R_2| = |0{,}0036e^{0{,}12\,\xi}(1 - 0{,}24\,\xi + 0{,}0072\,\xi^2)| < 0{,}0036\, e^{0{,}12} \cdot 1 < 0{,}0036 \cdot 2 = 0{,}0072.$$

Odhad jsme provedli takto: výraz má tvar konstanta krát součin dvou funkcí. První – exponenciála – je všude rostoucí, tedy na intervalu $(0, 1)$ má hodnoty menší než je její hodnota v $\xi = 1$. Druhá funkce (v závorce) je na intervalu $(0, 1)$ klesající (má zde zápornou první derivaci), tedy zde má všechny hodnoty menší než je její hodnota v $\xi = 0$. (Poněkud komplikovanějším výpočtem se dá zjistit, že celý výraz je na intervalu $(0, 1)$ klesající funkcí, tedy odhad můžeme zpřesnit tak, že za horní odhad chyby vezmeme hodnotu celého výrazu pro $\xi = 0$ – tedy $|R_2| < 0{,}0036$.)
Vidíme, že chyba je až na třetím desetinném místě (na kalkulačce $1,94^2 \cdot e^{0{,}12} = 4,2434$). □

Příklad 5.50. Aproximujme funkci $f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}$ v okolí bodu $X_0 = (0, 0)$ polynomem druhého stupně.

Řešení. Funkci rozvineme do Taylorova polynomu. Počítejme potřebné parciální derivace:

$$f'_x = -\frac{\sin x}{\cos y}, \qquad f'_x(0, 0) = 0; \qquad f'_y = \frac{\cos x\, \sin y}{\cos^2 y}, \qquad f'_y(0, 0) = 0;$$

$$f''_{xx} = -\frac{\cos x}{\cos y}, \qquad f''_{xx}(0, 0) = -1; \qquad f''_{xy} = -\frac{\sin x\, \sin y}{\cos^2 y}, \qquad f''_{xy}(0, 0) = 0;$$

$$f''_{yy} = \frac{\cos x\,(1 + \sin^2 y)}{\cos^3 y}, \qquad f''_{yy}(0, 0) = 1.$$

Odtud

$$f(x,y) \doteq f(0,0) + \frac{1}{1!}\left(f'_x(0,0)\,(x-0) + f'_y(0,0)\,(y-0)\right) +$$

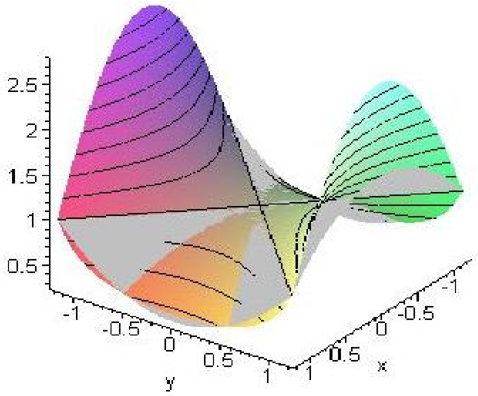
$$+\frac{1}{2!}\left(f''_{xx}(0,0)\,(x-0)^2 + 2f''_{xy}(0,0)\,(x-0)(y-0) + f''_{yy}(0,0)\,(y-0)^2\right),$$

□

tedy

$$\frac{\cos x}{\cos y} \doteq 1 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2).$$

Celá situace je znázorněna v sousedním obrázku; aproximovaná funkce je nakreslena barevně, příslušný polynom šedou barvou.



Obr. 5.27: Funkce a Taylorův polynom

Shrnutí

V této kapitole jsme pro funkce více proměnných zavedli pojem

- parciální derivace druhého řádu: $f''_{x_ix_j}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (f'_{xi}(x_1,x_2,\ldots,x_n)'_{x_j}$, tedy je to parciální derivace funkce, která vznikla jako parciální derivace jiné funkce,
- parciální derivace k-tého řádu: parciální derivace funkce, která již je $(k-1)$-ní derivací jiné funkce,

přičemž pro smíšené parciální derivace vyšších řádů platí Schwarzova věta, podle které nezáleží na pořadí, v jakém počítáme derivace podle jednotlivých proměnných, jsou-li tyto derivace spojité; dále jsme definovali

- derivaci druhého řádu podle vektoru $\mathbf{u}$: $f''_{\mathbf{uu}}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (f'_{\mathbf{u}}(x_1,x_2,\ldots,x_n)'_{\mathbf{u}}$,
- derivaci k-tého řádu podle vektoru $\mathbf{u}$:

$$f^{(k)}_{\mathbf{u}^k}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \left(f^{(k-1)}_{\mathbf{u}^{k-1}}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\right)'_{\mathbf{u}};$$

Pro funkci, která má spojité parciální derivace alespoň k-tého řádu, jsme dále definovali

- k-tý diferenciál: $d^k f(X_0, \mathbf{h})$ je hodnota zobrazení, které každému vektoru $\mathbf{h}$ přiřadí k-tou derivaci funkce f v bodě X_0 podle vektoru $\mathbf{h}$,

  druhý diferenciál funkce $f(x, y)$ dvou proměnných v bodě $[x_0, y_0]$ vzhledem k vektoru $\mathbf{h} = (dx, dy)$ má tvar

$$d^2 f(X_0, \mathbf{h}) = f''_{xx}(x_0, y_0)\, dx^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\, dx\, dy + f''_{yy}(x_0, y_0)\, dy^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy \right)^2 (f(x_0, y_0)),$$

  druhý diferenciál funkce $f(x, y, z)$ tří proměnných v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ vzhledem k vektoru $\mathbf{h} = (dx, dy, dz)$ má tvar

$$d^2 f(X_0, \mathbf{h}) = f''_{xx}(x_0, y_0, z_0)\, dx^2 + f''_{yy}(x_0, y_0, z_0)\, dy^2 + f''_{zz}(x_0, y_0, z_0)\, dz^2 +$$

$$+ 2f''_{xy}(x_0, y_0, z_0)\, dx\, dy + 2f''_{xz}(x_0, y_0, z_0)\, dx\, dz + 2f''_{yz}(x_0, y_0, z_0)\, dy\, dz =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy + \frac{\partial}{\partial z}\, dz \right)^2 (f(x_0, y_0, z_0)),$$

  k-tý diferenciál funkce n proměnných má symbolický tvar

$$d^k f(X, \mathbf{h}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\, dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\, dx_n \right)^k (f(X)).$$

Nejdůležitější tvrzení této kapitoly obsahuje Taylorova věta o nahrazení funkce v okolí nějakého bodu Taylorovým polynomem:

$$f(X_0 + \mathbf{h}) = f(X_0) + \frac{1}{1!}\, df(X_0, \mathbf{h}) + \frac{1}{2!}\, d^2 f(X_0, \mathbf{h}) + \cdots + \frac{1}{k!}\, d^k f(X_0, \mathbf{h}) + R_{k+1}(X),$$

$$R_{k+1}(X) = \frac{1}{(k+1)!}\, d^{(k+1)} f(X_0 + \xi\, \mathbf{h}, \mathbf{h}),\ \xi \in (0, 1).$$

Otázky a úkoly

1. Formulujte definici druhé parciální derivace funkce více proměnných.

2. Nechť funkce $f(x, y)$ je součtem dvou funkcí, z nichž jedna závisí pouze na x a druhá

pouze na y. Existuje-li f''_{xy}, čemu se rovná?

3. Pro funkci $f(x,y,z) = x^3 e^{4x \sin y} + y^2 \sin xy + 4xyz$ můžeme počítat f'''_{xyz} v různém pořadí. Které pořadí bude nejvýhodnější?

4. Nechť funkce $f(x,y)$ má spojité parciální derivace druhého řádu. Uvažujme křivku, která vznikne jako průsečnice plochy $z = f(x,y)$ a roviny $y = y_0$. Vysvětlete, jaký význam pro průběh této křivky v okolí bodu $x = x_0$ má hodnota $f'_x(x_0, y_0)$ a hodnota $f''_{xx}(x_0, y_0)$.

5. Nechť $f(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + ky^2$, kde a, b, c, d, e, k jsou konstanty. Ukažte, že platí
$$a = f(0,0), \qquad b = f'_x(0,0), \qquad c = f'_y(0,0),$$
$$d = \tfrac{1}{2} f''_{xx}(0,0), \quad e = f''_{xy}(0,0), \quad k = \tfrac{1}{2} f''_{yy}(0,0)$$
a výsledek zdůvodněte.

Cvičení

1. Vypočítejte následující parciální derivace vyšších řádů:
$$\text{a)} \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad \text{je-li}$$
$$f(x,y) = x - y + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 - 3x^2 y - y^3 + x^4 - 4x^2 y^2 + y^4,$$
$$\text{b)} \quad \frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p y^q}, \qquad \text{je-li} \quad f(x,y) = (x-a)^p (y-b)^q,$$
$$\text{c)} \quad \frac{\partial^{p+q+r} f}{\partial x^p y^q y^r}, \qquad \text{je-li} \quad f(x,y,z) = xyz e^{x+y+z},$$
$$\text{d)} \quad \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m y^n}(0,0), \quad \text{je-li} \quad f(x,y) = e^x \sin y.$$

2. Najděte $d^3 f(X)$ pro $\mathbf{h} = (dx, dy, dz)$, je-li $f(x,y,z)$ rovno
$$\text{a)} \quad xyz, \quad \text{b)} \quad \sin(x^2 + y^2), \quad \text{c)} \quad \ln(x^x\, y^y\, z^z).$$

3. Najděte Taylorův polynom funkce f v bodě X_0 pro dané n:
$$\text{a)} \quad f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 3y + 1, \quad X_0 = (1,2), \quad n = 3,$$
$$\text{b)} \quad f(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy, \qquad X_0 = (1,1), \quad n = 2,\ n - 3.$$

4. Najděte Taylorův polynom funkce f v bodě $X_0 = (0,0)$ pro dané n:
$$\text{a)} \quad f(x,y) = \frac{1}{1 - x - y + xy}, \qquad n = 2,$$
$$\text{b)} \quad f(x,y) = \cos(x^2 + y^2), \qquad n = 5,$$
$$\text{c)} \quad f(x,y) = e^x \sin y, \qquad n = 3,$$
$$\text{d)} \quad f(x,y) = \ln(1-x)\, \ln(1-y), \quad n = 3.$$

5. Najděte třetí Taylorův polynom funkce $f(x,y,z) = \sin x \, \sin y \, \sin z$ v bodě $X_0 = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

6. Nahraďte funkci $f(x,y) = x^y$ v okolí bodu $X_0 = (1,1)$ polynomem třetího stupně. Pomocí tohoto polynomu určete přibližně $(1{,}1)^{1{,}02}$.

Výsledky

1. a) 24, 0, −16, b) $p!q!$, c) $(x+p)(y+q)(z+r)\,\mathrm{e}^{x+y+z}$, d) $\sin n\frac{\pi}{2}$;
2. a) $6dx\,dy\,dz$, b) $-12\sin(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)(dx^2+dy^2) - 8\cos(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)^3$, c) $-\frac{1}{x^2}dx^3 - \frac{1}{y^2}dy^3 - \frac{1}{z^2}dz^3$;
3. a) $-2-y+(y-2)^2-2(x-1)(y-2)+3(x-1)^2$, b) $y-2+x+3(x-1)^2+3(y-1)^2-2(x-1)(y-1)$, $y-2+x+3(x-1)^2+3(y-1)^2-2(x-1)(y-1)+(x-1)^3+(y-1)^3$; **4.** a) $1+y+x+x^2+xy+y^2$, b) $1-\frac{1}{2}x^4-y^2x^2-\frac{1}{2}y^4$, c) $y+xy-\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{2}x^2y$, d) $xy+\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{2}x^2y$;
7. $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+(x-\frac{\pi}{4})+(z-\frac{\pi}{4})+(y-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4})^2+(y-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{4})+(z-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}(z-\frac{\pi}{4})^2+(y-\frac{\pi}{4})(z-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}(y-\frac{\pi}{4})^2-\frac{1}{6}(x-\frac{\pi}{4})^3-\frac{1}{2}(y-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{1}{2}(z-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{1}{2}(y-\frac{\pi}{4})^2(x-\frac{\pi}{4})+(z-\frac{\pi}{4})(y-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}(z-\frac{\pi}{4})^2(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{6}(z-\frac{\pi}{4})^3-\frac{1}{6}(y-\frac{\pi}{4})^3-\frac{1}{2}(y-\frac{\pi}{4})^2(z-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2}(y-\frac{\pi}{4})(z-\frac{\pi}{4})^2)$;
8. $1+(x-1)+(x-1)(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2(y-1)$, $1+0{,}1+0{,}1\cdot 0{,}02+0{,}5\cdot 0{,}01\cdot 0{,}02 = 1{,}1021$.

5.6 Optimalizace

Lokální extrémy

Definice 5.51. Řekneme, že funkce $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ má v bodě $X_0 \in A$ ***lokální maximum*** (resp. ***minimum***), jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(X_0)$ tak, že platí

$$\forall X \in \mathcal{U}^*(X_0): \quad f(X) \leq f(X_0) \quad (\text{resp. } f(X) \geq f(X_0)).$$

V případě, že platí ostré nerovnosti, říkáme, že lokální maximum resp. minimum je ostré.

Lokální maximum a minimum se nazývá společným pojmem ***lokální extrém***.

Pod pojmem lokální extrém budeme nadále rozumět ostré lokální extrémy, v případě neostrých extrémů na to upozorníme.

Nutná podmínka pro extrém

Věta 5.52. **(Fermatova)** *Nechť $f : A \to \mathbb{R}$ je hladká na nějakém okolí $\mathcal{U}(X_0)$ bodu X_0 a nechť má funkce f v bodě X_0 lokální extrém. Pak platí:*

$$grad f(X_0) = f'(X_0) = \mathbf{0}.$$

Platí-li v bodě X_0 vztah $\operatorname{grad} f(X_0) = \mathbf{0}$, říkáme, že X_0 je ***stacionární bod*** funkce f. Stacionární bod, ve kterém extrém nenastane, se nazývá ***sedlový bod.***

Postačující podmínka pro extrém

Věta 5.53. *Nechť X_0 je stacionárním bodem funkce $f : A \to \mathbb{R}$. Pak platí-li pro každý nenulový přírůstkový vektor* $\mathbf{h}$

1. $d^2f(X_0, \mathbf{h}) > 0$, *je v bodě X_0 lokální minimum,*
2. $d^2f(X_0, \mathbf{h}) < 0$, *je v bodě X_0 lokální maximum,*
3. $d^2f(X_0, \mathbf{h}) \geq 0$, *extrém v bodě X_0 může a nemusí nastat,*
4. $d^2f(X_0, \mathbf{h}) \leq 0$, *extrém v bodě X_0 může a nemusí nastat.*

Jestliže pro některé $\mathbf{h}$ *je* $d^2f(X_0, \mathbf{h}) > 0$ *a pro jiné* $\mathbf{h}$ *je* $d^2f(X_0, \mathbf{h}) < 0$, *extrém nenastane.*

Poznámka: Druhý diferenciál můžeme napsat ve tvaru $d^2f(X_0, \mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \cdot f''(X_0) \cdot \mathbf{h}$. Například pro funkci f tří proměnných se spojitými parciálními derivacemi alespoň druhého řádu můžeme druhý diferenciál napsat ve tvaru

$$d^2f = [dx, dy, dz] \cdot \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}.$$

Označme determinant matice f'' jako D_n a jeho subdeterminanty obsahující prvních k řádků a sloupců tohoto determinantu jako D_k, je tedy

$$D_1 = |f''_{x_1x_1}|,\ D_2 = \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} \end{vmatrix},\ \dots, D_n = |f''|.$$

Pomocí těchto determinantů můžeme obvykle rozhodnout, zda ve stacionárním bodě nastane extrém a jaký:

Věta 5.54. **(Sylvestrovo kriterium)** *Nechť A je stacionární bod funkce f n proměnných.*

- *Jsou-li v bodě A subdeterminanty $D_1, D_2, \dots, D_n$ matice f'' všechny kladné, má funkce f v bodě A lokální minimum.*
- *Jsou-li v bodě A subdeterminanty $D_1, D_3, \dots$ záporné a subdeterminanty $D_2, D_4, \dots$ kladné (tedy jsou střídavě záporné a kladné s D_1 záporným), má funkce f v bodě A lokální maximum.*
- *Je-li některý subdeterminant se sudým indexem v bodě A záporný, potom v bodě A extrém nenastane.*
- *Je-li některý subdeterminant s lichým indexem kladný a jiný záporný, extrém nenastane.*

- *Je-li některý subdeterminant v bodě A roven nule a předchozí dvě podmínky extrém nevyloučily, nelze pomocí tohoto kriteria o existenci extrému rozhodnout.*

Příklad 5.55. Máme najít lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Řešení. Hledejme stacionární body – body, ve kterých má funkce nulový gradient:

$$\operatorname{grad} f = (3x^2 - 3y,\, 3y^2 - 3x) = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} y = x^2 \\ x = y^2 \end{array} \right. \;\Rightarrow\; x = x^4 \;\Leftrightarrow\; x(x^3 - 1) = 0$$

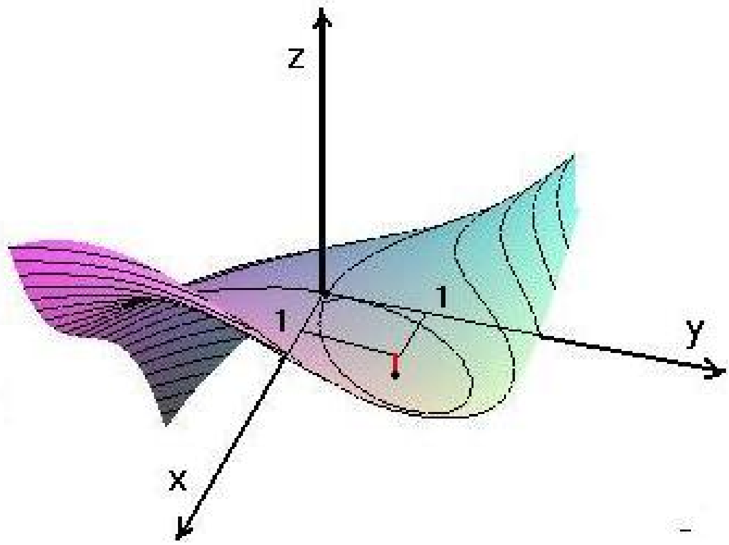
Dostáváme dva stacionární body $A = (0,0)$, $B = (1,1)$. Vyšetříme druhý diferenciál v těchto bodech:

$$f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xy} = -3, \quad f''_{yy} = 6y; \qquad d^2 f = 6x\,dx^2 - 6\,dx\,dy + 6y\,dy^2;$$

Druhá derivace má tvar

$$f'' = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}; \qquad f''(A) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}; \qquad f''(B) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix};$$

Podle Sylvestrova kriteria máme zjistit znaménka příslušných determinantů:
$D_2(A) = |f''(A)| = -9 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ v bodě A extrém nenastane;
$D_2(B) = |f''(B)| = 27 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ v bodě B extrém může nastat;
$D_1(B) = f''_{xx}(B) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ v bodě B nastane minimum (viz následující obrázek).
□



Obr. 5.28: $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

Příklad 5.56. Máme vyšetřit lokální extrémy funkce
$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 3xz - 2y + 2z$.

Řešení. $\mathrm{grad} f(x, y, z) = (3x^2 - 3z,\ 2y - 2,\ z - 3x + 2) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad$ dva stacionární body $A = (1, 1, 1),\ B = (2, 1, 4)$.
Druhá derivace

$$f'' = \begin{bmatrix} 6x & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{array}{llll} D_3(A) = -6 & D_2(A) = 12 & D_1(A) = 6 & \Rightarrow \ \mathit{nic} \\ D_3(B) = 6 & D_2(B) = 24 & D_1(B) = 12 & \Rightarrow \ \mathit{minimum} \end{array}$$

□

Povšimněme si, že v bodě A znaménko druhého determinantu naznačovalo, že by extrém mohl nastat; ale protože první a třetí determinant má znaménka opačná, extrém v bodě A nenastane.

Sylvestrovo kriterium nemusí rozhodnout, je-li některý z determinantů D_k roven nule. V tom případě může nastat více situací – ostrý nebo neostrý extrém, nebo extrém vůbec nemusí nastat. Ukážeme si to na následujícím příkladě:

Příklad 5.57. Máme vyšetřit lokální extrémy následujících funkcí:

a) $f(x, y) = x^2 + y^3$

b) $f(x, y) = x^2 + y^4$

c) $f(x, y) = (x - y)^2$

Řešení. a) $f' = (2x,\ 3y^2) = \mathbf{0} \ \Rightarrow$ jediný stacionární bod $(0, 0)$.

$$f'' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}, \quad D_2(0, 0) = 0$$

– extrém může a nemusí nastat.
V obrázku 5.29 vidíme, že extrém nenastane.

b) $f' = (2x,\ 4y^3) = \mathbf{0} \ \Rightarrow$ jediný stacionární bod $(0, 0)$.

$$f'' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}, \quad D_2(0, 0) = 0$$

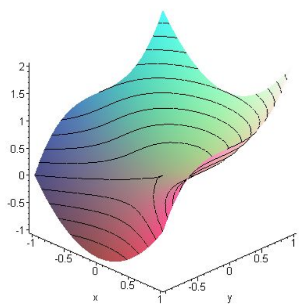
– extrém může a nemusí nastat.
V obrázku 5.30 vidíme, že nastane ostré lokální minimum.

c) $f' = (2(x - y),\ -2(x - y)) = \mathbf{0} \ \Rightarrow$ přímka stacionárních bodů $y = x$.

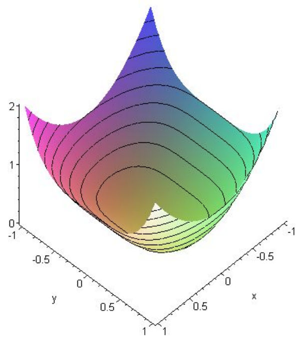
$$f'' = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad D_2(0, 0) = 0$$

– extrém může a nemusí nastat.
V obrázku 5.31 vidíme, že nastane neostré lokální minimum.

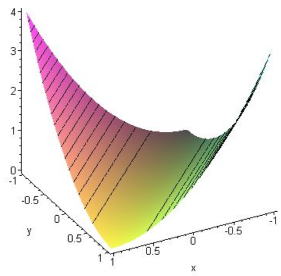
□



Obr. 5.29: $x^2 + y^3$



Obr. 5.30: $x^2 + y^4$



Obr. 5.31: $(x - y)^2$

Vázané a absolutní extrémy

Definice 5.58. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je libovolná množina, $X_0 \in M$. Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}$ má v bodě X_0 lokální maximum (resp. minimum) ***vzhledem k množině*** M, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(X_0)$ tak, že platí:

$$\forall X \in (\mathcal{U}(X_0) \cap M) \quad \text{je } f(X) \leq f(X_0) \quad (\text{resp. } f(X) \geq f(X_0)).$$

Nejčastěji se vyšetřují extrémy, kdy množina je popsána podmínkami ve tvaru rovností; pak hovoříme o ***vázaných extrémech*** a podmínky nazýváme ***vazbami***. Funkci, jejíž extrém hledáme, nazýváme někdy ***účelovou funkcí***.

Budeme vyšetřovat úlohy, ve kterých mají podmínky takový tvar, že z nich lze některé proměnné explicitně vyjádřit, eventuálně vazební podmínku umíme vyjádřit v parametrickém tvaru. Potom můžeme dosadit za vyjádřené proměnné a hledat lokální extrémy vzniklé funkce méně proměnných.

Příklad 5.59. Rozložme kladné číslo a na čtyři kladné sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.

Řešení. Formalizace úlohy: Hledáme extrém funkce $f(x, y, z, u) = xyzu$ za podmínky $x + y + z + u = a$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $u > 0$.
Z vazební podmínky vyjádříme proměnnou u, dosadíme do účelové funkce a dostáváme formalizaci

$$F(x, y, z) = xyz(a - x - y - z) \ \to \ min, \quad x > 0,\, y > 0,\, z > 0.$$

Hledáme body, ve kterých platí

$$F' = (\, yz(a - 2x - y - z),\, xz(a - x - 2y - z),\, xy(a - x - y - 2z)\,) = \mathbf{0}.$$

Vzhledem k tomu, že žádná proměnná nemůže být rovna nule, řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= a \\ x + 2y + z &= a \\ x + y + 2z &= a \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad x = y = z = \frac{a}{4}\ (= u)$$

Dostáváme stacionární bod $A = \left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$.

Z charakteru úlohy vyplývá, že jsme našli řešení úlohy; přesto se přesvědčíme pomocí Sylvestrova kriteria, že se jedná o maximum:

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= -2yz, \quad f''_{xy} = z(a-2x-2y-z); \\ f''_{yy} &= -2xz, \quad f''_{xz} = y(a-2x-y-2z); \\ f''_{zz} &= -2xy, \quad f''_{yz} = x(a-x-2y-2z); \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f''_{xx}(A) &= f''_{yy}(A) = f''_{zz}(A) = -\tfrac{a^2}{8}, \\ f''_{xy}(A) &= f''_{xz}(A) = f''_{yz}(A) = -\tfrac{a^2}{16}. \end{aligned}$$

$$f'' = \left(-\frac{a^2}{16}\right)^3 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D_3(A) = -\frac{a^6}{4^6}\cdot 6 < 0, \quad D_2(A) = \frac{a^4}{4^4}\cdot 3 > 0, \quad D_1(A) = -\frac{a^2}{8} < 0$$

– v bodě A skutečně nastane maximum o hodnotě $\frac{a^4}{4^4}$. Číslo je třeba rozdělit na čtyři stejné díly. □

Příklad 5.60. Máme najít extrémy funkce $f(x,y) = xy$ za podmínky $x^2 + y^2 = 2$.

Řešení. V tomto případě nemůžeme vyjádřit z podmínky žádnou proměnnou jednoznačně, je vhodnější použít parametrické rovnice. Podmínka je rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{2}$, parametrické rovnice mají tedy tvar

$$x = \sqrt{2}\,\cos t,\; y = \sqrt{2}\,\sin t, \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Dosadíme do účelové funkce a dostaneme funkci

$$g(t) = f(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t) = 2\cos t\,\sin t = \sin 2t.$$

Úlohu jsme převedli na problém nalezení největší a nejmenší hodnoty funkce jedné proměnné t na uzavřeném intervalu $t\langle 0, 2\pi \rangle$.

$$g'(t) = 2\cos 2t, \quad g'(t) = 0 \;\Rightarrow\; 2t = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\Rightarrow t = \frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}.$$

Z nalezených stacionárních bodů leží v daném intervalu čtyři, a to

$$t_1 = \frac{\pi}{4},\; t_2 = \frac{3\pi}{4},\; t_3 = \frac{5\pi}{4},\; t_4 = \frac{7\pi}{4}.$$

Vzhledem k tomu, že funkce g je na intervalu $t\langle 0, 2\pi \rangle$ spojitá, má zde největší a nejmenší hodnotu, a to buď ve stacionárních bodech, nebo v krajních bodech intervalu. Stačí tedy porovnat funkční hodnoty v těchto bodech:

$$g(t_1) = \sin(2\frac{\pi}{4}) = 1,\; g(t_2) = \sin(2\frac{3\pi}{4}) = -1,$$

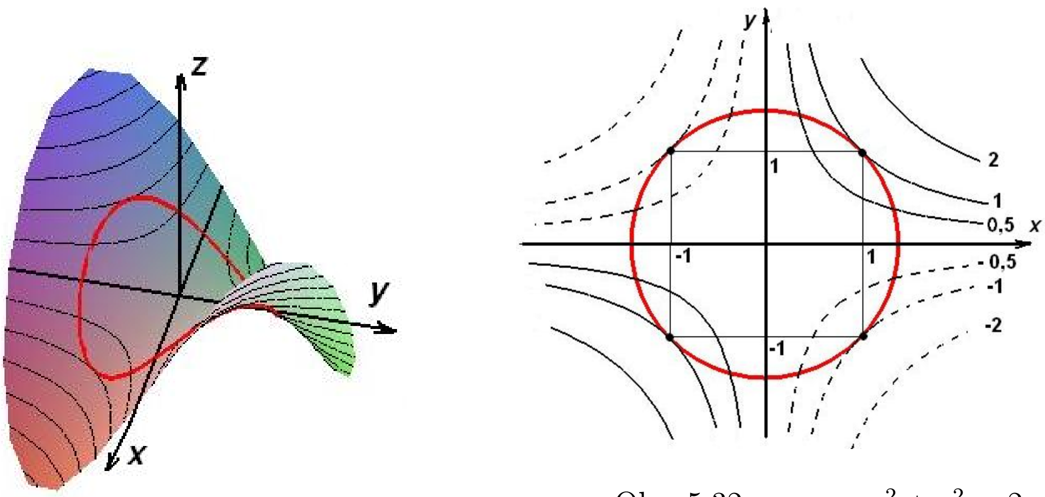
$$g(t_3) = \sin(2\frac{5\pi}{4}) = 1,\; g(t_4) = \sin(2\frac{7\pi}{4}) = -1,\; g(0) = g(2\pi) = 0.$$

Funkce g má maximum 1 v bodech t_1 a t_3, minimum -1 v bodech t_2 a t_4. Funkce f má vázané lokální maximum 1 v bodech A a B, kde

$$A = [\sqrt{2}\cos t_1, \sqrt{2}\sin t_1] = [1, 1], \ \ B = [\sqrt{2}\cos t_3, \sqrt{2}\sin t_3] = [-1, -1],$$

a vázané lokální minimum -1 v bodech C a D, kde

$$C = [\sqrt{2}\cos t_2, \sqrt{2}\sin t_2] = [-1, 1], \ \ D = [\sqrt{2}\cos t_4, \sqrt{2}\sin t_4] = [1, -1].$$



Obr. 5.32: $z = xy, x^2 + y^2 = 2$

□

Absolutní extrémy jsou největší a nejmenší hodnoty funkce na množinách zpravidla stejné dimenze jako definiční obor funkce (obvykle popsané nerovnostmi). Jejich existenci zaručuje následující věta:

Věta 5.61. **(Weierstrassova)** *Spojitá funkce nabývá na uzavřené oblasti svého absolutního maxima a minima.*

Při hledání absolutních extrémů se budeme opírat o větu:

Věta 5.62. *Jestliže funkce f je hladká v oblasti A a spojitá v A i na hranici $h(A)$, potom nabývá své největší a nejmenší hodnoty (tj. absolutních extrémů) buď ve stacionárních bodech uvnitř oblasti, nebo v hraničních bodech.*

V prvním případě jde tedy o hledání volných lokálních extrémů a ve druhém o hledání vázaných extrémů, kde rovnice hranice je vazební podmínkou.

Příklad 5.63. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$$

na množině

$$\{\, (x, y) \,|\, x \geq 0,\, 0 \leq y \leq 3 - x \,\}\,.$$

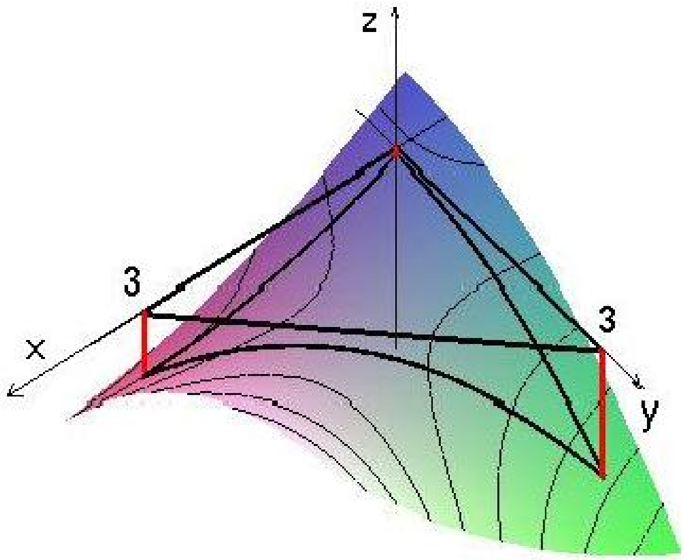
Funkce je spojitá, množina uzavřená oblast – absolutní extrémy mohou nastat ve stacionárních bodech uvnitř zadané množiny, ve stacionárních bodech pro vázané extrémy na úsečkách

$$\{\, x = 0,\ y \in (0,3)\,\},$$

$$\{\, y = 0,\ x \in (0,3)\,\}$$

$$\{\, y = 3 - x,\ x \in (0,3)\,\}$$

nebo ve vrcholech trojúhelníka. Stačí najít příslušné stacionární body, vypočítat v nich funkční hodnoty a porovnat s hodnotami ve vrcholech. V bodě, kde bude hodnota největší resp. nejmenší, je absolutní maximum resp. minimum:



Obr. 5.33: $x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$

Řešení. Stacionární body uvnitř množiny:

$$f' = (2x + 4y - 6,\ -4y + 4x) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad A = (1,1),\ f(A) = -4$$

Vázané extrémy:

$$f(0,y) = f_1(y) = -2y^2 - 1,$$

$$y \in (0,3); \qquad f_1' = -4y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0,$$

$$f(x,0) = f_2(x) = x^2 - 6x - 1,$$

$$x \in (0,3); \qquad f_2' = 2x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3,$$

$$f(x, 3-x) = f_3(x) = -5x^2 + 18x - 19,$$

$$x \in (0,3); \qquad f_3' = -10x + 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{9}{5},\ y = \frac{6}{5}.$$

Vypočítáme příslušné funkční hodnoty:

$$f(1,1) = -4,\ f(\frac{9}{5}, \frac{6}{5}) = -\frac{14}{5},\ f(0,3) = -19,\ f(3,0) = -10,\ f(0,0) = -1 \ \Rightarrow$$

funkce má na dané množině absolutní maximum v bodě $(0,0)$, $\quad f_{\max} = -1$,
funkce má na dané množině absolutní minimum v bodě $(0,3)$, $\quad f_{\min} = -19$. □

Poznámky k předchozímu příkladu:

a) Z obrázku je patrné, že ve stacionárním bodě $(1,1)$ má funkce sedlový bod, tedy zde nemá ani lokální extrém. Ovšem jelikož nás zajímal absolutní extrém, nebylo třeba vyšetřovat v tomto bodě druhou derivaci.

b) Při výpočtu vázaných extrémů na hraničních úsečkách nám vyšly jako „podezřelé z extrému“ body $(0,0)$ a $(3,0)$ a my jsme je vyloučili. Jsou to totiž vrcholy trojúhelníka, tedy body, ve kterých musíme v každém případě hodnotu vypočítat. Vyloučili jsme je proto, abychom je zbytečně nevyšetřovali dvakrát.

Příklad 5.64. Drát délky l máme rozdělit na tři části, ze kterých vyrobíme kružnici, rovnostranný trojúhelník a čtverec, přičemž připouštíme možnost, že některá část má nulovou délku. Máme zjistit, kdy bude součet plošných obsahů vzniklých obrazců
a) minimální, b) maximální.

Řešení. Nejdříve musíme úlohu formalizovat, tedy nalézt účelovou funkci, jejíž extrémy máme hledat, a množinu, na které máme hledat extrémy.

Označme jako x délku kružnice,
y obvod trojúhelníka a
z obvod čtverce.

Potom platí $x = 2\pi r$, tedy $r = \frac{x}{2\pi}$, kde r je poloměr kruhu,
$y = 3a$, tedy $a = \frac{y}{3}$, kde a je strana trojúhelníka,
$z = 4b$, tedy $b = \frac{z}{4}$, kde b je strana čtverce.

Pro jednotlivé plošné obsahy platí:

obsah kruhu: $S_{kr} = \pi r^2 = \dfrac{x^2}{4\pi}$,

obsah trojúhelníka: $S_{tr} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{36}y^2$,

obsah čtverce: $S_{ct} = b^2 = \dfrac{z^2}{16}$.

Odtud

$$S_{kr} + S_{tr} + S_{ct} = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{y^2\sqrt{3}}{36} + \frac{z^2}{16} = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{\pi} + \frac{y^2\sqrt{3}}{9} + \frac{z^2}{4}\right).$$

Dosadíme za z z podmínky $x + y + z = l$ a jako účelovou funkci zvolíme

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{9}y^2 + \frac{1}{4}(l - x - y)^2.$$

Nyní určíme množinu, na které budeme extrémy hledat. Ze zadání úlohy dostaneme omezení pro x, y a z:

$$0 \le x \le l,\ 0 \le y \le l,\ 0 \le z \le l,$$

přičemž polední podmínka znamená

$$0 \le l - x - y \le l \Rightarrow 0 \le x + y \le l.$$

Úlohu tedy můžeme formalizovat takto:

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{9}y^2 + \frac{1}{4}(l - x - y)^2 \quad \longrightarrow extr, \qquad 0 \le x \le l,\ 0 \le y \le l - x.$$

Podmínka zřejmě popisuje trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[0,l]$, $[l,0]$; máme tedy najít největší a nejmenší hodnotu účelové funkce na tomto trojúhelníku.

Nejdříve vyšetříme lokální extrémy uvnitř trojúhelníka:

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \left(\frac{2}{\pi}x + \frac{1}{2}(x+y-l);\ \frac{2\sqrt{3}}{9}y + \frac{1}{2}(x+y-l)\right), \quad \operatorname{grad} f(x,y) = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$x_0 = \frac{\pi\sqrt{3}}{9+(4+\pi)\sqrt{3}}\, l \doteq 0{,}255\, l \quad y_0 = \frac{9}{9+(4+\pi)\sqrt{3}}\, l \doteq 0{,}421\, l.$$

$$f''(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2\sqrt{3}}{9}+\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad D_2 = \frac{9+(4+\pi)\sqrt{3}}{9\pi} > 0, \quad D_1 = \frac{2}{\pi}+\frac{1}{2} > 0$$

– ve stacionárním bodě $[x_0, y_0]$ nastane minimum s hodnotou

$$f(x_0,y_0) = \frac{3(4+\pi+3\sqrt{3})}{(9+(4+\pi)\sqrt{3})^2}\, l^2 \doteq 0{,}081\, l^2.$$

Vázané extrémy na hranici, tedy na jednotlivých stranách trojúhelníka:

a) $x = 0,\ y \in (0,l)$:

$$f(0,y) = f_1(y) = \frac{\sqrt{3}}{9}\, y^2 + \frac{1}{4}\,(l-y)^2,$$

$$f_1'(y) = \frac{2\sqrt{3}}{9}\, y + \frac{1}{2}\,(y-l);$$

$$f_1'(y) = 0 \text{ pro } y_1 = \frac{9}{4\sqrt{3}+9}\, l \quad (\in (0,l)), \qquad f_1''(y) = \frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{1}{2} > 0$$

v bodě $y_1 = \dfrac{9}{4\sqrt{3}+9}\, l$ nastane vázané lokální minimum s hodnotou

$$f_1(y_1) = f(0,y_1) = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}+9}\, l^2 \doteq 0{,}109\, l^2.$$

b) $y = 0,\ x \in (0,l)$:

$$f(x,0) = f_2(x) = \frac{1}{\pi}\, x^2 + \frac{1}{4}\,(l-x)^2,$$

$$f_2'(x) = \frac{2}{\pi}\, x + \frac{1}{2}\,(x-l);$$

$$f_2'(x) = 0 \text{ pro } x_2 = \frac{\pi}{4+\pi}\, l \quad (\in (0,l)), \qquad f_2''(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{2} > 0$$

v bodě $x_2 = \frac{\pi}{4+\pi}\, l$ nastane vázané lokální minimum s hodnotou

$$f_2(x_2) = f(x_2,0) = \frac{1}{4+\pi}\, l^2 \doteq 0{,}140\, l^2.$$

c) $y = l - x,\ x \in (0, l)$:

$$f(x, l-x) = f_3(x) = \frac{1}{\pi}\, x^2 + \frac{\sqrt{3}}{9}\,(l-x)^2,$$

$$f_3'(x) = \frac{2}{\pi}\, x + \frac{2\sqrt{3}}{9}\,(x-l);$$

$$f_3'(x) = 0 \text{ pro } x_3 = \frac{\sqrt{3}}{9+\sqrt{3}}\, l \quad (\in (0,l)), \qquad f_3''(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0$$

v bodě $x_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{9+\sqrt{3}}\, l$ nastane vázané lokální minimum s hodnotou

$$f_3(x_3) = f(x_3, l - x_3) = \frac{3(\pi + 3\sqrt{3})}{(9+\pi\sqrt{3})^2}\, l^2 \doteq 0{,}120\, l^2.$$

Určíme hodnoty účelové funkce v jednotlivých vrcholech trojúhelníka a všechny zjištěné hodnoty porovnáme:

$$f(0,0) = \frac{1}{4}\, l^2 = 0{,}25\, l^2, \quad f(0,l) = \frac{\sqrt{3}}{9}\, l^2 \doteq 0{,}192\, l^2, \quad f(l,0) = \frac{1}{\pi}\, l^2 \doteq 0{,}318\, l^2.$$

Vidíme, že nejmenší hodnoty účelová funkce nabude v bodě $[x_0, y_0]$ a největší v bodě $[l, 0]$.

Závěrem výsledky shrneme:

Nejmenší součet plošných obsahů získáme pro

$$x = \frac{\pi\sqrt{3}}{9 + (4+\pi)\sqrt{3}}\, l \doteq 0{,}255\, l,$$

$$y = \frac{9}{9 + (4+\pi)\sqrt{3}}\, l \doteq 0{,}421\, l,$$

$$z = \frac{4\sqrt{3}}{9 + (4+\pi)\sqrt{3}}\, l \doteq 0{,}324\, l.$$

Minimální hodnota je

$$\frac{1}{4}\, f(x_0, y_0) = \frac{3(4 + \pi + 3\sqrt{3})}{4(9 + (4+\pi)\sqrt{3})^2}\; l^2 \doteq 0{,}0202\, l^2.$$

Největší součet plošných obsahů získáme pro

$$x = l,\ y = 0,\ z = 0,$$

tedy v případě, že z celého drátu utvoříme kruh. Maximální hodnota je

$$\frac{1}{4}\, f(l, 0) = \frac{1}{4\pi}\, l^2 \doteq 0{,}0796\, l^2.$$

□

Shrnutí

V této kapitole jsme pro funkce více proměnných zavedli pojmy

- lokální maximum (resp. minimum): má funkce f v bodě X_0, jestliže existuje okolí tohoto bodu tak, že v libovolném bodě tohoto okolí jsou funkční hodnoty funkce f menší (resp. větší) než v bodě X_0, přičemž lokální maximum (resp. minimum) je funkční hodnota funkce f v bodě maxima (resp. minima),
- lokální extrém: společný název pro lokální maxima a minima,
- vázaný extrém: lokální extrém funkce, která vznikne zúžením dané funkce na množinu bodů, popsaných podmínkou (nebo více podmínkami), které jsou ve tvaru rovností,
- absolutní extrém: lokální extrém funkce, která vznikne zúžením dané funkce na množinu bodů, popsaných podmínkami, které jsou ve tvaru nerovností.

Dále jsme uvedli nutné a postačující podmínky pro existenci lokálních extrémů funkcí třídy C_k, $k \geq 2$:

- má-li funkce f v X_0 lokální extrém, platí $\operatorname{grad} f(X_0) = f'(X_0) = \mathbf{0}$, přičemž bod, ve kterém je tato podmínka splněna, se nazývá stacionární bod,
- platí-li pro druhý diferenciál funkce f ve stacionárním bodě X_0 pro každý nenulový přírůstkový vektor $\mathbf{h}$

  1. $d^2 f(X_0, \mathbf{h}) > 0$, je v bodě X_0 lokální minimum,
  2. $d^2 f(X_0, \mathbf{h}) < 0$, je v bodě X_0 lokální maximum,
  3. $d^2 f(X_0, \mathbf{h}) \geq 0$, extrém v bodě X_0 může a nemusí nastat,
  4. $d^2 f(X_0, \mathbf{h}) \leq 0$, extrém v bodě X_0 může a nemusí nastat.

  Jestliže pro některé $\mathbf{h}$ je $d^2 f(X_0, \mathbf{h}) > 0$ a pro jiné $\mathbf{h}$ je $d^2 f(X_0, \mathbf{h}) < 0$, extrém nenastane.

Pro jednodušší vyšetřování existence lokálních extrémů ve stacionárních bodech jsme uvedli Sylvestrovo kriterium 5.54.

Otázky a úkoly

1. Co je to lokální extrém funkce více proměnných a jak se vyšetřuje?

2. Jistá funkce $f(x, y)$ má v bodě $[a, b]$ lokální minimum. Vysvětlete, proč funkce jedné proměnné, jejíž graf vznikne jako řez grafu funkce $f(x, y)$ libovolnou rovinou, která je kolmá na souřadnou rovinu $z = 0$ a prochází bodem $[a, b, f(a, b)]$, má také v tomto bodě lokální minimum.

3. Nechť $f'_x(a, b) \neq 0$. Vysvětlete, proč funkce f nemůže mít v bodě $[a, b]$ lokální minimum.

4. Nechť $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$ a $f''_{xx}(a, b) \cdot f''_{yy}(a, b) < 0$. Vysvětlete, proč funkce f musí mít v bodě $[a, b]$ sedlový bod.

5. Vrstevnice funkce $f(x, y)$ tvoří soustředné kružnice. Musí mít funkce f ve společném středu těchto kružnic extrém?

6. Které z následujících tvrzení o funkcích se spojitými parciálními derivacemi do řádu alespoň druhého je pravdivé:
   a) Jestliže platí $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$ a $f''_{xx} > 0$, potom má funkce f v bodě (a, b) lokální minimum.
   b) Jestliže má funkce f v bodě (a, b) lokální minimum, potom platí $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$ a $f''_{xx} > 0$.
   c) Má-li funkce f právě dva stacionární body, nemůže v obou být lokální minimum.
   d) Má-li funkce f dvě lokální maxima, musí mít alespoň jedno lokální minimum.

7. Nechť $[a, b]$ je stacionární bod funkce $f(x, y)$. Pro druhé parciální derivace funkce f platí:

$$
\begin{array}{llll}
\text{a)} & f''_{xx}(a,b) = 2, & f''_{yy}(a,b) = 8, & f''_{xy}(a,b) = 4, \\
\text{b)} & f''_{xx}(a,b) = 2, & f''_{yy}(a,b) = 4, & f''_{xy}(a,b) = -3, \\
\text{c)} & f''_{xx}(a,b) = 2, & f''_{yy}(a,b) = 4, & f''_{xy}(a,b) = 3, \\
\text{d)} & f''_{xx}(a,b) = 3, & f''_{yy}(a,b) = 4, & f''_{xy}(a,b) = 2, \\
\text{e)} & f''_{xx}(a,b) = -3, & f''_{yy}(a,b) = -4, & f''_{xy}(a,b) = -2, \\
\text{f)} & f''_{xx}(a,b) = 3, & f''_{yy}(a,b) = -4, & f''_{xy}(a,b) = -2.
\end{array}
$$

   V každém případě rozhodněte, které tvrzení je pravdivé:

   (a) f má v (a, b) lokální minimum,

   (b) f má v (a, b) lokální maximum,

   (c) f v (a, b) nemá extrém,

(d) na základě daných informací o existenci extrému nelze rozhodnout.

8. Nechť $[a, b, c]$ je stacionární bod funkce $f(x, y, z)$. Pro druhé parciální derivace funkce f platí:

$$
\begin{array}{llll}
\text{a)} & f''_{xx}(a,b,c) = 1, & f''_{yy}(a,b,c) = 3, & f''_{zz}(a,b,c) = 2, \\
 & f''_{xy}(a,b,c) = 2, & f''_{xz}(a,b,c) = 3, & f''_{yz}(a,b,c) = 1, \\
\text{b)} & f''_{xx}(a,b,c) = 3, & f''_{yy}(a,b,c) = 3, & f''_{zz}(a,b,c) = 2, \\
 & f''_{xy}(a,b,c) = 2, & f''_{xz}(a,b,c) = 0, & f''_{yz}(a,b,c) = 3, \\
\text{c)} & f''_{xx}(a,b,c) = 3, & f''_{yy}(a,b,c) = 3, & f''_{zz}(a,b,c) = 6, \\
 & f''_{xy}(a,b,c) = 2, & f''_{xz}(a,b,c) = 0, & f''_{yz}(a,b,c) = 3, \\
\text{d)} & f''_{xx}(a,b,c) = -3, & f''_{yy}(a,b,c) = -1, & f''_{zz}(a,b,c) = 1, \\
 & f''_{xy}(a,b,c) = 1, & f''_{xz}(a,b,c) = 0, & f''_{yz}(a,b,c) = 3, \\
\text{e)} & f''_{xx}(a,b,c) = -2, & f''_{yy}(a,b,c) = -8, & f''_{zz}(a,b,c) = 1, \\
 & f''_{xy}(a,b,c) = 4, & f''_{xz}(a,b,c) = 0, & f''_{yz}(a,b,c) = 1,.
\end{array}
$$

V každém případě rozhodněte, které tvrzení je pravdivé:

(a) f má v (a, b) lokální minimum,

(b) f má v (a, b) lokální maximum,

(c) f v (a, b) nemá extrém,

(d) na základě daných informací o existenci extrému nelze rozhodnout.

9. Nechť $f(x, y) = ax + by + c$ kde a, b, c jsou konstanty. Nechť M je n-úhelník v rovině. Ukažte, že funkce f nabude své největší a nejmenší hodnoty na M v některém z vrcholů.

Cvičení

1. Najděte extrémy následujících funkcí $f(x, y)$:

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$, b) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x$,

c) $f(x,y) = x^4 + 8x^2 + y^2 - 4y$, d) $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + 5x^2 + 4x$,

e) $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4 - 1$, f) $f(x,y) = x^2 + x^2y + y^2 - 2y$,

g) $f(x,y) = 2x^2 + y^3 - x^2y - 3y$, h) $f(x,y) = xy^2 - x^2 - y$,

i) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^2$, j) $f(x,y) = x^4 - 4xy + 2y^2$,

k) $f(x,y) = y^3 + 4y^2 - 2xy + x^2$, l) $f(x,y) = xy^2 - 2x^2 - y^2$,

m) $f(x,y) = x^2 - \dfrac{4xy}{y^2+1}$, n) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}$,

o) $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$, p) $f(x,y) = x\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$,

q) $f(x,y) = xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$, r) $f(x,y) = xy\,e^{-x-y}$,

s) $f(x,y) = e^{x+y}(6x^2 - 3xy + y^2 - 15x + 5y + 10)$,

t) $f(x,y) = xy\,\ln(x^2 + y^2)$.

2. Najděte lokální extrémy funkcí $f(x, y, z)$:

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + y^2 + zy - z + y - 2x$,

b) $f(x,y,z) = 6x^2 + 5y^2 + 14z^2 + 4xy - 8xz - 2yz + 1$,

c) $f(x,y,z) = x^3 + 3x^2 + y^2 + z^2 + 12xy + 15x + 14y + 4z + 17$,

d) $f(x,y,z) = xyz(4a - x - y - z)$,

e) $f(x,y,z) = (ax + by + cz)\,\mathrm{e}^{x^2-y^2-z^2}$.

3. Najděte vázané extrémy:

a) $f(x,y) = xy - x + y - 1$, $x + y = 1$,

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$,

c) $f(x,y) = \sin^2 x + \sin^2 y$, $x - y = \frac{\pi}{4}$,

d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $x + y - 3z + 7 = 0, x - y + z - 3 = 0$.

4. Najděte absolutní extrémy daných funkcí na daných množinách M:

a) $f(x,y) = xy^2(4 - x - y)$, M ohraničená přímkami $x = 0$, $y - 0$, $x + y = 6$,
b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$, M obdélník s vrcholy $[0,-1], [2,-1], [2,2,], [0,2]$,

c) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, M zadána nerovností $|x| + |y| \leq 1$,
d) $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(3x^2 + 2y^2)$, M kruh $x^2 + y^2 \leq 4$,
e) $f(x,y,z) = x + y + z$, M zadána nerovnostmi $y^2 + z^2 \leq x \leq 1$.

5. Najděte a) trojúhelník b) obdélník daného obvodu $2s$ tak, aby rotační těleso, které vznikne rotací tohoto útvaru kolem jedné jeho strany, mělo největší objem.

6. Najděte rovinu procházející bodem $A = [a,b,c]$ tak, aby spolu se souřadnými rovinami tvořila čtyřstěn nejmenšího objemu.

7. Dva nepřekrývající se obdélníky jsou umístěny do trojúhelníku s vrcholy $[0,0], [1,0], [0,1]$ tak, že jejich strany jsou rovnoběžné se souřadnými osami. Najděte největší možný součet jejich plošných obsahů.

8. Najděte rozměry otevřené pravoúhlé krabice s objemem 1 tak, aby její povrch byl minimální.

9. Materiál horní a dolní podstavy pravoúhlé uzavřené krabice stojí 3 kč/m^2, cena materiálu bočních stěn je 2 kč/m^2. Vypočtěte, jakou nejmenší cenu může mít materiál na výrobu takové krabice s objemem 1m^3 a jaké má tato krabice rozměry.

Výsledky

1. a) nemá extrémy, b) min -8 v $[-4,-2]$, c) min -4 v $[0,,2]$, d) min -8 v $[-4,2]$, e) max 1 v $[1,1], [-1,-1]$, f) min -1 v $[0,1]$, g) min 0 v $[0,1,]$, h) nemá extrémy, i) min $-\frac{27}{16}$ v $[\frac{9}{4}, \frac{3}{2}]$, j) min -1 v $[1,1], [-1,-1]$, k)l) min 0 v $[0,0]$, m) min -1 v $[1,1], [-1,-1]$, n) max $\frac{\sqrt{2}}{2}$ v $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, min $-\frac{\sqrt{2}}{2})$ v $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$, o) max 1 v $[0,0]$, p) max $\frac{1}{\sqrt{2e}}$ v $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$ min $-\frac{1}{\sqrt{2e}}$ v $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$, q) max $\frac{1}{2\mathrm{e}}$ v $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ a $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ min $-\frac{1}{2\mathrm{e}}$ v $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ a $[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$, r) max e^{-2} v $[1,1]$, s) min 0 v $[1,-1]$, t) max $\frac{1}{2e}$ v $[\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ a v $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$, min $-\frac{1}{2e}$ v $[\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$ a v $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$;
2. a) min -2 v $[1,-1,1]$, b) min 1 v $[0,0,0], c)min$-6913$v[23,-143,-2]$, d) max a^4 v $[a,a,a]$, e) max v $[\frac{a}{m}, \frac{b}{m} \frac{c}{m}]$ kde $m = \sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$;
3. a) max $\frac{1}{4}$ v $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, b) max $\frac{p^2q^2}{p^2+q^2}$ v $[\frac{pq^2}{p^2+q^2}, \frac{p^2q}{p^2+q^2}]$, c) extr $\frac{1+(-1)^k}{\sqrt{2}}$ v $[5\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}]$, $k \in \mathbb{Z}$, d) min 5 v $[0,-1,2]$;
4. a) max 4 v $[1,2]$, min -64 v $[2,4]$, b) max 13 v $[2,-1]$, min -1 v $[1,1]$ a $[0,-1]$, c) min 0 v $[0,0]$, max 1 v $[1,0], [-$ $-1,0], [0,1], [0,-1]$, d) max $\frac{8}{\mathrm{e}^4}$ v $[0,\pm 2]$, min 0 v $[0,0]$, e) max $1+\sqrt{2}$, min $-\frac{1}{2}$;
5. krychle s hranou $\frac{a}{\sqrt{3}}$; **6.** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$; **7.** $\frac{2}{3}$; **8.** $[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}]$; **9.** $6\sqrt[3]{12}$, $\left[\sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\right]$.

6 Integrální počet II

6.1 Dvojný a trojný integrál

Dvojný a trojný integrál na intervalu

V tomto odstavci se budeme věnovat rozšíření pojmu určitého integrálu, kdy se integrovalo přes interval na reálné ose, na vícerozměrné intervaly. V jednorozměrném případě jsme vyjadřovali obsah rovinných oblastí omezených shora integrovanou funkcí pomocí určitého integrálu, pro který platilo:

Nechť $f : \langle a,\, b\rangle \to \mathbb{R}$ je ohraničená funkce. Riemannův integrál z této funkce na intervalu $\langle a,\, b\rangle$ lze aproximovat součty tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, m_1(I_i),$$

kde $I_1, \dots, I_n$ jsou intervaly ($I_i = \langle x_{i-1},\, x_i\rangle$) jejichž sjednocením je interval $\langle a,\, b\rangle$, $m_1(I_i) := x_i - x_{i-1}$ je délka intervalu I_i, $\xi_i \in I_i, i = 1, \dots, n$ a $\forall i, j :\ i \neq j \Rightarrow m_1(I_i \cap \cap I_j) = 0$.

Analogickou úvahou lze motivovat definici integrálu na dvojrozměrném eventuálně trojrozměrném intervalu; provedeme úvahu pro dvojrozměrný případ:

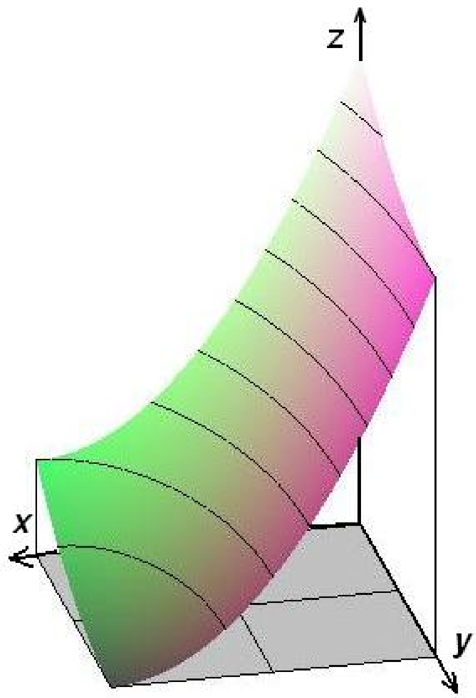
Nechť $I = \langle a,\, b\rangle \times \langle c,\, d\rangle \subset \mathbb{R}^2,\ \ f : I \to \mathbb{R}.$. (Riemannův) integrál z funkce f na intervalu I lze aproximovat součty tvaru

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, m_2(I_i),$$

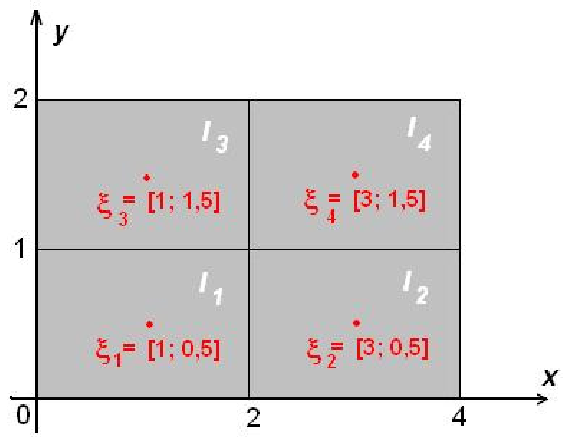
(integrálními součty), kde $I_1, \dots, I_n$ jsou (dvojrozměrné) intervaly, jejichž sjednocením je interval I, $m_2(I_i)$ je plošný obsah intervalu I_i, $\xi_i \in I_i, i = 1, \dots, n$ a $\forall i, j :\ i \neq \neq j \Rightarrow m_2(I_i \cap I_j) = 0$.

Příklad 6.1. Uvažujme funkci $f(x, y) = (x-4)^2 + (y-2)^2$ na intervalu $I = \langle 0, 4\rangle \times \langle 0, 2\rangle$. Rozdělme I na 4 stejné intervaly a za vybrané body zvolme středy těchto intervalů, tedy

$D_1 = \{\{\langle 0, 2\rangle \times \langle 0, 1\rangle, \langle 2, 4\rangle \times \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle \times \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle \times \langle 1, 2\rangle\}, \{[1, \frac{1}{2}], [3, \frac{1}{2}], [1, \frac{3}{2}], [3, \frac{3}{2}]\}\}.$



Obr. 6.1: K př. 6.1 – funkce



Obr. 6.2: K př. 6.1 – dělení

Sestavíme integrální součet:

$$S_1 = f(1,\tfrac{1}{2})\cdot 2 + f(3,\tfrac{1}{2})\cdot 2 + f(1,\tfrac{3}{2})\cdot 2 + f(3,\tfrac{3}{2})\cdot 2) = 11{,}25\cdot 2 + 9{,}25\cdot 2 + 3{,}25\cdot 2 + 1{,}25\cdot 2 = 50.$$

Rozdělme I na 16 stejných intervalů a za vybrané body zvolme opět středy těchto intervalů;
Příslušný integrální součet bude:

$$S_2 =$$

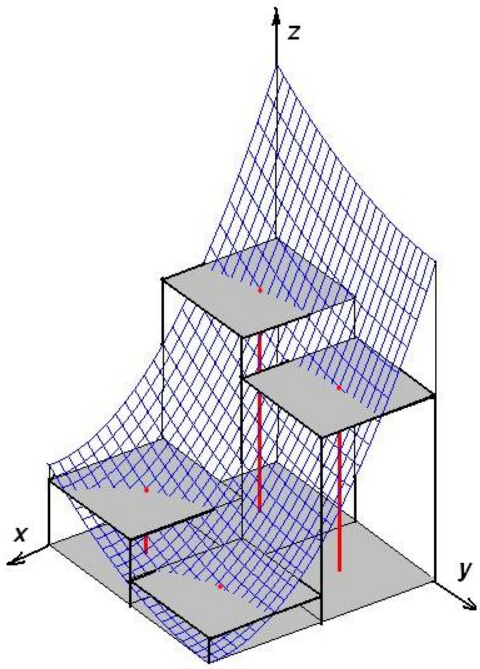
$$f(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4})\cdot\tfrac{1}{2} + f(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{4})\cdot\tfrac{1}{2} + f(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{4})\cdot\tfrac{1}{2} + f(\tfrac{7}{2},\tfrac{1}{4})\cdot\tfrac{1}{2} + f(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4})\cdot\tfrac{1}{2} + f(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{4})\cdot\tfrac{1}{2} + f(\tfrac{5}{2},\tfrac{3}{4})\cdot\tfrac{1}{2} + f(\tfrac{7}{2},\tfrac{3}{4})\cdot\tfrac{1}{2} +$$

$$+ f(\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{4})\cdot\tfrac{1}{2} + f(\tfrac{3}{2},\tfrac{5}{4})\cdot\tfrac{1}{2} + f(\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{4})\cdot\tfrac{1}{2} + f(\tfrac{7}{2},\tfrac{5}{4})\cdot\tfrac{1}{2} + f(\tfrac{1}{2},\tfrac{7}{4})\cdot\tfrac{1}{2} + f(\tfrac{3}{2},\tfrac{7}{4})\cdot\tfrac{1}{2} + f(\tfrac{5}{2},\tfrac{7}{4})\cdot\tfrac{1}{2} + f(\tfrac{7}{2},\tfrac{7}{4})\cdot\tfrac{1}{2} =$$

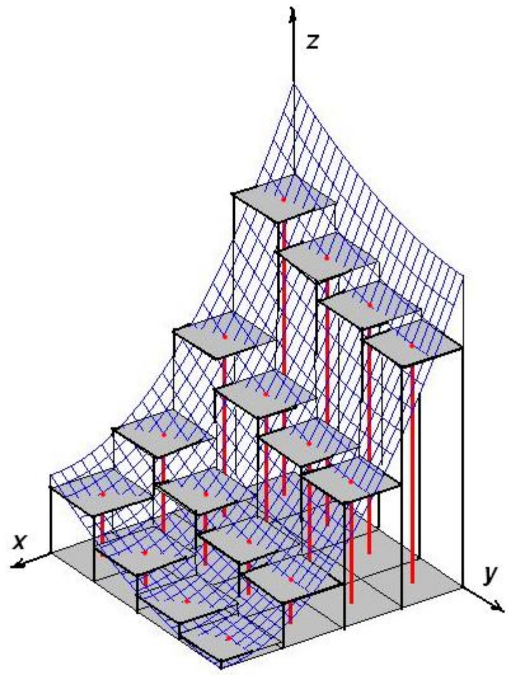
$$= \tfrac{1}{2}(15{,}3125 + 13{,}8125 + 12{,}8125 + 12{,}3125 + 9{,}3125 + 7{,}8125 + 6{,}8125 + 6{,}3125 +$$

$$+ 5{,}3125 + 3{,}8125 + 2{,}8125 + 2{,}3125 + 3{,}3125 + 1{,}8125 + 0{,}8125 + 0{,}3125) = 52{,}5.$$

Situace je naznačena v následujících obrázcích:



Obr. 6.3: K př. 6.1 – S_1



Obr. 6.4: K př. 6.1 – S_2

Budeme-li dále zjemňovat dělení, bude zřejmě hodnota integrálních součtů stále lépe aproximovat vyšetřovaný objem; naznačený postup vede k definici dvojného integrálu na obdélníku (pro trojrozměrný, event. vícerozměrný případ by se postupovalo analogicky).

Než přikročíme k formulaci definice vícerozměrného integrálu, zavedeme pojem dělení intervalu a normu dělení pro vícerozměrné intervaly; norma dělení v jednorozměrném případě byla maximální délka dělícího intervalu. Ve vícerozměrném případě se zavádí jako ekvivalentní pojem k délce jednorozměrného intervalu pojem průměru množiny:

Definice 6.2. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená ohraničená množina. Číslo

$$d(M) = \max\{|X - Y| \mid X, Y \in M\}$$

se nazývá ***průměr množiny M***.

Průměr množiny je největší možná vzdálenost libovolných dvou bodů množiny; to je u obdélníku délka úhlopříčky, u kvádru délka tělesové úhlopříčky atd.

Poznamenejme, že průměrem množiny, která není uzavřená nebo ohraničená, rozumíme číslo $d(M) = \sup\{|X - Y| \mid X, Y \in M\}$.

Definice 6.3. Nechť $I \in \mathbb{R}^k$ je k-rozměrný interval; tj. pro $k = 2$ obdélník, pro $k = 3$ kvádr, $f : I \to \mathbb{R}$ ohraničená funkce.

- Systém intervalů
$$\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$$
se nazývá ***dělení intervalu I***, jestliže platí
$$I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n = I \quad \text{a současně} \quad m_k(I_i \cap I_j) = 0 \quad \forall i, j = 1 \ldots n.$$
Průnikem libovolných dvou dílčích intervalů je tedy množina dimenze $< k$, tj. nanejvýš úsečka v dvojrozměrném případě, nanejvýš obdélník v trojrozměrném případě atd.

- ***Normou dělení*** $D(I) = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ rozumíme číslo
$$\nu(D) = \max\{d(I_i),\, i = 1 \ldots n\}.$$
Norma dělení je tedy největší průměr dělícího intervalu.

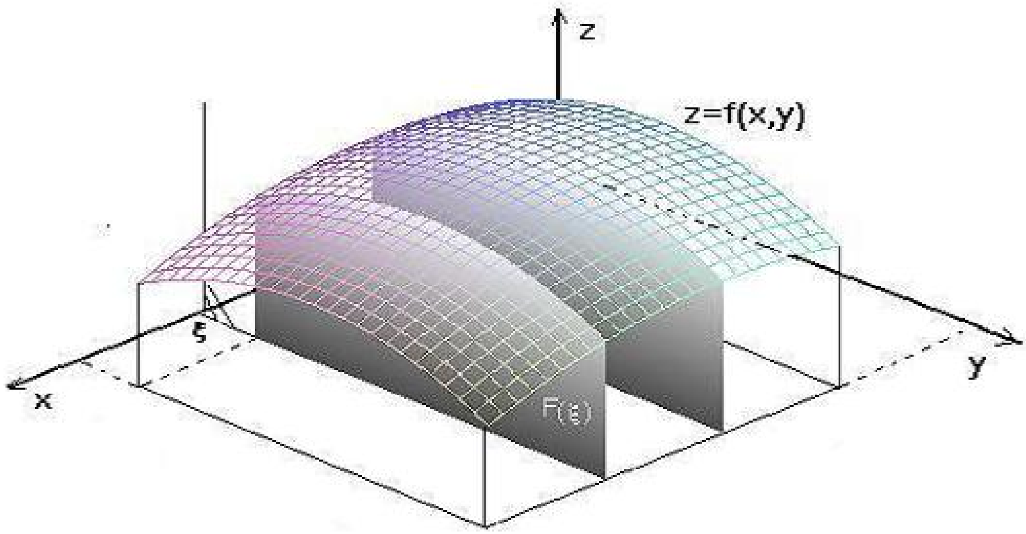
- ***Integrální součet*** příslušný funkci f a dělení $D(I)$ s vybranými body je číslo
$$\mathcal{S}(D, f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, m(I_i), \quad \text{kde} \quad \xi_i \in I_i \ \forall i.$$

- Řekneme, že číslo $\mathcal{J}$ je ***dvojným (trojným) integrálem*** funkce $f : I \to \mathbb{R}$ na intervalu I a píšeme
$$\mathcal{J} = \int_I f(x, y)\, dx\, dy \qquad \left(\mathcal{J} = \int_I f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\right),$$
jestliže pro každé $\epsilon > 0$ lze najít takové $\delta > 0$ a $n \in \mathbb{N}$, že pro všechna dělení $D(I) = \{I_1, \ldots I_n\}$ pro které je $\nu(D) < \delta$ nezávisle na volbě bodů $\xi_i \in I_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ platí
$$|\mathcal{J} - \mathcal{S}(D, f)| < \epsilon.$$
Vyhovuje-li některá funkce f a číslo $\mathcal{J}$ předchozí definici, říkáme, že integrál
$$\mathcal{J} = \int_I f(x, y)\, dx\, dy \qquad \left(\mathcal{J} = \int_I f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\right)$$
existuje a že funkce f je na I ***integrovatelná***.

Pro jednoduchost budeme někdy užívat pro vícerozměrné integrály zápis $\int\limits_I f(X)\, dX$.

Analogicky jako u určitého integrálu platí následující existenční věta:

Věta 6.4. *Nechť $f : I \to \mathbb{R}$ je na I spojitá. Potom je na tomto intervalu integrovatelná.*



Obr. 6.5: Fubiniova věta pro obdélník $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$

Dříve než uvedeme větu o výpočtu určitého integrálu, naznačíme si její odvození pro dvojrozměrný případ:

Dvojný integrál z nezáporné funkce nad obdélníkem je (podle definice) objem tělesa s tímto obdélníkem (v rovině $z = 0$) jako dolní podstavou a omezeného shora grafem integrované funkce. Vztah pro výpočet objemu takového tělesa jsme uvedli v kapitole 3.4 - je třeba integrovat funkci, která každému x přiřadí obsah příčného řezu tělesem.

Přesněji řečeno pro situaci v předchozím obrázku:

Máme vypočítat objem tělesa, jehož podstavu tvoří obdélník $\langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$ a je shora omezené grafem funkce $f : z = f(x, y)$.
Pro každé $\xi \in \langle a, b\rangle$ vypočítáme obsah řezu tělesa rovinou $x = \xi$ - tento řez je ovšem obrazec (křivočarý lichoběžník), jehož obsah umíme vypočítat pomocí určitého integrálu a je zřejmě roven

$$F(\xi) = \int_c^d f(\xi, y)\,dy.$$

Podle vzorce pro výpočet objemu daného tělesa tedy dostáváme

$$V = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx.$$

To je tzv. dvojnásobný integrál, jehož hodnota je rovna příslušnému dvojnému integrálu. Jistě bylo možné také postupovat opačně - nejdříve vypočíst obsahy řezů rovinou kolmou na osu y a vzniklou funkci integrovat podle y v mezích $\langle c, d\rangle$.

Platí tedy věta:

Věta 6.5. **(Fubiniova pro interval)** *Nechť $I = \langle a,\, b\rangle \times \langle c,\, d\rangle$. Je-li $f : I \to \mathbb{R}$ integrovatelná na I, pak existují integrály (dvojnásobné)*

$$\mathcal{J}_1 = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx, \qquad \mathcal{J}_2 = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

a platí rovnost

$$\mathcal{J} = \int_I f(x,y)\, dx\, dy = \mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2.$$

Dvojrozměrný integrál se tedy vypočítá pomocí dvou určitých integrálů - postupnou integrací vždy podle jedné proměnné (analogie parciální derivace).

Tento postup se přirozeným způsobem rozšíří na trojný (i n-rozměrný) integrál:

Věta 6.6. *Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$, $I = \langle a_1,\, b_1\rangle \times \langle a_2,\, b_2\rangle \times \cdots \times \langle a_n,\, b_n\rangle$ a nechť $f : I \to \mathbb{R}$ je integrovatelná funkce na I. Potom platí*

$$\int_I f(x_1,\ldots,x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\ldots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\ldots,x_n)\, dx_n \right) \ldots \right) dx_2 \right) dx_1 =$$

$$= \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} \left(\int_{a_{i_2}}^{b_{i_2}} \left(\ldots \left(\int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} f(x_1,\ldots,x_n)\, dx_{i_n} \right) \ldots \right) dx_{i_2} \right) dx_{i_1}$$

pro každou permutaci $(i_1,\, i_2,\, \ldots\, i_n)$ množiny indexů $\{1,\, 2,\, \ldots\, n\}$.

Příklad 6.7. Vypočítejme následující integrály:

a) $\int\limits_I x^2\, y\, dx\, dy, \qquad I = \langle 0,\, 2\rangle \times \langle 1,\, 2\rangle,$

b) $\int\limits_I \ln(1+x)^{2y}\, dx\, dy, \qquad I = \langle 0,\, 1\rangle \times \langle 0,\, 1\rangle,$

c) $\int\limits_I (x+y+z)\, dx\, dy\, dz, \qquad I = \langle 0,\, 3\rangle \times \langle 0,\, 2\rangle \times \langle 0,\, 1\rangle,$

d) $\int\limits_I \dfrac{xz}{1+xy}\, dx\, dy\, dz, \qquad I = \langle 0,\, 1\rangle \times \langle 0,\, 1\rangle \times \langle 0,\, 1\rangle.$

Řešení. a)

$$\int_I x^2\, y\, dx\, dy = \int_0^2 dx \int_1^2 x^2 y\, dy = \int_0^2 x^2\, dx \int_1^2 y\, dy = \int_0^2 x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^2 dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^2 x^2\, dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4$$

b)

$$\int_I \ln(1+x)^{2y}\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_0^1 2y\, \ln(1+x)\, dy = \int_0^1 \ln(1+x)\, dx \int_0^1 2y\, dy =$$

(na tomto místě je užitečné si uvědomit, že vnitřní integrál je po výpočtu konstanta, kterou můžeme z vnějšího integrálu vytknout – integrační obor je interval a integrand je tvaru $f(x)\cdot g(y)$. V tomto (a jen v takovém) případě lze daný dvojrozměrný integrál vypočíst jako součin dvou jednoduchých integrálů:)

$$= \left(\int_0^1 2y\,dy\right)\left(\int_0^1 \ln(1+x)\,dx\right) = |\text{druhý integrál per partes}| =$$

$$= \left[y^2\right]_0^1 \cdot \left[x\,\ln(x+1) - x + \ln(x+1)\right]_0^1 = 2\ln 2 - 1.$$

c)

$$\int_I (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz \int_0^2 dy \int_0^3 (x+y+z)dx =$$

$$= \int_0^1 dz \int_0^2 dy \left[\frac{x^2}{2} + xy + xz\right]_{x=0}^{x=3} = 3\int_0^1 dz \int_0^2 \left(\frac{3}{2} + y + z\right) dy =$$

$$= 3\int_0^1 dz \left[\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}y^2 + yz\right]_0^2 = 3\int_0^1 (5+2z)dz = 3\left[5z + z^2\right]_0^1 = 18.$$

d)

$$\int_I \frac{xz}{1+xy}\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 z\,dz \cdot \int_0^1 x\,dx \int_0^1 \frac{1}{1+xy}\,dy =$$

$$= \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 \int_0^1 x\,\left[\frac{1}{x}\,\ln|1+xy|\right]_{y=0}^{y=1} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+x)\,dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \ln(1+x) & u' = \frac{1}{1+x} \\ v' = 1 & v = 1+x \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left\{\left[(1+x)\,\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 1\,dx\right\} =$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

Zde jsme u metody per partes položili $v = x + 1$ – to jistě není chyba, protože $(x+1)' = 1$; výpočet se nám tím zjednodušil – ve druhém integrálu integrujeme jedničku.

□

Měřitelné množiny, elementární oblasti

Jistě není prakticky možné omezit se při integraci pouze na intervaly. V tomto odstavci si budeme všímat těch množin, přes které budeme schopni našimi prostředky integrovat.

Definice 6.8. Mějme množinu $M \subset \mathbb{R}^k$, $k = 2, 3$. Řekneme, že množina M je (Jordanovsky) ***měřitelná***, tj. má (Jordanovu) ***míru*** $m_k(M)$, jestliže pro nějaký interval $I \supset M$ existuje integrál z charakteristické funkce χ_M množiny M na intervalu I; potom klademe

$$m_k(M) := \int_I \chi_M(x, y, (z))\, dx\, dy\, (dz).$$

Připomeňme, že charakteristická funkce množiny M je definovaná předpisem

$$\chi_M(X) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad X \in M \\ 0 & \text{pro} \quad X \notin M \end{cases}.$$

Uvedeme některé vlastnosti měřitelných množin:

Věta 6.9. a) *Je-li M ohraničená množina a $m_k(h(M)) = 0$ (hranice má nulovou míru), pak M je měřitelná v $\mathbb{R}^k$.*

b) *Sjednocení a průnik konečného systému měřitelných množin je měřitelná množina.*

c) *Rozdíl dvou měřitelných množin je měřitelná množina.*

d) *Každá otevřená oblast G je měřitelná, každá uzavřená oblast je měřitelná a platí $m_k(G) = m_k(\overline{G})$.*

Právě pro měřitelné množiny, tedy takové, jejichž charakteristická funkce je integrovatelná, je obecně definován pojem n-rozměrného integrálu. My se speciálně zaměříme na tak zvané elementární oblasti, které, jak uvidíme z definice (užitím předchozích tvrzení) jsou měřitelné:

Definice 6.10. V rovině rozumíme ***elementární oblastí typu*** $[x, y]$ množinu všech bodů $(x, y) \in M \subset \mathbb{R}^2$, jejichž souřadnice vyhovují nerovnostem

$$a \le x \le b$$
$$f(x) \le y \le g(x)$$

kde a, b, $a < b$ jsou čísla a f, g jsou funkce spojité na intervalu $\langle a,\, b\rangle$.

(V literatuře se tyto množiny také nazývají normální oblasti ve směru osy y nebo obory ohraničené shora a zdola spojitými funkcemi .)

Elementární oblast typu $[x, y]$ lze charakterizovat geometricky: rovnoběžka s osou y vedená libovolným vnitřním bodem oblasti protíná její hranici právě ve dvou bodech, z nichž jeden leží na grafu funkce f a druhý na grafu funkce g.

Podobně je jistě možno definovat elementární oblast typu $[y, x]$; je jí taková množina v rovině, pro jejíž body $(x, y) \in M$ platí nerovnosti

$$c \leq y \leq d$$
$$f(y) \leq x \leq g(y)$$

kde funkce f, g jsou spojité na intervalu $\langle c,\, d\rangle$.

Jak tyto pojmy zobecníme do trojrozměrného prostoru?
Předně průmět do některé ze souřadných rovin musí být elementární oblast v rovině; mějme tedy množinu $M \subset \mathbb{R}^3$ takovou, že pro její body $(x, y, z) \in M$ platí $a \leq x \leq$ $\leq b,\; f_1(x) \leq y \leq g_1(x)$ - to znamená, že průmět množiny M do roviny xy je elementární oblast typu $[x, y]$.
Dále je potřeba omezit z-ové souřadnice; zde se již mohou vyskytovat funkce dvou proměnných. Tedy elementární oblastí typu $[x, y, z]$ v prostoru rozumíme množinu M, pro jejíž body $(x, y, z) \in M$ platí

$$a \leq x \leq b$$
$$f_1(x) \leq y \leq g_1(x)$$
$$f_2(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)$$

Podobně je možno definovat elementární oblasti typu $[y, z, x]$,$[z, y, x]$ atd.
Chceme-li tedy nějakou množinu $M \subset \mathbb{R}^3$ popsat jako elementární oblast, promítneme ji do některé souřadné roviny, průmět popíšeme jako elementární oblast (tedy ho promítneme do některé souřadné osy) a zbývající proměnnou omezíme dvěma funkcemi dvou proměnných.

Příklad 6.11. Popíšeme některé oblasti v rovině pomocí nerovností:

a) Množina M ohraničená parabolou $y = 2x - x^2$ a přímkou $y = -x$,
b) Množina M zadaná nerovností $|x| \leq y \leq 2$,
c) Množina M omezená grafy funkcí $y = x,\; y = x^3$.

Řešení. a) Parabola $2x - x^2$ má rovnici

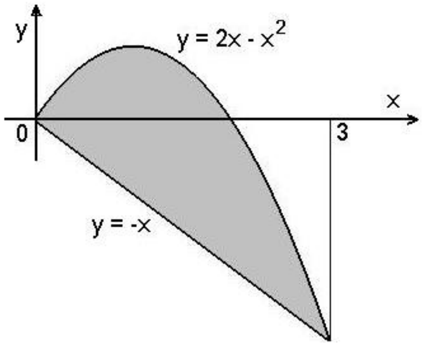
$$y - 1 = -(x-1)^2,$$

tedy vrchol v bodě $(1,\, 1)$, otevřená směrem dolů. Průsečíky s přímkou $y = -x$ jsou v bodech $(0,\, 0),\; (3,\, -3)$.

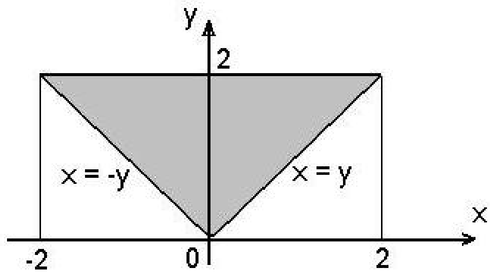
Pro $(x, y) \in M$ tedy platí
$$0 \leq x \leq 3 \quad .$$
$$-x \leq y \leq -x^2 + 2x$$

b) Grafy funkcí $y = |x|$ a $y = 2$ se protínají v bodech $(-2,\, 2)$ a $(2,\, 2)$. Platí

$$(x, y) \in M \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2 \leq x \leq 2 \\ |x| \leq y \leq 2 \end{array} \right.$$



Obr. 6.6: K př. 6.11 a)

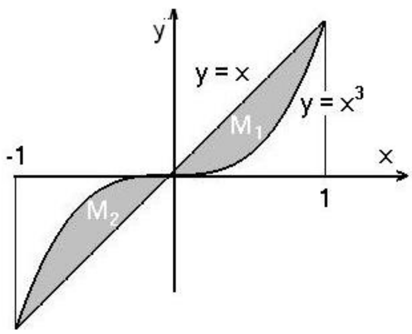


Obr. 6.6: K př. 6.11 b)

Výhodnější pro další výpočty je vyjádření jako elementární oblasti typu $[y,\, x]$:

$$(x, y) \in M \;\Rightarrow\; \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ -y \le x \le y \end{cases}$$

c) Množina M v tomto případě není elementární oblast; dá se vyjádřit jako sjednocení dvou elementárních oblastí, např. typu $[x,\, y]$:
$M = M_1 \cup M_2$,
$M_1 = \{\, (x,\, y)\,|\, 0 \le x \le 1,\, x^3 \le y \le x \,\}$
$M_2 = \{\, (x,\, y)\,|\, -1 \le x \le 0,\, x \le y \le x^3 \,\}$



Obr. 6.7: K př. 6.11 c)

□

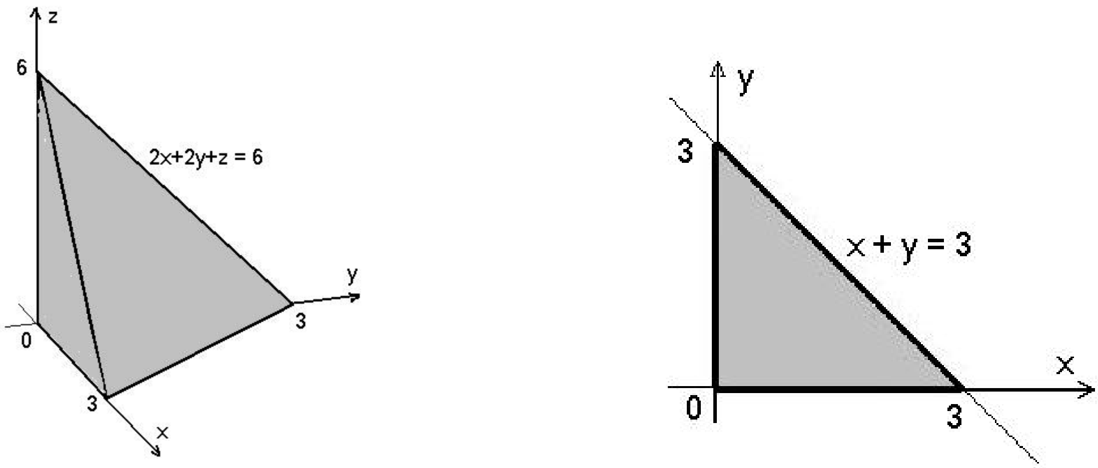
Příklad 6.12. Vyšetříme některé prostorové oblasti:

a) M omezená plochami $2x + 2y + z = 6,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$,

b) M omezená plochami $z = x^2 + y^2,\ z = 2 - x^2 - y^2$.

Řešení. a) Rovina $2x + 2y + z = 6$ protíná souřadné osy v bodech o souřadnicích $x = 3,\ y = 3,\ z = 6$. Průmět množiny M do roviny xy je trojúhelník o vrcholech $(0,\, 0),\ (0,\, 3),\ (3,\, 0)$. Platí tedy

$$(x,\, y,\, z) \in M \;\Rightarrow\; \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le 3 - x \\ 0 \le z \le 6 - 2x - 2y \end{cases}$$



Obr. 6.8: K př. 6.12 a)

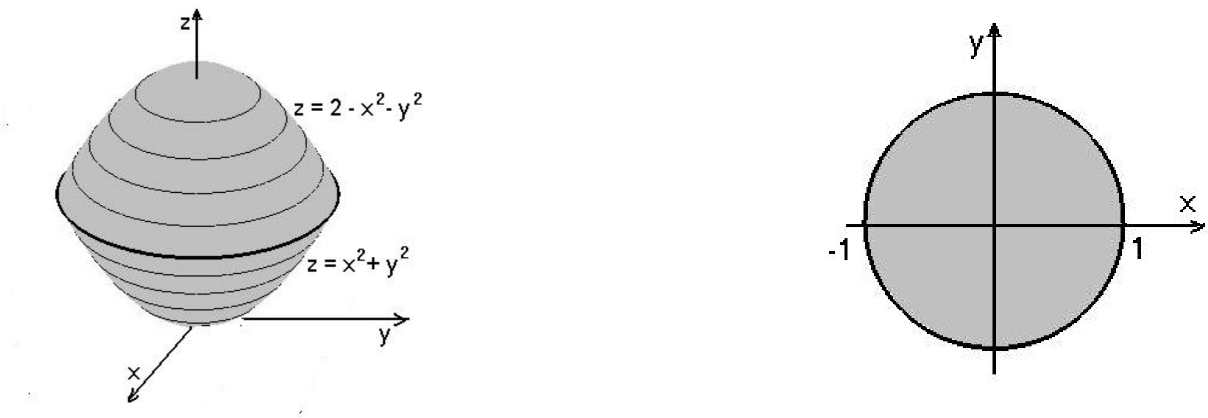
b) Jedná se o množinu mezi dvěma rotačními paraboloidy; vypočítáme rovnici kružnice, ve které se tyto paraboloidy protnou:

$$\left.\begin{aligned} z &= x^2 + y^2 \\ z &= 2 - x^2 - y^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2 \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}\right.$$

– paraboloidy se protnou ve výšce $z = 1$ v jednotkové kružnici; průmětem množiny M do roviny xy je jednotkový kruh. Dostáváme následující omezení:

$$(x, y, z) \in M \ \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \\ x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2 \end{array}\right.$$

□



Obr. 6.9: K př. 6.12 b)

Integrály na měřitelných množinách

V této kapitole rozšíříme pojem dvojného a trojného integrálu na měřitelné množiny:

Definice 6.13. Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ je ***integrovatelná na množině*** M, tj. že existuje integrál (Riemannův) z funkce f na množině M, existuje-li interval $I \subset \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ tak, že $M \subset I$ a funkce $f \cdot \chi_M$ je na I integrovatelná.

Potom klademe

$$\int_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_I (f \cdot \chi_M)(x,y)\,dx\,dy$$

$$\left(\int_M f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz := \int_I (f \cdot \chi_M)(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\right).$$

Postačující podmínku pro existenci integrálu udává následující věta:

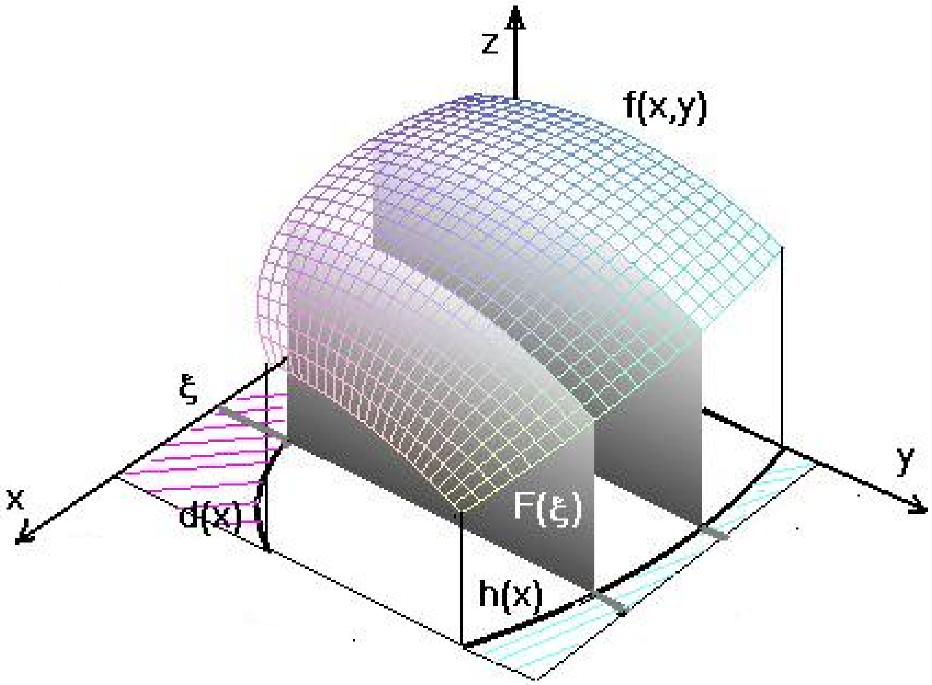
Věta 6.14. *Je-li $M \subset \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ měřitelná množina a $f : M \to \mathbb{R}$ je na M ohraničená a skoro všude spojitá, pak je f na M integrovatelná.*

(Připomeňme, že nějaké tvrzení platí na množině M ***skoro všude***, jestliže platí $\forall x \in M \setminus A \subset \mathbb{R}^k$ a neplatí $\forall x \in A$, kde $m_k(A) = 0$ (tj. platí s výjimkou množiny nulové míry).)

Vlastnosti vícerozměrného integrálu na měřitelné množině shrnuje následující věta:

Věta 6.15. *Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je měřitelná množina, $f, g : M \to \mathbb{R}$ integrovatelné funkce. Potom platí:*

1. $\int\limits_M cf(X)\,dX = c\int\limits_M f(X)\,dx,$



Obr. 6.10: Fubiniova věta pro elementární oblast

2. $\int\limits_M [f(X) + g(X)]\, dX = \int\limits_M f(X)\, dX + \int\limits_M g(X)\, d(X)$,

3. *platí-li* $f(X) \leq g(X) \quad \forall X \in M$, *potom* $\int\limits_M f(X)\, dX \leq \int\limits_M g(X)\, dX$,

4. *je-li* $M = M_1 \cup M_2$, *kde* M_1, M_2 *jsou měřitelné možiny mající společné nejvýš část hranice, potom* $\int\limits_M f(X)\, dX = \int\limits_{M_1} f(X)\, dX + \int\limits_{M_2} f(X)\, dX$.

Fubiniova věta pro výpočet integrálů se dá snadno rozšířit na elementární oblasti pomocí charakteristické funkce:

Máme počítat $\int\limits_M f(x, y)\, dx\, dy$, kde $M = \{(x, y)\, |a \leq x \leq b,\, d(x) \leq y \leq h(x)\}$. Zvolíme nějaký interval I tak, aby platilo $M \subseteq I$ a vypočteme (podle definice)

$$\int_I [f(x, y)\, \chi_M(x, y)]\; dx\, dy.$$

Nechť $I = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Potom

$$\int_I [f(x, y)\, \chi_M(x, y)]\; dx\, dy = \int_a^b dx \int_c^d [f(x, y)\, \chi_M(x, y)]\; dy =$$

$$= \int_a^b dx \int_c^{d(x)} f(x, y) \cdot 0\, dy + \int_a^b dx \int_{d(x)}^{h(x)} f(x, y) \cdot 1\, dy + \int_a^b dx \int_{h(x)}^{d} f(x, y) \cdot 0\, dy =$$

$$= \int_a^b dx \int_{d(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy.$$

Platí tedy věta (Fubiniova pro elementární oblast):

Věta 6.16. *Nechť*

$$M = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ d(x) \le y \le h(x) \,\right\}$$

resp.

$$M = \left\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le x \le b,\ d_1(x) \le y \le h_1(x),\ d_2(x,y) \le z \le h_2(x,y) \,\right\},$$

kde d, h, *resp.* d_1, h_1, d_2, h_2 *jsou spojité a skoro všude spojitě diferencovatelné funkce. Pak existuje-li*

$$\mathcal{J} = \int\limits_M f(x,y)\,dx\,dy \qquad \textit{resp.} \qquad \mathcal{J} = \int\limits_M f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

platí

$$\mathcal{J} = \int_a^b dx \int_{d(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \qquad \textit{resp.} \qquad \mathcal{J} = \int_a^b dx \int_{d_1(x)}^{h_1(x)} dy \int_{d_2(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Věta platí analogicky pro elementární oblasti typu $[y,x]$ nebo $[y,x,z]$ atd.

Příklad 6.17. Vypočítáme následující integrály:

a) $\int\limits_M (x^2+y)\,dx\,dy$, kde M je ohraničená přímkami $y=0$, $y=x$, $x+y=2$,

b) $\int\limits_M (x-y)\,dx\,dy$, kde M je ohraničená křivkami $y=x^2$, $y^2=x$,

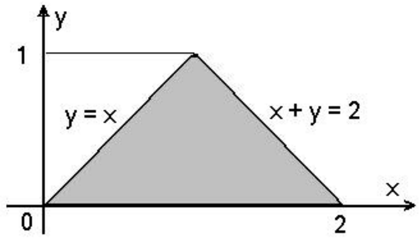
c) $\int\limits_M y\,\cos(z+x)\,dx\,dy\,dz$, kde M je omezená plochami $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $x+z=\frac{\pi}{2}$.

Řešení. a) M je elementární oblast typu $[y,\,x]$ popsaná nerovnostmi $0 \le y \le 1$, $y \le x \le 2-y$;

$$\int\limits_M (x^2+y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (x^2+y)\,dx = \int_0^1 dy \left[\frac{x^3}{3} + xy\right]_{x=y}^{2-y} =$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{3}(4 - 3y - y^3)\, dy =$$

$$= \left[\frac{8}{3}y - y^2 - \frac{1}{6}y^4\right]_0^1 = \frac{3}{2}.$$



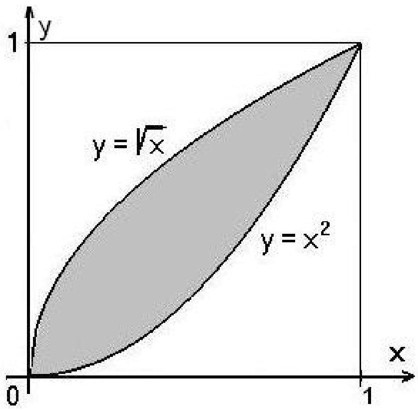
Obr. 6.11: K př. 6.17 a)

$$\int_M (x-y)\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x-y)\, dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left[xy - \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} =$$

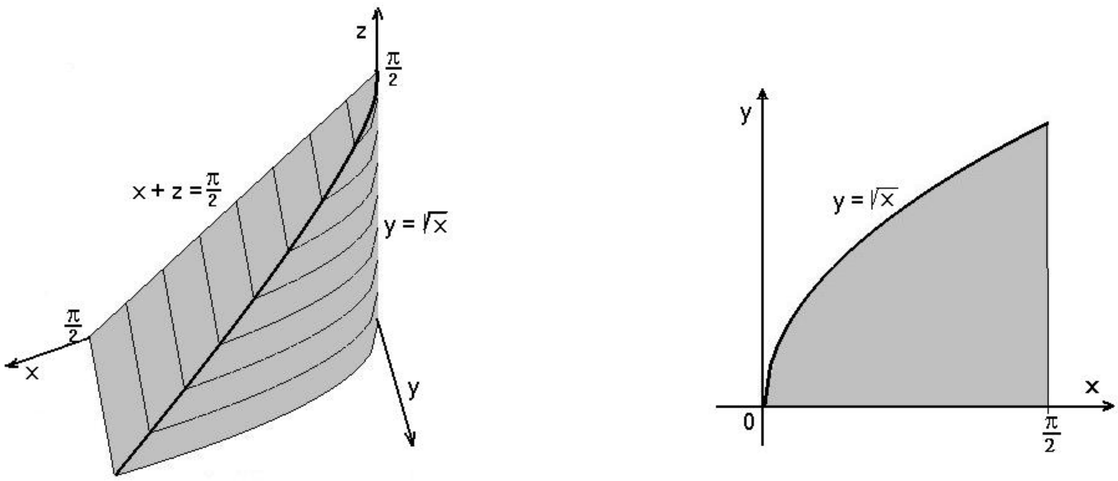
$$= \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - \frac{x}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2})\, dx =$$

$$= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10}\right]_0^1 = 0.$$

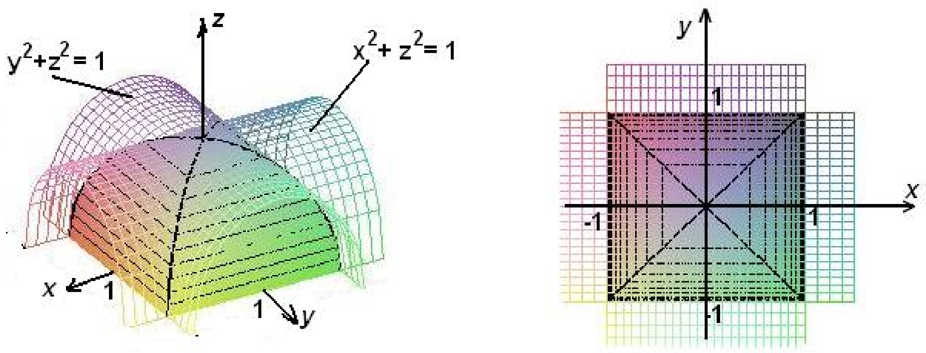


Obr. 6.12: K př. 6.17 b)

b) Množina M je shora omezená rovinou $x+z = \frac{\pi}{2}$, dále souřadnými rovinami a parabolickou válcovou plochou $y = \sqrt{x}$.



Obr. 6.12: K př. 6.17 c)



Obr. 6.13: Dva válce

Průmět do souřadné roviny xy je shora omezen grafem funkce $y=\sqrt{x}$, dále osou x a přímkou $x=\frac{\pi}{2}$. Proto platí

$$\int_M y\cos(z+x)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x}} y\,dy \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(z+x)\,dz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\,dx \int_0^{\sqrt{x}} y\,dy = \cdots = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$$

□

Příklad 6.18. Vypočítáme objem množiny, která je průnikem dvou válců o poloměru 1, z nichž jeden má osu rotace v ose x a druhý v ose y :

Řešení. V obrázku si můžeme povšimnout, že průmět množiny do roviny $z=0$ je jednotkový čtverec, a dále že množina je souměrná podle všech tří souřadných rovin a navíc podle roviny $y=x$ (a také podle $y=-x$). Vypočítáme tedy objem 1/16 zadané množiny – té části, která leží v 1. oktantu (tedy $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$) a jejíž průmět v 1. kvadrantu leží pod přímkou $y=x$. Pro tuto množinu platí:

$$0\le x\le 1,\ 0\le y\le x,\ 0\le z\le \sqrt{1-x^2}.$$

Potom

$$\frac{1}{16}m_3(M) = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{1-x^2}dy =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx\ [y]_0^x = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \left|t=1-x^2,\ dt=-2x\,dx\right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^0 t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Tedy $m_3(M)=\frac{16}{3}$.

□

K výpočtu vícerozměrných integrálů můžeme použít následující maplety: pro dvojné integrály, pro trojné integrály.

Shrnutí

V této kapitole jsme rozšířili pojem určitého integrálu z ohraničené funkce na vícerozměrné obory; nejdříve jsme definovali vícerozměrný (dvojný, trojný) integrál na intervalu.

Analogicky jako u určitého integrálu jsme nejdříve zavedli

- dělení intervalu I: systém intervalů $D = \{I_1, I_n\}$, jejichž sjednocením je interval I a průnik libovolných dvou z těchto intervalů je množina, jejíž míra je rovna nule (v případě dvojrozměrného intervalu je průnikem nanejvýš úsečka, v případě trojrozměrného intervalu nanejvýš obdélník),
- normu dělení: $\max(x_i - x_{i-1})$, tj. největší z průměrů intervalů, které tvoří dělení daného intervalu, přičemž
- průměr množiny je největší možná vzdálenost dvou bodů dané množiny;
- dělení intervalu I s vybranými body: v každém intervalu I_i je vybrán bod ξ_i,
- integrální součet funkce f příslušný dělení D: $\mathcal{S}(D, f) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)m(I_i)$,
- určitý integrál z funkce f na intervalu I: číslo, které lze s libovolnou (předem zvolenou) přesností aproximovat pomocí integrálních součtů.

Pro funkci f nezápornou na intervalu $I \subset \mathbb{R}^2$ znamená $\int\limits_I f(x, y)\,dx\,dy$ objem tělesa, které vznikne z kolmého hranolu s podstavou v I omezením shora grafem funkce f.

Formulovali jsme postačující podmínku pro existenci určitého integrálu na intervalu:

- Je-li funkce f spojitá na I, potom je zde integrovatelná.

Dále jsme charakterizovali množiny různé od intervalů, přes které jsme schopni našimi prostředky integrovat:

- měřitelná množina: množina M, pro kterou existuje $I \supset M$ tak, že charakteristická funkce χ_M je na tomto I integrovatelná, přitom
- míra množiny M: je rovna integrálu z χ_M na tomto intervalu I.

Uvedli jsme některé vlastnosti měřitelných množin:

a) Je-li M ohraničená množina a $m_k(h(M)) = 0$ (hranice má nulovou míru), pak M je měřitelná v $\mathbb{R}^k$.

b) Sjednocení a průnik konečného systému měřitelných množin je měřitelná množina.

c) Rozdíl dvou měřitelných množin je měřitelná množina.

d) Každá otevřená oblast G je měřitelná, každá uzavřená oblast je měřitelná a platí $m_k(G) = m_k(\overline{G})$.

Dále jsme se věnovali speciálnímu typu měřitelných množin a integrálům na těchto množinách:

- elementární oblast typu $[x, y]$: množina všech bodů $(x, y) \in M \subset \mathbb{R}^2$, jejíž souřadnice vyhovují nerovnostem
$$a \leq x \leq b$$
$$d(x) \leq y \leq h(x)$$
kde a, b, $a < b$ jsou čísla a d, h jsou funkce spojité na intervalu $\langle a,\, b\rangle$,
- elementární oblast typu $[y, x]$: množina všech bodů $(x, y) \in M \subset \mathbb{R}^2$, jejíž souřadnice vyhovují nerovnostem
$$c \leq y \leq d$$
$$l(y) \leq x \leq p(y)$$
kde c, d, $c < d$ jsou čísla a l, p jsou funkce spojité na intervalu $\langle c,\, d\rangle$.

Analogicky jsou definovány elementární oblasti v $\mathbb{R}^3$, například:

- elementární oblast typu $[x, y, z]$ v prostoru: množina M, pro jejíž body $(x, y, z) \in M$ platí
$$a \leq x \leq b$$
$$d_1(x) \leq y \leq h_1(x)$$
$$d_2(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)$$

Definovali jsme integrál funkce f na měřitelné množině M jako integrál ze součinu funkce f a charakteristické funkce χ_M na intervalu $I \supset M$, tedy speciálně pro dvojrozměrný případ:
$$\int_M f(x, y)\, dx\, dy = \int_I f(x, y) \cdot \chi_M(x, y)\, dx\, dy \quad \text{pro} \quad M \subset I.$$
Pro integrál na měřitelných množinách platí následující existenční věta:

- Je-li $M \subset \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ měřitelná množina a $f : M \to \mathbb{R}$ je na M ohraničená a skoro všude spojitá, pak je f na M integrovatelná.

Dále platí:

- Je-li $M \subset \mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ měřitelná množina, potom
$$m_2(M) = \int_M 1\, dx\, dy, \quad \text{resp.} \quad m_3(M) = \int_M 1\, dx\, dy\, dz.$$

Uvedli jsme vlastnosti integrálu:

- Je-li $M \subset \mathbb{R}^n$ měřitelná množina, $f, g : M \to \mathbb{R}$ integrovatelné funkce, platí:

  1. $\int\limits_M cf(X)\, dX = c \int\limits_M f(X)\, dx$,

2. $\int\limits_M [f(X)+g(X)]\,dX = \int\limits_M f(X)\,dX + \int\limits_M g(X)\,d(X)$,
3. platí-li $f(X) \le g(X) \quad \forall X \in M$, potom $\int\limits_M f(X)\,dX \le \int\limits_M g(X)\,dX$,
4. je-li $M = M_1 \cup M_2$, kde M_1, M_2 jsou měřitelné možiny mající společné nejvýš část hranice, potom $\int\limits_M f(X)\,dX = \int\limits_{M_1} f(X)\,dX + \int\limits_{M_2} f(X)\,dX$.

Závěrem jsme uvedli větu o výpočtu integrálu na měřitelné množině:

- Fubiniova věta: Je-li $M = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b,\ d(x) \le y \le h(x)\,\}$ resp.

  $M = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le x \le b,\ d_1(x) \le y \le h_1(x),\ d_2(x,y) \le z \le h_2(x,y)\,\}$,

  kde d, h, resp. d_1, h_1, d_2, h_2 jsou spojité a skoro všude spojitě diferencovatelné funkce,

  pak existuje-li $\mathcal{J} = \int\limits_M f(x,y)\,dx\,dy$ resp. $\mathcal{J} = \int\limits_M f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$,

  platí $\mathcal{J} = \int\limits_a^b dx \int\limits_{d(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy$ resp. $\mathcal{J} = \int\limits_a^b dx \int\limits_{d_1(x)}^{h_1(x)} dy \int\limits_{d_2(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$.

Otázky a úkoly

1. Jak je definován dvojný integrál z funkce f na intervalu I? Je-li f na I nezáporná, jaký je geometrický význam $\int\limits_I f(x,y)\,dx\,dy$?

2. Co je to měřitelná množina a jak se definuje integrál na měřitelné množině?

3. Nechť $M = M_1 \cup M_2$, $M, M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^2$ jsou měřitelné množiny, f funkce spojitá na M, $f(x,y) \ge 0$ pro $(x,y) \in M_1$ a $f(x,y) \le 0$ pro $(x,y) \in M_2$. Interpretujte geometricky $\int\limits_M f(x,y)\,dx\,dy$.

4. V příkladu 6.1 jsme pro výpočet integrálních součtů S_1, S_2 zvolili vždy středy příslušných intervalů. Vypočítejte pro stejnou funkci a dělení D_1, D_2 daného intervalu integrální součty $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ tak, že za vybrané body ξ_i zvolíte pravé horní rohy jednotlivých intervalů a integrální součty $\underline{S}_1$, $\underline{S}_2$, kdy za vybrané body ξ_i zvolíte levé dolní rohy jednotlivých intervalů. Co můžeme na základě těchto výsledků říci o integrálu z dané funkce na zadaném intervalu?

5. Nechť M je měřitelná množina v rovině, $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 5 \quad \forall (x,y) \in M$. Co můžeme říci o $\int\limits_M f(x,y)\,dx\,dy$?

6. Nechť $I = \langle 1,5 \rangle \times \langle 1,5 \rangle$, $f(x,y)$ je vzdálenost bodu (x,y) od osy y.

   a) Odhadněte $\int\limits_I f(x,y)\,dx\,dy$ pomocí integrálního součtu příslušného k dělení na čtyři shodné čtverce, kde za vybrané body jsou zvoleny středy intervalů.

b) Ukažte, že platí $16 \leq \int\limits_I f(x,y)\,dx\,dy \leq 80$.

7. Nechť M je trojúhelník s vrcholy $[0,0], [0,4], [4,0]$, $f(x,y) = x^2y$. Určete maximální a minimální hodnotu funkce f na M a pomocí těchto hodnot určete horní a dolní ohraničení pro hodnotu integrálu $\int\limits_M x^2y\,dx\,dy$.

8. Načrtněte plochu o rovnici $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

   a) Nechť $\mathcal{V}_1$ je oblast v prostoru omezená shora danou plochou a zdola čtvrtkruhem se středem v počátku a poloměrem 1. Nechť V_1 je objem $\mathcal{V}_1$. Ukažte, že $V_1 \leq 1$.

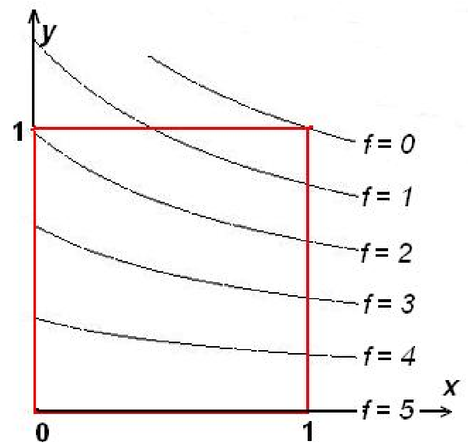
   b) Nechť $\mathcal{V}_2$ je oblast v prostoru omezená shora danou plochou a zdola čtvercem s vrcholy $[0,0], [0,1], [1,0], [1,1]$. Nechť V_2 je objem $\mathcal{V}_2$. Ukažte, že $V_2 \leq \sqrt{2}$.

9. V sousedním obrázku je nakresleno několik vrstevnic funkce f a interval

$$I = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle.$$

Odhadněte shora a zdola

$$\int\limits_I f(x,y)\,dx\,dy.$$



Obr. 6.14: K cv. 9.

10. Analogicky jako u určitého integrálu se i u vícerozměrného integrálu zavádí tzv. střední hodnota μ integrovatelné funkce f na měřitelné množině M pomocí předpisu

$$\mu = \frac{\int\limits_M f(X)\,dX}{\int\limits_M dX} \qquad \text{(ve jmenovateli je míra množiny } M).$$

Odhadněte střední hodnotu funkce f z příkladu 6.1 tak, že integrál odhadnete pomocí vypočítaných integrálních součtů.

11. Podobně jako v předchozí úloze odhadněte střední hodnoty funkcí z úloh 4., 5. a 6.

12. Hodnota integrálu může být odhadnuta také pomocí náhodných čísel generovaných počítačem, což demonstrujeme na následující úloze: Nechť jistá komplikovaná množina M leží uvnitř čtverce s vrcholy $[0,0], [0,2], [2,0], [2,2]$ a nechť je na této množině definovaná komplikovaná funkce. Pomocí počítače vygenerujeme 100 náhodných

bodů (x, y) v tomto čtverci. 73 z těchto bodů padne do M. Aritmetický průměr z funkčních hodnot funkce f v těchto 73 bodech je 2,31.

a) Jaký je rozumný odhad plošného obsahu množiny M?

b) Jaký je rozumný odhad $\int\limits_M f(x, y)\, dx\, dy$?

Poznamenejme, že metody, při kterých se využívají k výpočtům náhodná čísla, se obvykle nazývají metody Monte Carlo. Tyto metody nejsou příliš efektivní, protože chyba klesá v řádu $1/\sqrt{n}$.

Cvičení

1. Vypočítejte $\int\limits_I f(x, y)\, dx\, dy$ pro dané funkce f na daných intervalech I:

a) $f(x, y) = xy,\qquad I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle,$

b) $f(x, y) = \sqrt{xy},\qquad I = \langle 0, a\rangle \times \langle 0, b\rangle,$

c) $f(x, y) = x \sin y,\qquad I = \langle 1, 2\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle,$

d) $f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y},\qquad I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle,$

e) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{1 + y^2},\qquad I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle,$

f) $f(x, y) = \dfrac{1}{(x + y)^2},\qquad I = \langle 3, 4\rangle \times \langle 1, 2\rangle,$

g) $f(x, y) = \dfrac{1}{(x + y + 1)^2},\qquad I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle,$

h) $f(x, y) = \dfrac{y}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}},\qquad I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle,$

i) $f(x, y) = x^2 y e^{xy},\qquad I = \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle,$

j) $f(x, y) = x^2 y \cos(xy^2),\qquad I = \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0, 2\rangle.$

2. Vypočítejte $\int\limits_I f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ pro dané funkce f na daných intervalech I:

a) $f(x, y, z) = 2x + y - z,\qquad I = \langle 0, 2\rangle \times \langle -2, 2\rangle \times \langle 0, 2\rangle,$

b) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^3,\qquad I = \langle 0, 3\rangle \times \langle -2, 1\rangle \times \langle 1, 2\rangle,$

c) $f(x,y,z) = \sqrt{y} - 3z^2$, $\quad I = \langle 2,3\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle -1,1\rangle$,

d) $f(x,y,z) = 2xy - 3xy^2$, $\quad I = \langle 0,2\rangle \times \langle -1,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$,

e) $f(x,y,z) = xy^2\sqrt{z}$, $\quad I = \langle -2,1\rangle \times \langle 1,3\rangle \times \langle 2,4\rangle$,

f) $f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, $\quad I = \langle 1,a\rangle \times \langle 1,a\rangle \times \langle 1,a\rangle$, $a > 1$,

g) $f(x,y,z) = 2\mathrm{e}^{3x+2y+z}$, $\quad I = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$,

h) $f(x,y,z) = y^2 z \cos x$, $\quad I = \langle 0,2\pi\rangle \times \langle 0,b\rangle \times \langle -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\rangle$.

3. Vypočítejte $\int\limits_A f(x,y)\,dx\,dy$ pro dané funkce f na množinách A, které jsou popsány danými nerovnostmi resp. ohraničeny danými křivkami:

a) $f(x,y) = x - y$, $\quad A:\ y = 0,\ y = x,\ x + y = 2$,

b) $f(x,y) = \sqrt{xy - y^2}$, $\quad A:\ 0 \le y \le b,\ y \le x \le 10y$,

c) $f(x,y) = |x| + |y|$, $\quad A:\ |x| + |y| \le 1$,

d) $f(x,y) = x^2 + y$, $\quad A:\ y = x^2,\ y^2 = x$,

e) $f(x,y) = xy$, $\quad A:\ y^2 = 2x,\ x = 2$,

f) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $\quad A:\ y^2 = 2x,\ y = x$,

g) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$, $\quad A:\ y^2 = x,\ x = 0,\ y = 1$,

h) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^2}$, $\quad A:\ y = \frac{1}{x},\ y = 4x,\ x = 3$,

i) $f(x,y) = 12 - 3x - 4y$, $\quad A:\ x^2 + 4y^2 \le 4$,

j) $f(x,y) = \dfrac{x}{3}$, $\quad A:\ x = 2 + \sin y,\ x = 0,\ y = 0,\ y = 2\pi$.

4. V následujících dvojnásobných integrálech zaměňte pořadí integrace:

a) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_3^4 f(x,y)\,dx\,dy$, $\quad$ b) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)\,dy$,

c) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$, $\quad$ d) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$,

e) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx$, $\quad$ f) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$.

5. Vypočítejte $\int\limits_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ pro dané funkce f na množinách A, které jsou popsány danými nerovnostmi:

a) $f(x,y,z) = z^2$,

$A:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2},\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}$,

b) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x+y+1}$,

$A:\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+y+z \le 1$,

c) $f(x,y,z) = z$,

$A:\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1,\ z \ge 0$,

d) $f(x,y,z) = z^2$,

$A:\ x^2+y^2+y^2 \le R^2,\ x^2+y^2+z^2 \le 2Rz$.

6. Vypočítejte $\int\limits_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ pro dané funkce f na množinách A, které jsou ohraničeny danými plochami:

a) $f(x,y,z) = 2x+3y-z$,

$A:\ z=0,\ z=a,\ x=0,\ y=0,\ x+y=b,\ a>0,\ b>0$,

b) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(x+y+z+1)^3}$,

$A:\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$,

c) $f(x,y,z) = xyz$,

$A:\ x^2+y^2+z^2=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$, v I. oktantu,

d) $f(x,y,z) = z$,

$A:\ z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2),\ z=h$.

Výsledky

1. a) 1, b) $\frac{4}{9}(ab)^{3/2}$, c) $\frac{3}{2}$, d) $(e-1)^2$, e) $\frac{\pi}{12}$, f) $\ln\frac{25}{24}$, g) $\ln\frac{4}{3}$, i) $\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$, j) 2; **2.** a) 16, b) -342, c) $-\frac{2}{3}$, d) -32, e) $\frac{104}{3}(2\sqrt{2}-1)$, f) $3(a-1)^2\ln a$, g) $\frac{1}{3}(e^3-1)(e^2-1)(e-1)$, h) 0;
3. a) $\frac{2}{3}$, b) $6b^3$, c) $\frac{4}{3}$, d) $\frac{33}{4}$, e) 0, f) $\ln 2$, g) $\frac{1}{2}$, h) $\frac{1225}{64}$, i) 24π, j) $\frac{3\pi}{2}$;
5. a) $\frac{\pi}{15}(2\sqrt{2}-1)$, b) $\frac{3}{2}-2\ln 2$, c) $\frac{\pi}{4}abc^2$, d) $\frac{59}{480}\pi R^5$; **6.** a) $\frac{5}{6}ab^3-\frac{1}{4}a^2b^2$, b) $\frac{1}{16}(8\ln 2-5)$, c) $\frac{1}{48}$, d) $\frac{1}{4}\pi h^2R^2$.

6.2 Transformace integrálů

Připomeňme, jak se počítal určitý integrál pomocí věty o substituci – stručně můžeme formulovat tuto větu takto:

Nechť f je integrovatelná funkce na intervalu $\langle a,\, b\rangle$, φ diferencovatelná funkce. Potom

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

přitom nové meze jsme obdrželi jako řešení rovnic $a = \varphi(t)$, $b = \varphi(t)$; tedy je-li φ prosté zobrazení, je $\langle\alpha,\,\beta\rangle = \{\,t\,|\,a \le \varphi(t) \le b\,\}$, neboli $\langle\alpha,\,\beta\rangle = \varphi^{-1}\,(\,\langle a,\,b\rangle\,)$ – úplný vzor intervalu $\langle a,\,b\,\rangle$.

Analogicky se bude postupovat u transformací vícerozměrných integrálů, ovšem integrační obory již budou složitější a cílem při transformaci bude hlavně zjednodušit integrační obor – v určitém integrálu jsme zaváděli substituci, abychom zjednodušili integrand (k tomu budeme jistě přihlížet také).

Věta o transformaci vícerozměrného integrálu má tedy následující tvar:

Věta 6.19. *Nechť je dána množina $M \subset \mathbb{R}^k$, nechť $\Phi : \Phi^{-1}(M) \to M$ je zobrazení třídy C_1 , které je bijektivní (vzájemně jednoznačné) na $\left(\Phi^{-1}(M)\right)^0$ (vnitřek), přičemž $m_k\,h\,(\Phi^{-1}(M)) = 0$ (hranice má nulovou míru), a nechť pro každý prvek $X \in M$ je $|\Phi'| \ne 0$ (takové zobrazení se nazývá **regulární**). Pak pro každou funkci f integrovatelnou na množině M platí*

a) $k = 2, \Phi(u,v) = (x(u,v),\, y(u,v))$:

$$\int_M f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Phi^{-1}(M)} f(x(u,v),\, y(u,v))\,|\det \Phi'(u,v)|\,du\,dv$$

b) $k = 3, \Phi(u,v,w) = (x(u,v,w),\, y(u,v,w),\, z(u,v,w))$:

$$\int_M f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{\Phi^{-1}(M)} f(x(u,v,w),\, y(u,v,w),\, z(u,v,w))\,|\det \Phi'(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$

Poznámky:

a) V případě vícerozměrných integrálů hovoříme místo o substituci o transformaci, protože přecházíme od kartézských souřadnic k novým, tzv. křivočarým souřadnicím – transformujeme souřadnice.

b) V předchozí větě vystupuje výraz $\Phi'(u,v)$ resp. $\Phi'(u,v,w)$ - tedy derivace zobrazení. To je matice sestavená z parciálních derivací složek zobrazení podle všech proměnných, tedy pro

$$\Phi(u,v) = (x(u,v),\, y(u,v)) \quad \text{je} \quad \Phi' = \begin{bmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \end{bmatrix}$$

a pro

$$\Phi(u,v,w) = (x(u,v,w),\, y(u,v,w),\, z(u,v,w)) \quad \text{je}$$
$$\Phi' = \begin{bmatrix} x'_u(u,v,w) & x'_v(u,v,w) & x'_w(u,v,w) \\ y'_u(u,v,w) & y'_v(u,v,w) & y'_w(u,v,w) \\ z'_u(u,v,w) & z'_v(u,v,w) & z'_w(u,v,w) \end{bmatrix}.$$

Derivace zobrazení Φ' se také nazývá ***Jacobiho matice*** a její determinant, jehož absolutní hodnota vystupuje ve větě o transformaci integrálů, se nazývá ***Jakobián (resp. jakobián).*** Jak uvidíme u speciálních případů transformací, charakterizuje absolutní hodnota Jakobiánu „změnu plošného resp. objemového elementu“ při transformaci.

Polární souřadnice

Nejčastěji užívanou transformací v rovině je zobrazení pomocí ***polárních souřadnic***.

Transformační rovnice mají tvar

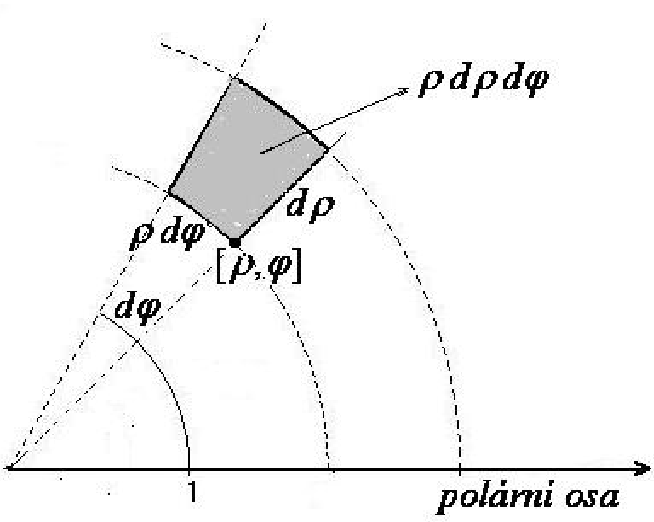
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases},$$

jedná se tedy o zobrazení

$$\Phi : \langle 0,\, \infty) \times \langle 0,\, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}^2,$$

$$\Phi(\rho,\, \varphi) = (\rho\cos\varphi,\, \rho\sin\varphi),$$

$$|\Phi'| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$



Obr. 6.15: Plošný element pol. souřadnic

V polárních souřadnicích se tedy „plošný element“ $dx\,dy$ transformuje na $\rho\,d\rho\,d\varphi$.

Souřadnicové čáry, tedy křivky, na kterých jsou nové proměnné konstantní, jsou popsány následujícím způsobem:

1. $\rho = \rho_0$ =konst. (souřadnicové čáry proměnné φ – φ-křivky)
   jsou soustředné kružnice $x^2 + y^2 = \rho_0^2$,

2. $\varphi = \varphi_0$ =konst. (souřadnicové čáry proměnné ρ – ρ-křivky)
   jsou přímky procházející počátkem $y = \mathrm{tg}\varphi_0\, x$.

Proto jsou polární souřadnice vhodné v případech, kdy integrační obor ohraničují takové křivky.

Příklad 6.20. Užitím polárních souřadnic vypočteme dvojné integrály z daných funkcí f přes dané množiny M:

a) $f(x,y) = x\,y^2$, $\quad M = \left\{ (x,\, y) \,|\, 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \le y \le x\sqrt{3} \right\}$,

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad M = \{ (x,\, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 2x \}$,

c) $f(x,y) = x$, $\quad M = \{ (x,\, y) \,|\, x^2 + y^2 \le 2x \}$.

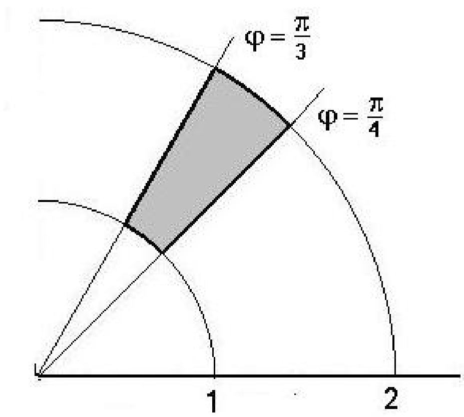
Řešení. a) Množina M je výseč mezikruží, kterou bychom při integraci v kartézských souřadnicích museli rozdělit na tři elementární oblasti; v polárních souřadnicích je omezena právě souřadnicovými čarami. Transformujme nerovnosti, pomocí kterých je množina M omezená:

$$1 \le x^2 + y^2 \le 4 \quad \Rightarrow \quad 1 \le \rho^2 \le 4 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 \le \rho \le 2$$

(ρ je nezáporná souřadnice – vzdálenost od počátku)

$$x \le y \le x\sqrt{3} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \rho\,\cos\varphi \le \rho\,\sin\varphi \le \sqrt{3}\,\rho\,\cos\varphi \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 1 \le \mathrm{tg}\,\varphi \le \sqrt{3}$$

($\cos\varphi \ge 0$, protože jinak by vyšlo $1 \ge \sqrt{3}$).



Obr. 6.16: Výseč mezikruží

Dostáváme tedy

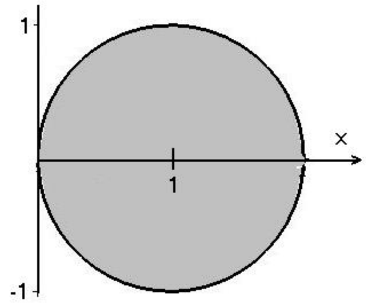
$$\Phi^{-1}(M) = \left\{ (\rho,\, \varphi) \,|\, 1 \le \rho \le 2,\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{3} \right\}$$

V polárních souřadnicích je tedy integrační obor interval. Pro zadaný integrál dostáváme

$$\int_M x\,y^2\,dx\,dy = \int_{\Phi^{-1}(M)} \rho\,\cos\varphi\,\rho^2\sin^2\varphi\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_1^2 \rho^4\,d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\varphi\,\cos\varphi\,d\varphi =$$

$$= \left[\frac{1}{5}\rho^5\right]_1^2 \left[\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{31}{120}\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right).$$

b) Hranicí množiny je kružnice se středem posunutým po ose x;
Je tedy $x^2+y^2 \leq 2x \;\Rightarrow\; \rho \leq 2\cos\varphi$; přičemž ρ je nezáporná souřadnice, tedy $0 \leq \rho \leq 2\cos\varphi$, odkud dále plyne $0 \leq \cos\varphi \;\Rightarrow\; -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.



Obr. 6.17: Posunutý kruh

$$\Phi^{-1}(M) = \left\{ (\rho,\,\varphi)\,|\,0 \leq \rho \leq 2\cos\varphi,\; -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\int_M \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{\Phi^{-1}(M)} \rho\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2\,d\rho =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^{2\cos\varphi} = \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)\,\cos\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}\left[\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{9}.$$

c) M je stejná jako v předchozím příkladě, ale tentokrát se integrand užitím polárních souřadnic nezjednoduší; budeme postupovat jinak.
Nejdříve posuneme počátek souřadnic do středu kruhu a až potom použijeme polární souřadnice; půjde tedy o transformaci

$$\Phi = (1+\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi), \quad |\Phi'| = \rho,$$

$$x^2+y^2 \leq 2x \;\Leftrightarrow\; 1+2\rho\cos\varphi+\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi \leq 2+2\rho\cos\varphi \;\Leftrightarrow\; \rho^2 \leq 1$$

Na souřadnici φ nevyšlo žádné omezení, platí tedy

$$\Phi^{-1}(M) = \{(\rho,\,\varphi)\,|\,0 \leq \rho \leq 1,\; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Integrační obor v nových souřadnicích je interval – souřadnicové čáry příslušné těmto souřadnicím jsou soustředné kružnice se středem v bodě $(1,\,0)$ a přímky procházející tímto bodem. Dostáváme

$$\int_M x\,dx\,dy = \int_{\Phi^{-1}(M)} (1+\rho\cos\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho+\rho^2\cos\varphi)\,d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\, d\rho + \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int_0^1 \rho^2\, d\rho = [\varphi]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_0^1 + 0 = \pi.$$

□

Pro integraci pomocí polárních souřadnic můžeme použít tento maplet.

Cylindrické souřadnice

Cylindrické souřadnice mají transformační rovnice

$$\begin{cases} x = \rho\, \cos\varphi \\ y = \rho\, \sin\varphi \\ z = z \end{cases},$$

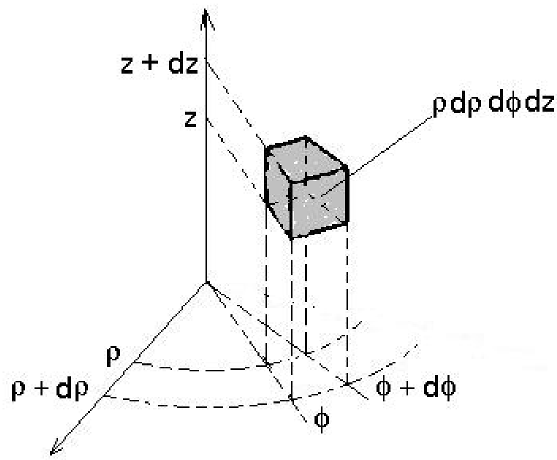
jedná se tedy o zobrazení

$\Phi : \langle 0,\, \infty) \times \langle 0,\, 2\pi) \times (-\infty,\, \infty) \to \mathbb{R}^3,$

$\Phi(\rho,\, \varphi, z) = (\rho\, \cos\varphi,\, \rho\, \sin\varphi, z),$

jehož jakobián

$$|\Phi'| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$



Obr. 6.18: Objemový element cyl. souřadnic

V cylindrických souřadnicích se tedy „objemový element“ $dx\, dy\, dz$ transformuje na $\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$.

Souřadnicové plochy, na kterých jsou nové proměnné konstantní, se zobrazí takto:

1. Plochy $\rho = \rho_0$ =konst. se zobrazí na válcové plochy $x^2 + y^2 = \rho_0^2$ – soustředné rotační válcové plochy s osou rotace v ose z,
2. plochy $\varphi = \varphi_0$ =konst. se zobrazí na roviny $y = \mathrm{tg}\varphi_0\, x$ – svislé roviny procházející osou z
3. plochy $z = z_0$ =konst. zůstávají na místě; jsou to vodorovné roviny.

Geometricky znamená pro daný bod cylindrická souřadnice ρ vzdálenost tohoto bodu od osy z, cylindrická souřadnice φ úhel, který svírá rovina procházející tímto bodem a osou z se souřadnou rovinou xz (s polorovinou pro kladné y) a cylindrická souřadnice z má tentýž význam jako kartézská souřadnice z.

Cylindrické souřadnice používáme u integračních oborů, jejichž průměty do roviny xy je vhodné vyšetřovat v polárních souřadnicích.

Příklad 6.21. Pomocí transformace do cylindrických souřadnic vypočteme trojné integrály z daných funkcí f přes dané množiny M:

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$, M ohraničená plochami $2z = x^2 + y^2$, $z = 2$,

b) $f(x,y,z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$, M ohraničená plochami $z = 0$, $z = 1$, $x^2 + y^2 = 2x$,

c) $f(x,y,z) = z$, M ohraničená plochami $(z-1)^2 = x^2 + y^2$, $z = 0$.

Řešení. a) Množina M je ohraničená rotačním paraboloidem a rovinou,

$$M = \left\{ (x,y,z) \,|\, \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \le z \le 2 \right\}.$$

V cylindrických souřadnicích dostaneme

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \le z \le 2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\,\rho^2 \le z \le 2,$$

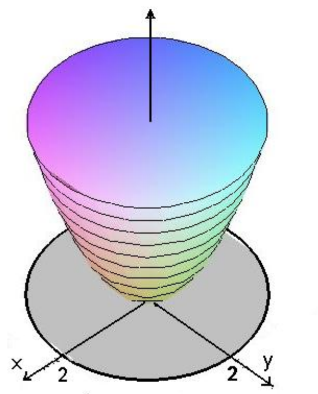
přitom musí platit

$$\frac{1}{2}\,\rho^2 \le 2$$

a na φ nevyšla žádná podmínka.

Proto

$$\Phi^{-1}(M) = \{ (\rho,\varphi,z) \,|\, 0 \le \rho \le 2,\, 0 \le \varphi \le 2\pi,\, \frac{1}{2}\,\rho^2 \le z \le 2 \}.$$



Obr. 6.19:

Pro zadaný integrál platí:

$$\int_M (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_{\Phi_{-1}(M)} \rho^2 \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 d\rho \int_{\frac{1}{2}\rho^2}^2 \rho^3\,dz =$$

$$= 2\pi \int_0^2 \rho^3\,[\,z\,]_{\frac{1}{2}\rho^2}^2\,d\rho = 2\pi \int_0^2 \rho^3 (2 - \frac{1}{2}\,\rho^2)\,d\rho = 2\pi \left[\frac{1}{2}\,\rho^4 - \frac{1}{12}\,\rho^6 \right]_0^2 = \frac{16\pi}{3}.$$

b) Množina M je válec o poloměru 1 a výšce 1 posunutý po ose x o 1, jeho průmět do roviny xy je kruh z příkladu 6.20 b). Proto platí

$$M = \{ (x,\,y,\,z) \,|\, x^2 + y^2 \le 2x,\, 0 \le z \le 1 \},$$

$$\Phi^{-1}(M) = \left\{ (\rho,\,\varphi,\,z) \,|\, 0 \le \rho \le 2\,\cos\varphi,\, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\, 0 \le z \le 1 \right\}$$

a daný integrál

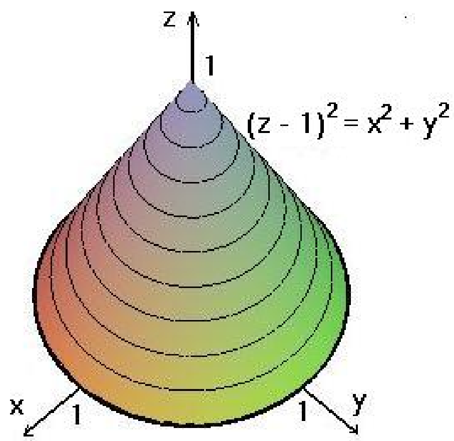
$$\int_M z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \int_{\Phi^{-1}(M)} z\,\rho^2\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int_0^1 z\,dz \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^2\,d\rho =$$

$$= \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}\left[\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{9}.$$

$$M = \left\{\,(x,y,z)\,|\,0\le z\le 1-\sqrt{x^2+y^2}\,\right\},$$

$$\Phi^{-1}(M) = \{\,(\rho,\,\varphi,\,z)\,|$$
$$0\le z\le 1-\rho,\;0\le\rho\le 1,\;0\le\varphi\le 2\pi\,\}$$



Obr. 6.20:

c)

$$\int_M z\,dx\,dy\,dz = \int_{\Phi^{-1}(M)} z\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\,d\rho \int_0^{1-\rho} z\,dz = 2\pi\int_0^1 \rho\,d\rho\,[\,z\,]_0^{1-\rho} =$$

$$= \pi\int_0^1 \rho\,(1-\rho)^2\,d\rho = \pi\left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{2}{3}\rho^3 + \frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1 = \frac{\pi}{12}.$$

□

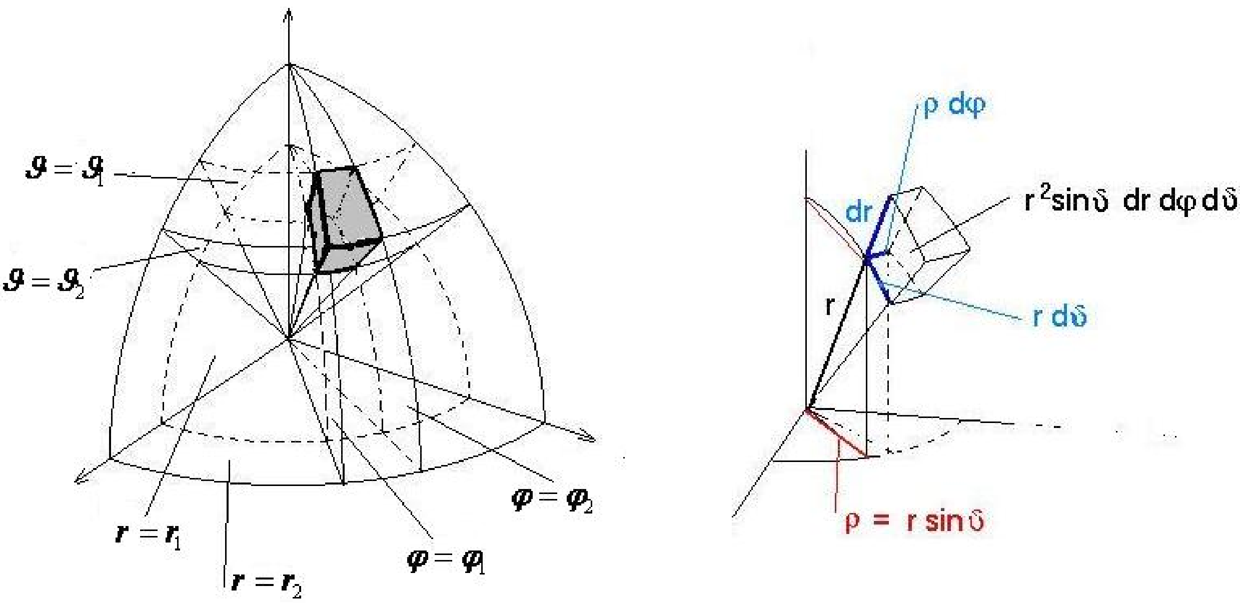
Pro integraci pomocí cylindrick7ch souřadnic můžeme použít tento maplet.

Sférické souřadnice

Sférické souřadnice mají transformační rovnice $\begin{cases} x = r\,\cos\varphi\sin\vartheta \\ y = r\,\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = r\,\cos\vartheta \end{cases}$, jedná se tedy o zobrazení

$$\Phi : \langle 0,\,\infty) \times \langle 0,\,2\pi) \times (0,\,\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(r,\,\varphi,\vartheta) = (r\,\cos\varphi\sin\vartheta,\,r\,\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta),$$

jehož jakobián $|\Phi'| = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{vmatrix} = -r^2\sin\vartheta.$
Přitom je třeba si uvědomit, že $|\Phi'| = |-r^2\sin\vartheta| = r^2\sin\vartheta$, protože v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$, což je maximální možný rozsah souřadnice ϑ , je $\sin\vartheta \geq 0$.



Obr. 6.21: Objemový element sfér. souřadnic

Ve sférických souřadnicích se tedy „objemový element“ $dx\,dy\,dz$ transformuje na $r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta$.

Souřadnicové plochy, na kterých jsou nové proměnné konstantní, se zobrazí takto:

1. Plochy $r = r_0$ =konst. se zobrazí na kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$
   – soustředné kulové plochy se středem v počátku souřadnic,

2. plochy $\varphi = \varphi_0$ =konst. se zobrazí na roviny $y = \mathrm{tg}\varphi_0\, x$
   – svislé roviny procházející osou z

3. plochy $\vartheta = \vartheta_0$ =konst. se zobrazí na plochy $z = \mathrm{tg}\vartheta_0\sqrt{x^2 + y^2}$
   – rotační kuželové plochy s osou rotace v ose z.

Geometricky znamená pro daný bod sférická souřadnice r vzdálenost tohoto bodu od počátku souřadnic, sférická souřadnice φ úhel, který svírá rovina procházející tímto bodem a osou z se souřadnou rovinou xz (s polorovinou pro kladné y) a sférická souřadnice ϑ úhel, který svírá průvodič daného bodu (spojnice s počátkem) s kladným směrem osy z.

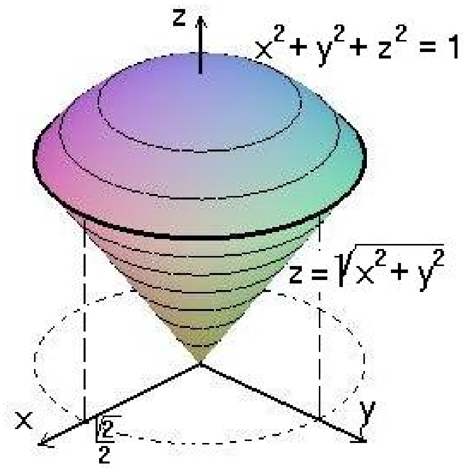
Příklad 6.22. Pomocí transformace do sférických souřadnic vypočteme trojné integrály z funkce

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

přes dané množiny M:

a) M je popsána nerovnostmi $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$,

b) M je popsána nerovností $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$.



Obr. 6.22:

Řešení. a) První nerovnost zřejmě popisuje kouli o poloměru 1, dostáváme omezení

$$0 \leq r \leq 1;$$

druhou nerovnost transformujeme pomocí sférických souřadnic:

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \;\Rightarrow\; r \cos\vartheta \geq \sqrt{r^2 \cos^2\varphi \sin^2\vartheta + r^2 \sin^2\varphi \sin^2\vartheta} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \cos\vartheta \geq \sin\vartheta \; (\geq 0) \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\vartheta \leq 1 \;\Rightarrow\; \vartheta \leq \frac{\pi}{4}$$

Platí tedy

$$\Phi^{-1}(M) = \left\{ (r,\, \varphi,\, \vartheta) \,|\, 0 \leq r \leq 1,\, 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

– ve sférických souřadnicích je integrační obor interval, a dále

$$\int_M \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy,\, dz = \int_{\Phi^{-1}(M)} r \cdot r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\varphi\, d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^1 r^3\, dr = [\,\varphi\,]_0^{2\pi}\; [-\cos\vartheta\,]_0^{\frac{\pi}{4}}\; \left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\,(2 - \sqrt{2}).$$

Množina M je koule o poloměru $\frac{1}{2}$ se středem v bodě $(0,0,\frac{1}{2})$.

$$x^2+y^2+z^2 \le z \;\Rightarrow\; r \le \cos\vartheta \,(r \ge 0) \;\Rightarrow\; \cos\vartheta \ge 0 \;\Rightarrow\; 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2};$$

Ve sférických souřadnicích tedy pro integrační obor platí

$$\Phi^{-1}(M) = \left\{ (r,\,\varphi,\,\vartheta) \,|\, 0 \le r \le \cos\vartheta,\; 0 \le \varphi \le 2\pi,\; 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \right\};$$

$$\int_M \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy,\,dz = \int_{\Phi^{-1}(M)} r \cdot r^2 \sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\,d\vartheta \int_0^{\cos\vartheta} r^3\,dr = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\,d\vartheta \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{\cos\vartheta} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\vartheta\,\sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos^5\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

□

Příklad 6.23. Vypočítáme objem části jednotkové koule, která leží mezi rovinami o rovnicích $x=\sqrt{3}y$ a $y=\sqrt{3}x$ („dílek pomeranče“)

Řešení. Vyjádříme rovnice rovin ve sférických souřadnicích:

$$x=\sqrt{3}y \quad\Rightarrow\quad r\cos\varphi\sin\vartheta = \sqrt{3}r\sin\varphi\sin\vartheta \quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

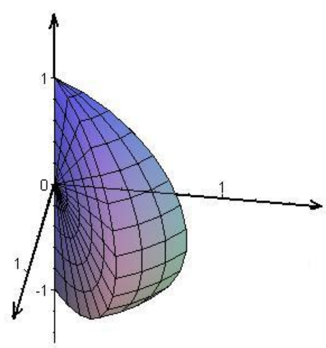
$$y=\sqrt{3}x \quad\Rightarrow\quad r\sin\varphi\sin\vartheta = \sqrt{3}r\cos\varphi\sin\vartheta \quad\Rightarrow\quad \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$$

Pro r zřejmě platí $0 \le r \le 1$, pro ϑ jsme nedostali žádné omezení.

$$V = \int_M 1\,dx\,dy\,dz = \int_{\Phi^{-1}(M)} r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta$$

kde pro M platí:

$$0 \le r \le 1,\; \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3},\; 0 \le \vartheta \le \pi.$$



Obr. 6.23:

$$V = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^1 r^2\sin\vartheta\,dr = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\,d\vartheta \int_0^1 r^2\,dr =$$

$$= [\varphi]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cdot [-\cos\vartheta]_0^{\pi} \cdot \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^1 = \frac{2}{9}\pi$$

□

Pro integraci pomocí sférických souřadnic můžeme použít tento maplet.

Shrnutí

V této kapitole jsme uvedli větu o transformaci v určitém integrálu 6.19, pomocí které převedeme integrál v kartézských souřadnicích na integrál v jiných vhodných souřadnicích, které mohou obor integrace podstatně zjednodušit.

Uvedli jsme zejména

- polární souřadnice: $\Phi(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$; přitom platí

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Phi^{-1}(A)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

- cylindrické souřadnice: $\Phi(\rho,\varphi,z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$; přitom platí

$$\int_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\Phi^{-1}(A)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz,$$

- sférické souřadnice: $\Phi(r,\varphi,\vartheta) = (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)$; přitom platí

$$\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Phi^{-1}(A)} f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\,r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta;$$

Cvičení

1. Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočítejte $\int_A f(x,y)\,dx\,dy$ pro dané funkce f na množinách A, které jsou popsány danými nerovnostmi:

   a) $f(x,y) = 1 - 2x - 3y, \quad A: \ x^2 + y^2 \le 2,$

   b) $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad A: \ x^2 + y^2 \le a^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0,$

   c) $f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad A: \ x^2 + y^2 \le ax,$

   d) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}}, \quad A: \ x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,$

   e) $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, \quad A: \ 1 \le x^2 + y^2 \le \mathrm{e},$

   f) $f(x,y) = \sin\sqrt{x^2 + y^2}, \quad A: \ \pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2,$

   g) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \quad A: \ 1 \le x^2 + y^2 \le 9, y \le x\sqrt{3}, y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}.$

2. Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočítejte obsah částí roviny, které jsou ohraničené danými křivkami:

   a) $(x - a)^2 + y^2 = a^2,\ x^2 + (y - a)^2 = a^2,$

   b) $(x^2 + y^2)^2 = 2xy,$

   c) $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3.$

3. Pomocí transformace do cylindrických souřadnic vypočítejte $\int_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ pro dané funkce f na množinách A, které jsou popsány danými nerovnostmi resp. ohraničené danými plochami:

   a) $f(x,y,z) = 1, \quad A: \ x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ 0 \le z \le 6,$

   b) $f(x,y,z) = z\sqrt{x^2 + y^2}, \quad A: \ y = 0,\ z = 0,\ z = 2,\ x^2 + y^2 = 2y,$

   c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2, \quad A: \ x^2 + y^2 = 2z,\ z = 2.$

4. Pomocí transformace do sférických souřadnic vypočítejte $\int_A f(x,y)\,dx\,dy\,dz$ pro dané funkce f na množinách A, které jsou popsány danými nerovnostmi resp. ohraničené

danými plochami:

a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $A:\ x^2+y^2+z^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$,

b) $f(x,y,z) = x^2+y^2$, $A:\ 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,\ z \ge 0$,

c) $f(x,y,z) = z$, $A:\ z^2 = x^2+y^2,\ z = 1$.

Výsledky

1. a) 2π, b) $\frac{\pi a^4}{8}$, c) $\frac{a^3}{3}(\pi - \frac{4}{3})$, d) $\frac{\pi}{8}(\pi - 2)$, e) 2π, f) $-6\pi^2$, g) $\frac{\pi^2}{6}$;
2. a) $a^2(\frac{\pi}{2} - 1)$, b) 1, c) $\frac{5\pi}{8}$;
3. a) 3π, b) $\frac{32}{9}$, c) $\frac{16\pi}{3}$;
4. a) $\frac{\pi}{8}$, b) $\frac{844\pi}{15}$, c) $\frac{\pi}{4}$.

7 Dodatek: Geometrie

V této závěrečné části shrneme základy o lineárních a kvadratických útvarech v rovině a prostoru - přímkách, rovinách, kuželosečkách a kvadrikách.

7.1 Bodové eukleidovské prostory

Připomeňme, že eukleidovský vektorový prostor je vektorový prostor konečné dimenze, ve kterém je definován skalární součin. Prvky dvoj- resp. trojrozměrného eukleidovského vektorového prostoru se dají představit jako šipky s počátečním koncem v pevném bodě, přičemž jaký je to bod se neuvádí. Při interpretaci aritmetických operací s těmito šipkami je možné v případě potřeby je různě přemisťovat do jiných bodů – tedy se vlastně současně uvažují body i vektory (šipky). V následující definici tuto intuitivní interpretaci precizujeme:

Definice 7.1. Nechť $\mathcal{V}$ je eukleidovský vektorový prostor, E množina taková, že pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ je určena bijekce množiny $E : X \mapsto X + \mathbf{v}$ pro niž platí:

1. $\forall X, Y \in E \;\; \exists!\, \mathbf{v} \in \mathcal{V},\; Y = X + \mathbf{v}$
2. $(X + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = X + (\mathbf{u} + \mathbf{v})$.

Potom se E nazývá ***bodový eukleidovský prostor***,
$\mathcal{V}$ jeho ***zaměření***,
bijekce $X \mapsto X + \mathbf{v}$ ***translace*** o vektor $\mathbf{v}$ a
$\dim \mathcal{V}$ ***dimenze*** prostoru E.

Je-li například $\mathcal{V} = \mathbb{E}_2$ – aritmetický vektorový prostor se standardním skalárním součinem dimenze 2 a $E = \mathbb{R}^2$, je $\mathbb{R}^2$ spolu se zaměřením $\mathbb{E}_2$ bodový eukleidovský prostor – prostor bodů a vektorů v rovině.

Místo $Y = X + \mathbf{v}$ píšeme také $Y - X = \mathbf{v}$.
Bod X resp. Y nazýváme ***počátečním*** resp. ***koncovým*** bodem vektoru $\mathbf{v}$.
Nechť $P \in E$, $\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$ báze prostoru $\mathcal{V}$.

Pro každý bod $X \in E$ má vektor $\mathbf{x} = X - P$ vyjádření

$$\mathbf{x} = \sum x_i \mathbf{b}_i, \qquad \text{tedy} \qquad X = P + x_1\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n\mathbf{b}_n.$$

Systém $\{P, \mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$ se nazývá ***soustava souřadnic***,
P ***počátek souřadnic***,
$x_1, ..., x_n$ ***souřadnice*** bodu X a
$\mathbf{x} = X - P$ ***polohový vektor*** bodu X.

Vzdálenost bodů $X, Y \in E$ je $\|X - Y\|$,
tedy velikost vektoru s počátečním bodem A a koncovým bodem B.

Souřadnice bodů budeme psát v hranatých závorkách: $X = [x_1, ...x_n]$, souřadnice vektorů, tak jak jsme zvyklí, v kulatých závorkách.

Je-li $(\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n)$ ortonormální báze, potom se $\{P, \mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n\}$ nazývá ***kartézská soustava souřadnic***.

Soustava souřadnic

$$\{P_0, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n) \qquad \text{kde} \qquad P_0 = [0, ..., 0],\ \mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0), ..., \mathbf{e}_n = (0, ..., 0, 1)$$

se nazývá ***kanonická soustava souřadnic***.

V úvodu této kapitoly jsme se zmínili, že nás bude zajímat především dvoj- a trojrozměrný prostor; v trojrozměrném prostoru je vhodné zavést kromě skalárního součinu ještě dva další typy součinů vektorů:

Vektorový a smíšený součin v $\mathbb{E}_3$

Definice 7.2. Řekneme, že dvě báze $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ a $(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3)$ v eukleidovském prostoru $\mathbb{E}_3$ jsou ***souhlasně (nesouhlasně) orientované***, je-li determinant matice přechodu kladný (záporný).
Všechny báze v $\mathbb{E}_3$ se tak rozpadají na dvě disjunktní třídy souhlasně orientovaných bází. Prohlásíme-li báze jedné třídy za kladně orientované a báze druhé třídy za záporně orientované, řekneme, že jsme prostor $\mathbb{E}_3$ orientovali.

V dalším předpokládejme, že $\mathbb{E}_3$ je orientovaný. Označme $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ některou pevně vybranou ortonormální kladně orientovanou bázi.

Definice 7.3. Buďte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}_3$,

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},\ \ \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k},\ \ \mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}.$$

Vektorový součin vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ je vektor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

neboli (symbolicky)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Smíšený součin vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ je číslo

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3$$

neboli

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Z předchozí definice je vidět, že vektorový a tedy i smíšený součin podstatně závisí na tom, že vektory jsou trojice. Na prostory jiné dimenze než tři tyto pojmy nezobecňujeme.

Vektorový součin je definován pomocí souřadnic vektorů; mohlo by se zdát, že bude záviset na volbě báze. Bez důkazu formulujeme následující větu:

Věta 7.4. *Vektorový součin nezávisí na volbě kladně orientované ortonormální báze.*

Přímo z definice se prověří následující

Početní pravidla:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \\ \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha\mathbf{b}), \\ \mathbf{a} \times \mathbf{a} &= \mathbf{o}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Na závěr ještě uvedeme některé vlastnosti vektorového součinu:

Věta 7.5. ***Vlastnosti vektorového součinu:***

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$,
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o} \iff \mathbf{a}, \mathbf{b}$ *jsou lineárně závislé,*
3. *jsou-li* **a**,**b** *lineárně nezávislé, potom* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ *je kladně orientovaná báze v* $\mathbb{E}_3$,
4. $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \sin\varphi$, *kde* φ *je úhel vektorů* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

Důkaz naleznete v části **Pro zájemce** na konci kapitoly.

Pro zájemce

Důkaz vlastností vektorového součinu

1. $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$ a podobně pro $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}$.

2. $(\Leftarrow)$ $\mathbf{a},\mathbf{b}$ lineárně závislé $\Rightarrow \mathbf{a}=\alpha\mathbf{b}$;
   $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (\alpha\mathbf{b})\times\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{b}\times\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{o} = \mathbf{o}$.
   $(\Rightarrow)$ Jsou-li $\mathbf{a},\mathbf{b}$ lineárně nezávislé, potom podle Steinitzovy věty existuje $\mathbf{x}\in\mathbb{E}_3$ tak, že $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{x}$ jsou lineárně nezávislé; tedy $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{x}$ je determinant regulární matice a je různý od nuly, tedy $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\neq 0$.

3. Nechť $\mathbf{A}$ je matice přechodu od $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ k $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$. Tedy

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ a_2 & b_2 & -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \\ a_3 & b_3 & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) > 0.$$

4. Nejdříve ukážeme, že platí

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|^2\cdot\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2.$$

   Nechť $(\mathbf{i}',\mathbf{j}',\mathbf{k}')$ je kladně orientovaná ortonormální báze taková, že $\mathbf{a}=\alpha\mathbf{i}'$, $\mathbf{b}=\beta_1\mathbf{i}'+\beta_2\mathbf{j}'$. Potom

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{vmatrix} = \alpha\beta_2\mathbf{k}' \;\Rightarrow\; (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \alpha^2\beta_2^2;$$

$$\|\mathbf{a}\|^2\cdot\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = \alpha^2(\beta_1^2+\beta_2^2) - (\alpha\beta_1)^2 = \alpha^2\beta_2^2.$$

   Tedy

$$\|\mathbf{a}\times\mathbf{b})\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\cdot\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a}\|^2\cdot\|\mathbf{b}\|^2\left(1-\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|}\right)^2\right) =$$

$$\|\mathbf{a}\|^2\cdot\|\mathbf{b}\|^2(1-\cos^2\varphi) = \|\mathbf{a}\|^2\cdot\|\mathbf{b}\|^2\sin^2\varphi.$$

Otázky a úkoly

1. Co je to bodový eukleidovský prostor?
2. Co je to kartézská soustava souřadnic?
3. Kdy řekneme, že jsme trojrozměrný bodový eukleidovský prostor orientovali?
4. Jak definujeme vektorový a smíšený součin?
5. Jsou dány vektory $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\in\mathbb{E}_3$. Ukažte, že
   (a) vektory $\mathbf{a}\times\mathbf{d}$, $\mathbf{b}\times\mathbf{d}$, $\mathbf{c}\times\mathbf{d}$ jsou lineárně závislé
   (b) vektory $\mathbf{a}-\mathbf{d}$, $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ jsou lineárně závislé, jestliže platí
   $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}\times\mathbf{d}$ a $\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{b}\times\mathbf{d}$.

Cvičení

1. V $\mathbb{E}_3$ určete $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$, je-li $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
2. V $\mathbb{E}_3$ vypočítejte
   (a) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$, je-li $\|\mathbf{a}\| = 1$, $\|\mathbf{b}\| = 5$ a $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -3$
   (b) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, je-li $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ a $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{o}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$
3. V $\mathbb{E}_3$ zjednodušte

$$a)\quad \mathbf{i} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) + (\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) \qquad b)\quad (2\mathbf{i} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$

4. V $\mathbb{E}_3$ určete vektor $\mathbf{x}$, který je ortogonální k vektorům $\mathbf{a} = (6, 3, 0)$ a $\mathbf{b} = (1, 7, 2)$ a pro který platí $\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = 6$, kde $\mathbf{c} = (4, -4, -2)$.

7.2 Lineární útvary v bodových prostorech

K popisu přímek a rovin v bodových prostorech a jejich zobecnění – tzv. nadrovin – použijeme pojmů podprostor; přitom dostaneme jejich obvyklé označení, tj. vyjádření pomocí rovnic:

Definice 7.6. Nechť $A \in E$ je libovolný bod, $\mathcal{V}' \sqsubseteq \mathcal{V}$.
Množina $E' = \{A + \mathbf{u} | \mathbf{u} \in \mathcal{V}'\}$ se nazývá ***podprostor*** bodového prostoru E.
Podprostor E' je sám bodový prostor se zaměřením $\mathcal{V}'$.

PŘÍMKA je podprostor dimenze 1:

Je-li $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, $A \in E$, pak množina

$$\{X | X = A + t\mathbf{u}, t \in \mathbb{R}\}$$

je přímka určená bodem a vektorem; rovnici

$$X = A + t\mathbf{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$

nazýváme ***parametrickou rovnicí přímky***.
Vektor $\mathbf{u}$ se nazývá ***směrový vektor*** této přímky.

Je-li $\mathbf{u} = B - A$, říkáme, že přímka o rovnici

$$X = A + t(B - A), \quad t \in \mathbb{R}$$

je určena dvěma body.

ROVINA je podprostor dimenze 2:

Je-li $\mathcal{V} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, $A \in E$, pak množina

$$\{X | X = A + t_1\mathbf{u} + t_2\mathbf{v}, t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

je rovina určená bodem a dvěma vektory;
rovnici

$$X = A + t_1\mathbf{u} + t_2\mathbf{v}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

nazýváme ***parametrickou rovnicí roviny***.

Je-li $\mathbf{u} = B - A, \mathbf{v} = C - A$, říkáme, že rovina o rovnici

$$X = A + t_1(B - A) + t_2(C - A), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

je určena třemi body.

Přímky a body v E_2

V E_2 mají parametrické rovnice přímky tvar

$$\begin{array}{ccccc} x & = & a_1 & + & t\,u_1 \\ y & = & a_2 & + & t\,u_2 \end{array} \quad t \in \mathbb{R};$$

jestliže první rovnici násobíme číslem u_2, druhou číslem u_1 a rovnice odečteme, vyloučíme „parametr“ t a dostaneme

$$u_2(x - a_1) - u_1(y - a_2) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (u_2, -u_1) \cdot X - A = 0;$$

tedy libovolný vektor, jehož počátečním bodem je bod A a koncový bod leží na vyšetřované přímce je ortogonální s vektorem $\mathbf{n} = (a, b) = (u_2, -u_1)$. Tento vektor se nazývá ***normálový vektor*** přímky.

Předchozí úpravou jsme dostali tzv. ***obecnou rovnici přímky*** v rovině, která má tvar

$$ax + by + c = 0, \quad \text{kde} \quad a = u_2,\ b = -u_1 \text{ a } c = a_2u_1 - a_1u_2.$$

Poznamenejme, že množina bodů v rovině tvaru

$$p = \{\, [x, y] \,|\, ax + by = -c \,\}$$

je taková podmnožina roviny, pro jejíž body nabývá výraz

$$ax + by = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

hodnoty $-c$. Tento výraz se někdy nazývá lineární forma.

Příklad 7.7. Je dána přímka $p: \; x - 2y - 1 = 0$. Máme najít rovnici přímky, která prochází bodem $A = [-3, 2]$ a je

a) rovnoběžná s přímkou p,

b) kolmá na přímku p.

Řešení. a) Přímka p má normálový vektor $\mathbf{n} = (a, b) = (1, -2)$, přímka s ní rovnoběžná má stejný normálový vektor. Směrový vektor obou přímek $\mathbf{u}$ má tedy souřadnice $\mathbf{u} = (2, 1)$. Parametrická rovnice hledané přímky má tvar $X = A + \mathbf{u}t$, $t \in \mathbb{R}$, v souřadnicích $\underline{\underline{\begin{array}{l} x = -3 + 2t \\ y = 2 + t \end{array} \quad t \in \mathbb{R}.}}$

Obecnou rovnici hledané přímky můžeme bezprostředně najít takto:
Budeme hledat c tak, aby přímka $x - 2y + c = 0$ procházela bodem A. Po dosazení souřadnic bodu A dostaneme $-3 - 4 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 7$, tedy hledaná přímka má obecnou rovnici $\underline{\underline{x - 2y + 7 = 0}}$.

b) Postupujeme obdobně jako v předchozím případě; normálový vektor zadané přímky je směrovým vektorem hledané kolmice:
Parametrická rovnice hledané kolmice má tvar $X = A + \mathbf{n}t$, $t \in \mathbb{R}$, v souřadnicích
$\underline{\underline{\begin{array}{l} x = -3 + t \\ y = 2 - 2t \end{array} \quad t \in \mathbb{R}.}}$

Obecná rovnice: $2x + y + c = 0 \;\wedge\; [x, y] = [-3, 2] \quad \Rightarrow \quad c = 4$, tedy $\underline{\underline{2x + y + 4 = 0}}$.

□

Příklad 7.8. Máme určit vztah pro výpočet vzdálenosti bodu $X = [x_0, y_0]$ od přímky s obecnou rovnicí $ax + by + c = 0$.

Řešení. Hledaná vzdálenost d bude rovna vzdálenosti daného bodu X od průsečíku P dané přímky s přímkou na ni kolmou a procházející bodem X.

Kolmice má směrový vektor $\mathbf{n} = (a, b)$ – je to normálový vektor dané přímky – a parametrické rovnice $\begin{array}{l} x = x_0 + t\,a \\ y = y_0 + t\,b \end{array} \quad t \in \mathbb{R}.$

Hledejme hodnotu parametru t, pro který příslušný bod kolmice leží současně na dané přímce:

$$a(x_0 + t\,a) + b(y_0 + t\,b) + c = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2},$$

takže pro souřadnice průsečíku P platí:

$$x_p = x_0 - \frac{a}{a^2 + b^2}\,(ax_0 + by_0 + c), \qquad y_p = y_0 - \frac{b}{a^2 + b^2}\,(ax_0 + by_0 + c).$$

Pro hledanou vzdálenost platí

$$d = \|X - P\| = \sqrt{(x_p - x_0)^2 + (y_p - y_0)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2 (ax_0+by_0+c)^2 + \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)^2 (ax_0+by_0+c)^2} = \underline{\underline{\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}}.$$

□

Je-li $ax+by+c=0$ rovnice přímky, je pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha ax + \alpha by + \alpha c = 0$ zřejmě rovnicí téže přímky. Jestliže položíme $\alpha = \frac{1}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$, dostaneme tzv. ***normálový tvar*** rovnice přímky

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,y + \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = a'x + b'y + c' = 0,$$

kde $|c'| = d$ – vzdálenost přímky od počátku souřadnic.

Vzájemnou polohu dvou přímek daných obecnými rovnicemi

$$\begin{aligned} p_1:&\quad a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ p_2:&\quad a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{aligned}$$

vyšetříme zkoumáním řešitelnosti soustavy lineárních rovnic $\begin{aligned} a_1x + b_1y &= -c_1 \\ a_2x + b_2y &= -c_2 \end{aligned}$.

Přímky jsou **různoběžky** právě když existuje společný bod – průsečík, tedy právě když soustava má jedno řešení. Z Frobeniovy věty vyplývá, že v tomto případě musí být hodnost matice soustavy rovna dvěma, tedy musí platit

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Jinak řečeno, normálové vektory přímek jsou lineárně nezávislé.

Přímky jsou **rovnoběžky** právě když neexistuje společný bod, tedy právě když soustava nemá řešení. Z Frobeniovy věty vyplývá, že v tomto případě musí být hodnost matice soustavy menší než hodnost rozšířené matice soustavy; tedy

$$h\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

a zároveň

$$h\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = 2.$$

Jinak řečeno, normálové vektory přímek jsou lineárně závislé.

Přímky jsou **totožné** (splývají), právě když má soustava nekonečně mnoho řešení. Z Frobeniovy věty vyplývá, že v tomto případě musí být hodnost matice soustavy i hodnost rozšířené matice soustavy rovna jedné, tedy všechny subdeterminanty druhého řádu rozšířené matice soustavy musí být nulové.

Příklad 7.9. Tři přímky v rovině jsou dány obecnými rovnicemi

$$\begin{aligned} p_1 &: \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ p_2 &: \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ p_3 &: \quad a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{aligned}$$

Máme ukázat, že se tyto přímky protínají v jednom bodě, právě když platí:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Řešení. Přímky se protnou v jednom bodě, jestliže soustava sestavená z jejich rovnic bude mít právě jedno řešení. Jedná se ale o nehomogenní soustavu tří rovnic pro dvě neznámé:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= -c_1 \\ a_2x + b_2y &= -c_2 \ , \\ a_3x + b_3y &= -c_3 \end{aligned}$$

ta má podle Frobeniovy věty řešení právě když hodnost matice soustavy (která je nejvýš dvě) je stejná jako hodnost rozšířené matice soustavy. Ale

$$h \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \\ a_3 & b_3 & -c_3 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \leq 2 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

□

Roviny, přímky a body v E_3

Rovina

Je-li v E_3 $\quad A = [a_1, a_2, a_3]$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a označíme-li $X = [x, y, z]$, má parametrická rovnice roviny tvar

$$[x, y, z] = [a_1, a_2, a_3] + t_1(u_1, u_2, u_3) + t_2(v_1, v_2, v_3) =$$

$$= [a_1 + t_1\, u_1 + t_2\, v_1, a_2 + t_1\, u_2 + t_2\, v_2, a_3 + t_1\, u_3 + t_2\, v_3]$$

a podmínky pro rovnost jednotlivých souřadnic bodů na levé a pravé straně rovnice dávají ze střední školy známé parametrické rovnice roviny v prostoru:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t_1\, u_1 + t_2\, v_1 \\ y &= a_2 + t_1\, u_2 + t_2\, v_2 \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \\ z &= a_3 + t_1\, u_3 + t_2\, v_3 \end{aligned}$$

Z parametrických rovnic vyloučíme parametry; například z první a druhé rovnice a z druhé a třetí rovnice vyloučíme t_1, z takto vzniklých dvou rovnic potom vyloučíme t_2

(obdobným postupem jako při eliminaci parametru z parametrických rovnic přímky – rovnice násobíme vhodným číslem a potom je odečteme); po úpravě dostaneme

$$(x-a_1)(u_3v_2-u_2v_3)+(y-a_2)(u_1v_3-u_3v_1)+(z-a_3)(u_2v_1-u_1v_2)=0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (X-A)\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=0$$

tedy libovolný vektor, jehož počátečním bodem je bod A a koncový bod leží na vyšetřované rovině je ortogonální s vektorem

$$\mathbf{n}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(a,b,c)=(u_3v_2-u_2v_3,\; u_1v_3-u_3v_1,\; u_2v_1-u_1v_2).$$

Tento vektor se nazývá ***normálový vektor*** roviny.

Předchozí úpravou jsme dostali tzv. ***obecnou rovnici roviny*** v prostoru, která má tvar

$$ax+by+cz+d=0, \quad \text{kde} \quad a=u_3v_2-u_2v_3,\; b=u_1v_3-u_3v_1,\; c=u_2v_1-u_1v_2.$$

Přitom obecná rovnice roviny procházející bodem $A=[a_1,a_2,a_3]$ má zřejmě tvar

$$a(x-a_1)+b(y-a_2)+c(z-a_3)=0,$$

přičemž $\mathbf{n}=(a,b,c)$ je její normálový vektor.

Poznamenejme, že množina bodů v prostoru tvaru

$$\rho=\{\,[x,y,z]\,|\,ax+by+cz=-d\,\}$$

je taková podmnožina prostoru, pro jejíž body nabývá lineární forma

$$ax+by+cz=\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

hodnoty $-d$.

Obecnou rovnici roviny určené třemi body můžeme zřejmě najít pomocí vztahu

$$((B-A)\times(C-A))\cdot(X-A)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix}=0.$$

Příklad 7.10. Máme najít rovnici roviny, která prochází bodem $A=[4,2,1]$ a

a) je rovnoběžná s rovinou $x-2y+4z=0$,

b) je kolmá na rovinu $x-y+2z-4=0$ a obsahuje bod $B=[5,4,2]$.

Řešení. a) Rovina rovnoběžná s danou rovinou má stejný normálový vektor; pro její rovnici tedy dostáváme

$$(x-4)-2(y-2)+4(z-1)=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x-2y+4z-4=0}}.$$

b) Rovnice roviny procházející bodem A má tvar $a(x-4)+b(y-2)+c(z-1)=0$, přitom $\mathbf{n}=(a,b,c)$ má být kolmý na normálový vektor roviny $x-y+2z-4=0$; tedy musí platit

$$(a,b,c)\cdot(1,-1,2)=0 \quad \Rightarrow \quad a-b+2c=0.$$

Protože bod $B=[5,4,2]$ leží v hledané rovině, musí platit

$$a(5-4)+b(4-2)+c(2-1)=0 \quad \Rightarrow \quad a+2b+c=0.$$

Dostali jsme homogenní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a-b+2c&=0\\ a+2b+c&=0 \end{aligned}$$

a ta má řešení $k(-5,1,3)$. Položme $k=-1$ a dostaneme $a=5,\ b=-1,\ c=-3$ a hledaná rovnice roviny je tedy

$$5(x-4)-(y-2)-3(z-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{5x-y-3z-15=0}}.$$

□

Příklad 7.11. Máme vypočítat výšku spuštěnou z vrcholu V čtyřstěnu na jeho stěnu ABC, je-li $V=[1,5,5]$, $A=[4,4,4]$, $B=[-1,10,-4]$, $C=[2,-2,5]$.

Řešení. Hledanou výšku vypočítáme jako vzdálenost bodu V od roviny ρ dané třemi body A, B, C. Rovnice roviny má tvar

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-4 & z-4\\ -5 & 6 & -8\\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-y-2z+4=0.$$

Pro hledanou vzdálenost platí

$$v=\frac{|2\cdot 1-5-2\cdot 5+4|}{\sqrt{4+1+4}}=\underline{\underline{3.}}$$

□

Přímka

Je-li v E_3 $A=[a_1,a_2,a_3]$, $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ a označíme-li $X=[x,y,z]$, má parametrická rovnice přímky tvar

$$[x,y,z]=[a_1,a_2,a_3]+t(u_1,u_2,u_3)=[a_1+t\,u_1,a_2+t\,u_2,a_3+t\,u_3]$$

a podmínky pro rovnost jednotlivých souřadnic bodů na levé a pravé straně rovnice dávají známé parametrické rovnice přímky v prostoru:

$$\begin{array}{rcrcl} x &=& a_1 &+& t\,u_1 \\ y &=& a_2 &+& t\,u_2 \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z &=& a_3 &+& t\,u_3 \end{array}$$

Ze tří parametrických rovnic přímky v prostoru nemůžeme parametr eliminovat tak, aby vyšla jedna rovnice. Vyjádřením t z parametrických rovnic a porovnáním pravých stran dostaneme

$$\frac{x-a_1}{u_1} = \frac{y-a_2}{u_2} = \frac{z-a_3}{u_3},$$

což jsou tzv. ***kanonické rovnice přímky***.

Přímku v prostoru můžeme zadat také jako průsečnici dvou různoběžných rovin. Mějme tedy dvě roviny o rovnicích

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{array}, \qquad \text{kde} \quad h\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = 2.$$

Potom tyto rovnice nazýváme ***obecnými rovnicemi přímky***, která je průsečnicí rovin s těmito rovnicemi. Směrový vektor této přímky určíme jako vektorový součin normálových vektorů obou rovin:

$$\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1) \times (a_2, b_2, c_2).$$

Příklad 7.12. Najděme přímku, ve které leží výška čtyřstěnu z příkladu 7.11 a její průsečík s podstavou:

Řešení. Hledaná přímka je kolmá na podstavu čtyřstěnu, která leží v rovině o rovnici $2x - y - 2z + 4 = 0$. Normálový vektor této roviny $\mathbf{n} = (2, -1, -2)$ bude směrovým vektorem hledané kolmice; ta navíc prochází vrcholem $V = [1, 5, 5]$. Přímka má tedy parametrické rovnice

$$X = V + \mathbf{n}t, \ t \in \mathbb{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 5 - \ \ t \ , \\ z = 5 - 2t \end{array} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Průsečík P najdeme tak, že určíme hodnotu parametru t, pro kterou je bod kolmice současně bodem roviny $2x - y - 2z + 4 = 0$ – dosadíme pravé strany parametrických rovnic kolmice:

$$2(1+2t) - (5-t) - 2(5-2t) + 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = 1, \quad \underline{\underline{P = [3, 4, 3]}}.$$

Vypočítejme ještě vzdálenost bodů V a P – velikost vektoru $V - P$:

$$\|V - P\| = \sqrt{(1-3)^2 + (5-4)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3.$$

Pochopitelně jsme dospěli ke stejnému výsledku jako v příkladu 7.11. □

Otázky a úkoly

1. Jak definujeme přímku v E_n?

2. Čím může být zadána přímka v rovině? V prostoru?

3. Jaké typy rovnic přímky v rovině znáte a jaký je mezi nimi vztah?

4. Jaké typy rovnic přímky v prostoru znáte a jaký je mezi nimi vztah?

5. Jaké tvary rovnic roviny v prostoru znáte a jaký je mezi nimi vztah?

6. Jaká může být vzájemná poloha
   a) dvou přímek b) přímky a roviny c) dvou rovin
   a jak ji vyšetřujeme?

7. Jak zjišťujeme vzdálenost bodu
   a) od jiného bodu b) od přímky c) od roviny?

8. Jak zjistíme úhel
   a) dvou přímek b) přímky a roviny c) dvou rovin?

9. Ukažte, že obsah rovnoběžníku, jehož tři vrcholy leží v bodech A, B, C, je roven $\|(B-A)\times(C-A)\|$.

10. Ukažte, že obsah rovnoběžníku s vrcholy $[0,0]$, $[a_1,a_2]$, $[b_1,b_2]$, $[a_1+b_1,a_2+b_2]$ je roven $\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right|$.

11. Ukažte, že objem rovnoběžnostěnu, jehož čtyři vrcholy leží v bodech A, B, C, D, je roven $|(B-A)\cdot((C-A)\times(D-A))|$.

12. Ukažte, že objem rovnoběžnostěnu, jehož čtyři vrcholy leží v bodech $[0,0,0]$, $[a_1,a_2,a_3]$, $[b_1,b_2,b_3]$, $[c_1,c_2,c_3]$ je roven $\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|$.

13. Jak zjistíme, zda čtyři body
    $$A_1=[x_1,y_1,z_1],\ A_2=[x_2,y_2,z_2],\ A_3=[x_3,y_3,z_3],\ A_4=[x_4,y_4,z_4]$$
    leží v jedné rovině? (Návod: využijte předchozí příklad)

14. Ukažte, že vzdálenost d bodu D od roviny určené body A, B, C můžeme vypočítat pomocí vztahu
    $$d=\frac{(D-A)\cdot((B-A)\times(C-A))}{\|(B-A)\times(C-A)\|}.$$

15. Kolik jednotkových vektorů je rovnoběžných s rovinou $ax+by+cz+d=0$? Jak můžeme najít jeden z nich?

16. Kolik jednotkových vektorů je rovnoběžných s přímkou $\begin{matrix} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{matrix}$? Jak můžeme najít jeden z nich?

Cvičení

1. Najděte rovnici přímky procházející daným bodem
(a) rovnoběžně s daným vektorem (b)kolmo na daný vektor:

$$a)\ [2,3],(4,5) \quad b)\ [4,5],(2,3) \quad c)\ [1,0],(2,-1) \quad d)\ [2,-1],(1,3)$$

2. Najděte směrové vektory přímek

$$\begin{array}{llll} a) & 2x-3y+8=0 & b) & \pi x - \sqrt{2}y = 7 \\ c) & y = 3x+7 & d) & 2(x-1)+5(y-2)=0 \end{array}$$

3. Najděte vzdálenost daného bodu od dané přímky:

$$a)\ [0,0],\ 3x+4y-10=0 \quad b)\ [3/2,2/3],\ 2x-y+5=0$$

4. Najděte jednotkový normálový vektor rovin

$$a)\ 2x-3y+4z+11=0 \quad b)\ z = 2x-3y+4$$

5. Najděte rovnici roviny určené třemi body:

$$\begin{array}{llll} a) & A=[4,0,3] & B=[4,\ 1,\ 5], & C=[1,2,-3] \\ b) & A=[6,-3,3] & B=[7,-3,0] & C=[5,-2,3] \\ c) & A=[1,1,-1] & B=[3,2,0] & C=[4,4,-3] \end{array}$$

6. Najděte rovnici roviny, která prochází bodem $B=[7,1,2]$ a je kolmá na roviny

$$a)\ \begin{matrix} y=0 \\ 3x+2z+6=0 \end{matrix} \qquad b)\ \begin{matrix} 2x-5y+z-1=0 \\ 3x+10y-2z-12=0 \end{matrix}$$

7. Najděte rovnici roviny, která prochází body $A=[3,1,2]$ a $B=[4,7,-1]$ a je rovnoběžná s vektorem $\mathbf{a}=(3,-1,-4)$.

8. Najděte rovnici roviny, která prochází body $A=[3,0,2]$ a $B=[4,1,5]$ a je kolmá na rovinu $2x+4y+6z=0$.

9. Najděte obecnou rovnici roviny, která prochází bodem $A=[2,1,-2]$ a je rovnoběžná s vektory $\mathbf{a}=(3,2,4)$, $\mathbf{b}=(3,5,2)$.

10. Najděte rovnici roviny, která prochází bodem $A = [3, 2, -2]$, je kolmá na rovinu $5x - 2y + 5z - 11 = 0$ a s rovinou $x - 4y - 8z + 1 = 0$ svírá úhel $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

11. Najděte vzdálenost daného bodu od dané roviny:

    a) $[0, 0, 0]$, $2x - 4y + 3z + 2 = 0$ *b*) $[1, 2, 3]$ $x + 2y - 3z + 5 = 0$

    c) $[2, 2, -1]$, rovina prochází bodem $[1, 4, 3]$ a má normálový vektor $(2, -7, 2)$

    d) $[0, 0, 0]$, rovina prochází bodem $[4, 1, 0]$ a je rovnoběžná s vektorem $(1, 1, 1)$.

12. Je dána rovina ρ o rovnici $6x - 2y + 3z - 14 = 0$. Najděte bod A, který

    (a) leží na ose y a jeho vzdálenost od roviny ρ je rovna 4,
    (b) leží na ose x a jeho vzdálenost od roviny ρ je rovna jeho vzdálenosti od bodu $B = [4, 2, \sqrt{3}]$,
    (c) leží na ose z a jeho vzdálenost od roviny ρ je rovna jeho vzdálenosti od roviny $2x - 2y + z - 8 = 0$.

13. Najděte souřadnice těžiště trojúhelníku s vrcholy $A = [2, -1, 5]$, $B = [3, 6, 15]$, $C = [-5, -2, 7]$.

14. Zjistěte, zda trojúhelník ABC je pravoúhlý nebo rovnoramenný:

    (a) $A = [2, -1, 5]$, $B = [6, 1, -2]$, $C = [5, 0, 7]$
    (b) $A = [2, -1, 5]$, $B = [6, 1, 9]$, $C = [4, 3, 9]$

15. Krychle se stranou délky a má jeden vrchol v počátku souřadné soustavy prostoru E_3, tři její stěny leží v souřadných rovinách a souřadnice vrcholů jsou nezáporné. Najděte souřadnice vrcholů

    (a) dané krychle,
    (b) pravidelného čtyřstěnu vepsaného do této krychle,
    (c) pravidelného osmistěnu vepsaného do této krychle.

    Pozn.: Pravidelná tělesa mají všechny hrany stejně dlouhé.

16. Na ose x najděte všechny body, jejichž vzdálenost od bodu $A = [-4, 6, 6]$ je rovna 12.

17. Na ose y najděte všechny body, jejichž vzdálenost od bodů $A = [-4, 1, 7]$ a $B = [3, 5, -2]$ je stejná.

18. Vypočítejte plošný obsah trojúhelníku, který má vrcholy $A = [7, 2, 6]$, $B = [4, 5, 6]$, $C = [3, 1, -4]$.

19. Jaká musí být čísla a, b, aby body $A = [3, 3, a]$, $B = [1, b, 0]$, $C = [-1, 0, 7]$ neležely na jedné přímce?

20. Čtyřstěn má vrcholy $A = [3, 4, 0]$, $B = [5, 2, -3]$, $C = [7, 4, 6]$, $D = [-4, -3, 7]$. Vypočítejte délku výšky spuštěné z vrcholu D.

21. Jsou dány tři za sebou jdoucí vrcholy rovnoběžníku $ABCD$, kde $A = [2, -2, 2]$, $B = [4, 2, 0]$, $C = [7, 4, 3]$. Nalezněte jeho čtvrtý vrchol D.

22. Najděte úhel rovin $2x + 2y + z - 11 = 0$ a $15x - 16y + 12z - 3 = 0$.

23. Najděte rovnice přímky, která prochází bodem $A = [3, 1, 2]$ a je kolmá na rovinu $x - 2y + 2z + 1 = 0$.

24. Najděte parametrické rovnice přímky, která prochází bodem $A = [4, -5, 7]$ a je rovnoběžná s přímkou

$$a)\quad \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{-11} \qquad b)\quad \begin{aligned} x + 3y + 10z - 2 &= 0 \\ 2x - y + z - 4 &= 0 \end{aligned}\ .$$

25. Napište parametrické rovnice přímek

$$a)\quad \begin{aligned} x + y - 1 &= 0 \\ x + 2y + 2 &= 0 \end{aligned} \qquad b)\quad \begin{aligned} x - 3y + 4z - 5 &= 0 \\ 4x + 3y - 6z - 5 &= 0 \end{aligned}$$

26. Najděte úhel přímek p, q, je-li

$$a)\ p:\quad \begin{aligned} 2x + 2y + z - 7 &= 0 \\ x - 2y + 2z + 75 &= 0 \end{aligned} \qquad q:\quad \begin{aligned} 9x - 2y + z - 16 &= 0 \\ 3x - y - z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$b)\ p:\quad \begin{aligned} x - y - 2z - 1 &= 0 \\ x - y + z + 1 &= 0 \end{aligned} \qquad q:\quad \begin{aligned} 2x - y - z - 1 &= 0 \\ 2x + y + z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

27. Zjistěte, zda přímka $\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{8-z}{3}$ leží v rovině $2x + y - 10z + 2 = 0$ nebo je s ní rovnoběžná anebo ji protíná. V posledním případě najděte průsečík.

Výsledky

1. a)rovnoběžná $5x-4y-2=0$, kolmá $4x+5y-23=0$, b)rovnoběžná $3x-2y-2=0$, kolmá $2x+3y-23=0$, c)rovnoběžná $x+2y-1=0$, kolmá $2x-y-2=0$, d)rovnoběžná $3x-y-7=0$, kolmá $x+3y+1=0$;
2. a) $(3, 2)$, b) $(\sqrt{2}, \pi)$, c)$(1, 3)$, d)$(5, -2)$; **3.** a) -2, b) $\frac{22\sqrt{5}}{15}$; **4.** a) $(1, -3, 2)/\sqrt{29}$, b) $(2, -3, -1)/\sqrt{14}$;
5. a) $-10x-6y+3z+31=0$, b) $3x+3y+z-12=0$, c) $-5x+7y+3z+1=0$; **6.** a) $2x-3z-8=0$, b) $y+5z-11=0$;
7. $-27x-5y-19z+124=0$; **8.** $-3x+z+7=0$; **9.** $-16x+6y+9z+44=0$; **10.** $5x+5y-2z+6=0$;
11. a) $\frac{2\sqrt{29}}{2}$, b) $\frac{\sqrt{14}}{14}$, c) $\frac{8\sqrt{57}}{57}$, d) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$; **12.** a) $[0, 7, 0], [0, -21, 0]$, b) $[7, 0, 0], [\frac{133}{13}, 0, 0]$, c) $[0, 0, -7], [0, 0, \frac{49}{8}]$; **13.** $[0, 1, 9]$;
14 a) pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu A, b) rovnoramenný, strany b a c jsou stejně dlouhé;
15.
16. $-4 \pm 6\sqrt{2}$; **17.** $[0, -\frac{7}{2}, 0]$; **18.** $5\sqrt{45}$; **19.** $a \neq -7 \wedge b \neq \frac{3}{2}$;
20. $-3x-6y+2z+33=0$; **21.** $[9, 0, 1]$; **22.** $\alpha \doteq 1{,}44$; **23.** $\frac{x-4}{1} = \frac{5-y}{2} = \frac{z-7}{2}$;
24. a) $x = 4t+4$, $y = -3t-5$, $z = -11t-7$, b) $x = 6t+4$, $y = 22t-5$, $z = 15t+7$; **25.** $x = 4$, $y = -3$, $z = t$;
26. a) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, b) $\alpha = \frac{\pi}{3}$; **27.** $[\frac{245}{37}, \frac{95}{37}, \frac{386}{37}]$.

7.3 Kvadratické útvary v bodových prostorech

Poznámka o lineárních a kvadratických formách

V poznámce před příkladem ?? v minulém odstavci jsme se zmínili o tom, že výraz tvaru $ax + by$ se někdy nazývá lineární forma; podobně výraz tvaru $ax^2 + bxy + cy^2$ se nazývá kvadratická forma. Podobné výrazy, jak víme, vystupují v rovnicích kuželoseček. Pro možnost jednoduššího vyjadřování při popisu kvadratických útvarů pojmy lineární a kvadratické formy zavedeme.

Definice 7.13. Lineární zobrazení vektorového prostoru do prostoru reálných čísel $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá ***lineární forma.***
Je-li $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n)$ báze prostoru $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$, $f(\mathbf{x}) = x_1 f(\mathbf{a}_1) + x_2 f(\mathbf{a}_2) + \cdots + x_n f(\mathbf{a}_n)$, $\alpha_i = f(\mathbf{a}_i), i = 1, ..., n$, potom

$$f(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

se nazývá ***analytické vyjádření lineární formy*** a vektor $(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$ se nazývá ***vektor souřadnic lineární formy*** vzhledem k bázi A. V maticovém zápise je

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Poznamenejme, že vektor souřadnic lineární formy chápaný jako matice typu $(1, n)$ je maticí příslušného lineárního zobrazení.

Je-li $A' = (\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, ..., \mathbf{a}'_n)$ jiná báze prostoru $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = x'_1\mathbf{a}'_1 + x'_2\mathbf{a}'_2 + \cdots + x'_n\mathbf{a}'_n$,

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \alpha'_1 & \cdots & \alpha'_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$\mathbf{P}$ matice přechodu, potom

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \alpha'_1 & \cdots & \alpha'_n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

tedy $(\alpha'_1, \alpha'_2, ...\alpha'_n) \cdot \mathbf{P} = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$, neboli $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \mathbf{P}^T \cdot \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{bmatrix}.$

Příklad 7.14. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto ax + by + cz$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ je lineární forma. V maticovém zápisu

$$f(\mathbf{x}) = f(x, y, z) = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Příklad 7.15. Lineární forma $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bázi

$U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2): \ \mathbf{u}_1 = (1,1), \mathbf{u}_2 = (1,-1)$ analytické vyjádření $f_U(\mathbf{x}) = x_1 + 2x_2$.

Najděte její vyjádření

1) v kanonické bázi 2) v bázi $V = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2): \ \mathbf{v}_1 = (1,-2), \mathbf{v}_2 = (3,2)$.

Řešení. 1. Vektor souřadnic lineární formy vzhledem k bázi U má tvar $\mathbf{a}_U = (1,2)$, kanonická báze $B = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ je tvaru $\mathbf{e}_1 = (1,0), \mathbf{e}_2 = (0,1)$, matice přechodu mezi bází U a kanonickou bází je tvaru $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Označíme-li vektor souřadnic dané lineární formy vzhledem ke kanonické bázi jako $\mathbf{a}_B = (a,b)$, platí $\mathbf{a}_U = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{a}_B$, neboli

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \mathbf{a}_B = (a,b) = \tfrac{1}{2}(3,-1),$$

tedy $f_B(\mathbf{x}) = \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$.

2. Matice přechodu mezi kanonickou bází a bází V má tvar $\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{a}_V = \mathbf{a}_B \cdot \mathbf{P}'$:

$$\mathbf{a}_V = \tfrac{1}{2}(3,-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}(5,7),$$

tedy $f_V(\mathbf{x}) = \frac{5}{2}x_1 + \frac{7}{2}x_2$.

□

Bilineární formy

Nyní budeme definovat jisté zobecnění lineární formy – jakousi „lineární formu dvou proměnných“. Tento pojem nebudeme studovat příliš podrobně; je to pro nás jen pomocný pojem sloužící definici kvadratické formy, kterou uvedeme v zápětí.

Definice 7.16. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá ***bilineární forma***, jestliže je lineární na obou místech, tedy jestliže
$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je lineární forma a
$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je lineární forma.

Je-li $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n)$ báze prostoru $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{a}_i$, $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{a}_j$, je

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j} x_i y_j f(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \sum_{i,j} \beta_{ij} x_i y_j$$

– ***analytické vyjádření bilineární formy***. Maticově:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Matice $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{bmatrix}$ se nazývá ***matice souřadnic*** bilineární formy vzhledem k bázi A, stručně ***matice bilineární formy.***
Je-li matice $\mathbf{B}$ bilineární formy b symetrická, řekneme, že b je ***symetrická bilineární forma.***

Je-li $A' = (\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, ..., \mathbf{a}'_n)$ jiná báze prostoru $\mathbb{R}^n$,
$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ v bázi A, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} x'_1 & \cdots & x'_n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{B}' \cdot \begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix}$
v bázi A', $\mathbf{P}$ matice přechodu,která vyjadřuje nové proměnné pomocí starých,

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix} = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x'_1 & \cdots & x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^T,$$

potom

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{B}' \cdot \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

tedy $\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{B}' \cdot \mathbf{P}$.

Více si všimneme následujícího speciálního případu:

Kvadratické formy

Definice 7.17. ***Kvadratická forma*** na $\mathbb{R}^n$ je zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takové, že existuje bilineární forma $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pro kterou platí $f(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka: Každá kvadratická forma je určena právě jednou symetrickou bilineární formou:

$$b(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{y})$$

ale b je symetrická, tedy

$$b(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + b(\mathbf{y}, \mathbf{y})$$

a odtud plyne, že

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \left(b(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) - b(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - b(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \right) = \frac{1}{2} \left(f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) \right).$$

Matice kvadratické formy je matice příslušné bilineární formy, kterou je kvadratická forma určena.

Je-li $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n)$ báze prostoru $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathcal{V}, \mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kvadratická forma a $\mathbf{A}$ matice jejích koeficientů vzhledem k bázi A, potom

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

je ***analytické (maticové) vyjádření kvadratické formy***.

Příklad 7.18. Je dána kvadratická forma $f(\mathbf{x}) = 7x_1^2 - 6x_1x_2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$, máme určit její matici.

Řešení.

$$f(\mathbf{x}) = 7x_1x_1 - 3x_1x_2 - 3x_2x_1 + 8x_2x_2 + 5x_3x_3 - x_1x_3 - x_3x_1 + 3x_2x_3 + 3x_3x_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -3 & 8 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \text{tedy} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -1 \\ -3 & 8 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

□

Všimněme si, že v hlavní diagonále matice kvadratické formy jsou koeficienty u druhých mocnin, mimo hlavní diagonálu vždy polovina koeficientu u příslušného součinu.

Příklad 7.19. Máme najít kvadratickou formu, která má matici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Řešení. Podle poznámky na konci předchozího příkladu snadno určíme, že

$$f(\mathbf{x}) = -5x_1^2 + 2x_1x_2 + 7x_2^2 - 4x_2x_3 + 3x_3^2.$$

□

Příklad 7.20. Transformujme kvadratickou formu $3x_1^2 - x_4^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3$ pomocí transformace

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & = & y_1 & + & y_2 & & & + & y_4 \\ x_2 & = & -y_1 & + & y_2 & & & + & y_4 \\ x_3 & = & y_1 & + & y_2 & & & - & y_4 \\ x_4 & = & -y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 \end{array}.$$

Řešení. Zadaná transformace má tvar $\mathbf{x} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{y}$, kde

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nejdříve si uvědomme, že transformace zadává <u>staré</u> proměnné pomocí <u>nových</u>; máme

$$\mathbf{x} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{y},\ \mathbf{x}^T = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{P}^T,\ f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \ \Rightarrow$$

$$g(\mathbf{y}) = f(\mathbf{P} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{y};$$

tedy

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

tedy matice transformované kvadratické formy je diagonální a kvadratická forma má po transformaci tvar

$$8y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2 - 4y_4^2.$$

□

Definice 7.21. Vyjádření kvadratické formy vzhledem k takové bázi prostoru $\mathbb{R}^n$, kdy její matice je diagonální, se nazývá ***kanonický tvar kvadratické formy.***

Věta 7.22. *Ke každé kvadratické formě f s maticí o hodnosti ≥ 1 na prostoru $\mathbb{R}^n$ existuje báze, vzhledem k níž je matice koeficientů formy f diagonální, tj. forma má kanonický tvar*

$$f(\mathbf{x}) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2.$$

Problém, jak najít takovou transformaci, která převádí danou kvadratickou formu na kanonický tvar, souvisí s dalšími vlastnostmi matic – speciálně s tzv. vlastními čísly a vlastními vektory matic, které jsme v Lineární algebře neuváděli, a proto tento problém vyšetřovat nebudeme.

Kvadratické útvary

Příklady kvadratických útvarů v rovině jsou vám známé kuželosečky; v této kapitole pojem zobecníme na tzv. kvadriky v trojrozměrném prostoru a nadkvadriky v prostorech vyšších dimenzí.

Definice 7.23. Nechť E_n je eukleidovský prostor s kanonickou bází, $\mathcal{V}_n$ jeho zaměření. Buď $f(\mathbf{x})$ kvadratická forma na $\mathcal{V}_n$ s maticí koeficientů $\mathbf{A}$ (vzhledem ke kanonické bázi), $g(\mathbf{x})$ lineární forma na $\mathcal{V}_n$ s vektorem souřadnic $\mathbf{b}$,
$c \in \mathbb{R}$.

Potom množina bodů $X \in E_n, X = [x_1, ..., x_n]$, pro jejichž souřadnice platí

$$f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) + c = 0,$$

kde $\mathbf{x}$ je polohový vektor bodu X, se nazývá ***nadkvadrika***.

Maticově:

$$\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + c = 0.$$

Matice

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & c \end{bmatrix}$$

se nazývá ***matice nadkvadriky***.

Je-li $|\mathbf{M}| \neq 0$ říkáme, že příslušná nadkvadrika je ***regulární***, v opačném případě říkáme, že je ***singulární***.

Je-li $|\mathbf{A}| \neq 0$ je nadkvadrika ***středová***.

Řekneme, že nadkvadrika má ***kanonický tvar***, jestliže $\mathbf{A}$ je diagonální matice; tedy má-li příslušná kvadratická forma $f(\mathbf{x})$ kanonický tvar.

Kvadratické útvary v E_2 – kuželosečky

Nechť $n = 2$, $X = [x, y]$, $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$.

Množina bodů vyhovujících rovnici

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + c = 0$$

neboli (analytický tvar)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

je ***kuželosečka***.

Příklad 7.24. Množina bodů v E_2:

$$M = \{[x, y] \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\ \}$$

je, jak známo, kružnice, tedy kuželosečka v kanonickém tvaru, která je regulární a středová. Zde je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{o}, \quad c = -1.$$

Kuželosečky, které nemají kanonický tvar, se snažíme, pokud to je možné, na kanonický tvar převést – to se děje pomocí transformace souřadnic. Situaci popíšeme na příkladu:

Příklad 7.25. Máme vyšetřit kuželosečku o rovnici

$$5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0, \quad \text{neboli} \quad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 36 = 0.$$

Řešení. Zde je

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -36 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix},$$

kuželosečka je regulární a středová.

Metodami, které přesahují náplň tohoto textu (pomocí vlastních čísel a vlastních vektorů matice kvadratické formy kuželosečky), se dá najít transformace převádějící kuželosečku na kanonický tvar. V tomto případě se jedná o transformaci, která má matici

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad \text{tedy} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

□

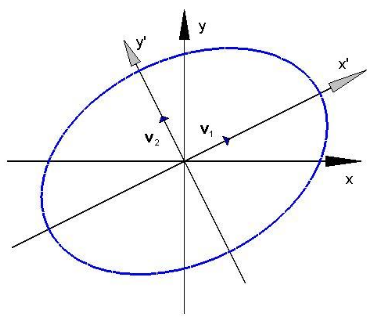
Transformační rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{2}{\sqrt{5}}x' - \tfrac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \tfrac{2}{\sqrt{5}}y' \end{aligned}$$

Jedná se o ortogonální transformaci v rovině – tedy o otočení.
V nových souřadnicích má kuželosečka rovnici

$$4x'^2 + 9y'^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

a to je elipsa.



Obr. 7.1: Otočení elipsy

Jestliže v rovnici středové kuželosečky vystupují lineární členy, provedeme po otočení ještě posunutí počátku doplněním na úplné čtverce a tím najdeme souřadnice středu kuželosečky, tak jak to znáte ze střední školy.

Příklad 7.26. Máme převést rovnici kuželosečky

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$$

na kanonický tvar.

Řešení. Pro posunutí počátku nejdříve předchozí rovnici doplníme na úplné čtverce:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 4y) + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 4y + 4) = -4 + 4 + 36$$

tedy

$$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36$$

Jestliže posuneme počátek pomocí transformace

$$x' = x - 1, \quad y' = y - 2, \quad \text{neboli} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

dostaneme závěrem rovnici elipsy $\underline{\underline{\dfrac{x'^2}{9} + \dfrac{y'^2}{4} = 1.}}$

□

Nejdůležitější kuželosečky jsou elipsy (kružnice), hyperboly a paraboly; tyto kuželosečky se nazývají ***nedegenerované***. Ve shrnutí na závěr kapitoly je přehled kanonických tvarů kuželoseček.

Kvadratické útvary v E_3 – kvadriky

Nechť $n = 3$, $\quad X = [x, y, z]$, $\quad \mathbf{x} = (x, y, z)$, $\quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Množina bodů vyhovujících rovnici

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + c = 0$$

neboli (analytický tvar)

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

je ***kvadrika***.

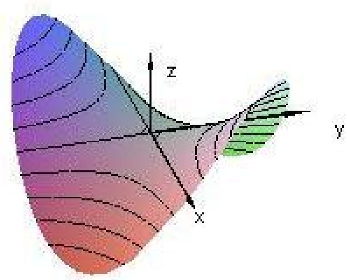
Příklad 7.27. Množina bodů v E_3:

$$M = \{[x, y, z] \mid xy - z = 0\ \}$$

je kvadrika, která je singulární a není středová.
Zde je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = (0, 0, -1), \quad c = 0.$$

Je to tzv. hyperbolický paraboloid.



Obr. 7.2: $z = xy$

Kvadratickou formu s maticí $\qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

můžeme také převést na kanonický tvar pomocí transformace

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

a transformační rovnice mají následující tvar:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ z &= z' \end{aligned}$$

a to je otočení kolem osy z o úhel $\pi/4$.

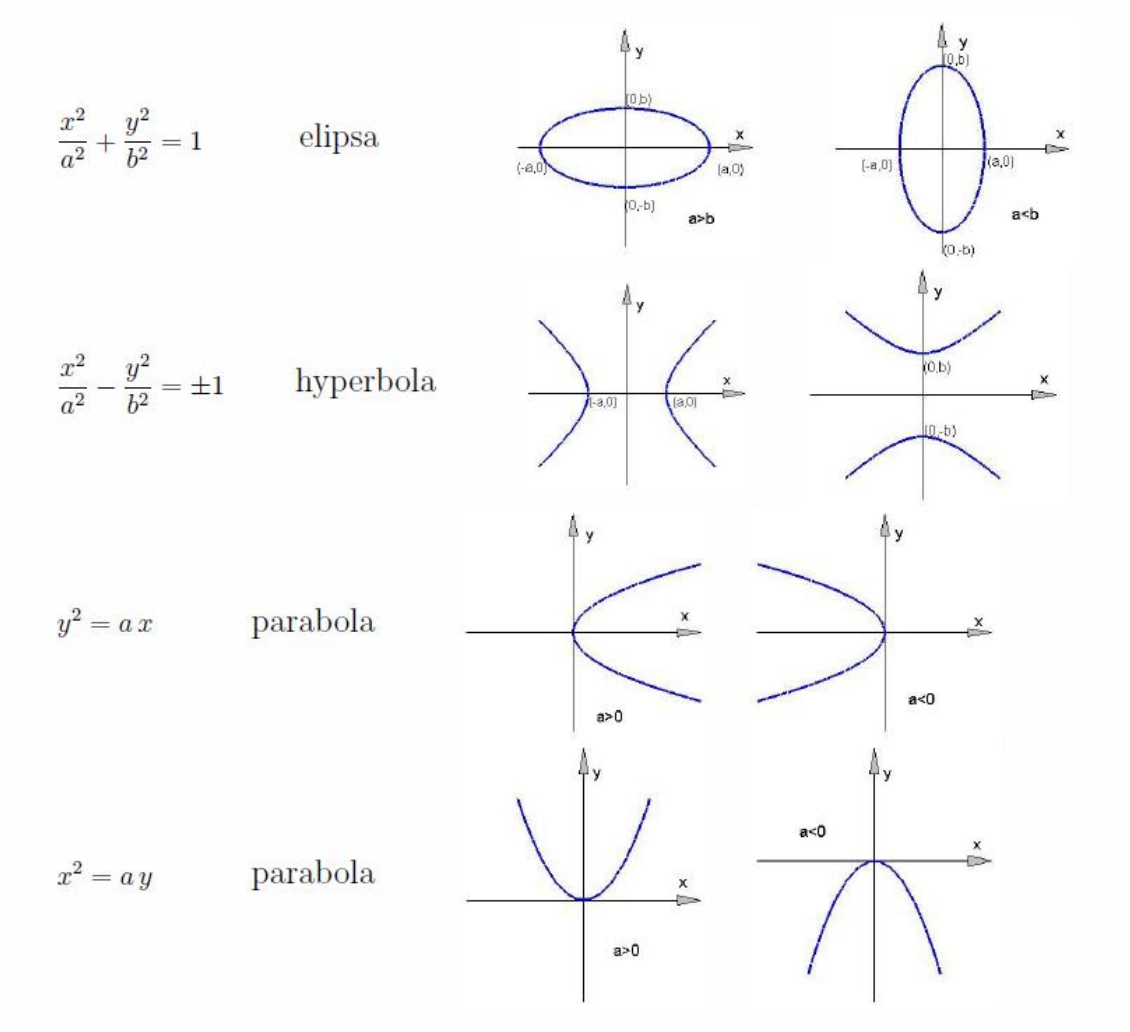
Po transformaci má kvadrika tvar $\underline{\underline{x'^2 - y'^2 = z'}}$.

Otočení souřadné soustavy, kterým dosáhneme toho, aby nové osy ležely v hlavních osách nadkvadriky, obecně najít neumíme – je k tomu opět třeba znát tzv. vlastní čísla a vlastní vektory matice příslušné kvadratické formy. Posunutí počátku do středu středové nadkvadriky můžeme provést doplněním na čtverce.

V závěru kapitoly uvádíme přehled kanonických tvarů rovnic kvadrik – kvadratických útvarů v prostoru.

Shrnutí

Kanonické tvary nedegenerovaných kuželoseček



Obr. 7.3:

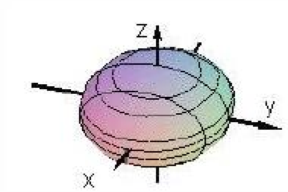
Kanonické tvary degenerovaných kuželoseček

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	$\emptyset$	$x^2 + a^2 = 0$ $y^2 + a^2 = 0$	$\emptyset$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	bod	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	dvě různoběžné přímky
$x^2 - a^2 = 0$ $y^2 - a^2 = 0$	dvě rovnoběžné přímky	$x^2 = 0$ $y^2 = 0$	dvě splývající přímky

Kanonické tvary nedegenerovaných kvadrik

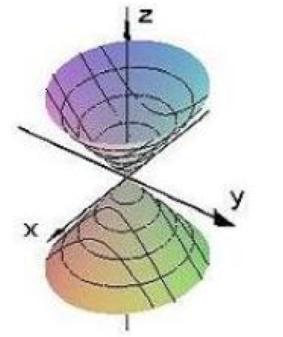
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

elipsoid



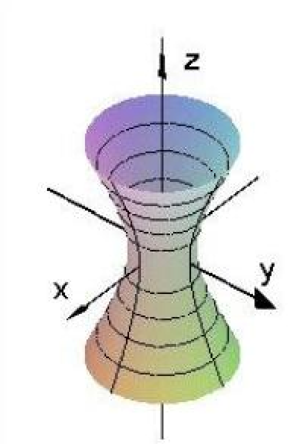
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$

kužel



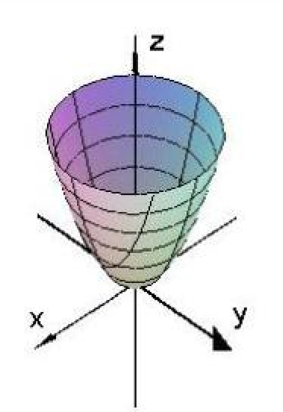
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

jednodílný hyperboloid



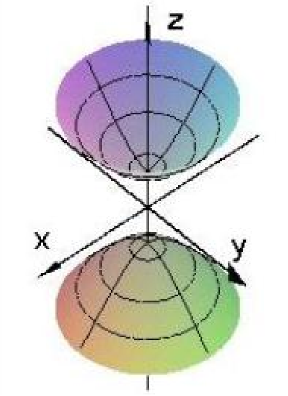
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

eliptický paraboloid



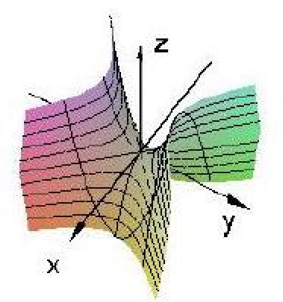
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

dvojdílný hyperboloid



$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

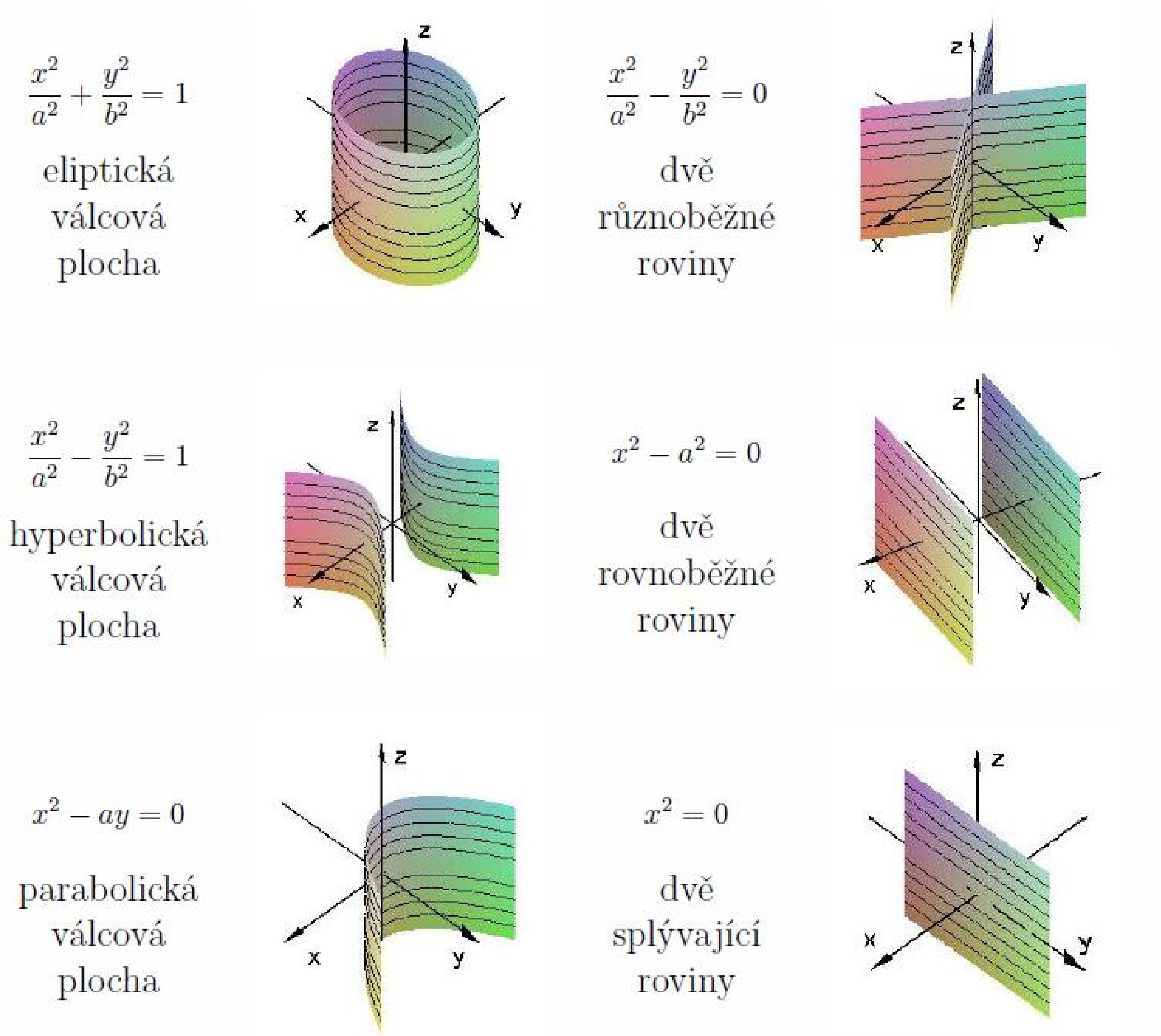
hyperbolický paraboloid



Obr. 7.4:
Elipsoid a hyperboloidy jsou středové kvadriky, paraboloidy jsou kvadriky nestředové.

Uvedli jsme zde jen některé případy jednotlivých typů kvadrik; stejné typy dostaneme záměnou proměnných x a y, x a z resp. y a z.

Kanonické tvary reálných degenerovaných kvadrik – válcové plochy



Obr. 7.5:
Válcové plochy jsou přímkové, tj. jsou „vyplněny“ přímkami. V našich případech šlo vždy o přímky rovnoběžné s osou z – v rovnici kvadriky se proměnná z nevyskytovala.

Zbývající případy kvadrik jsou počátek souřadné soustavy resp. osa z

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad \text{resp.} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

a imaginární plochy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad \frac{x^2}{a^2} = -1$$

Opět jsme uvedli některé případy jednotlivých typů kvadrik; stejné typy dostaneme záměnou proměnných x a y, x a z resp. y a z.

Cvičení

1. Je dán elipsoid
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \ a>0,\,b>0,\,c>0.$$
Najděte
a) body, ve kterých protne souřadné osy
b) křivky, ve kterých protne souřadné roviny
c) křivky, ve kterých protne roviny $x=c$, $y=c$, $z=c$ a uveďte podmínky na konstanty c, za kterých jsou tyto křivky reálné.

2. Pro dané elipsoidy najděte průsečíky se souřadnými osami a průsečnice s rovinami $z=0$ a $z=2$:
$$a)\ \ x^2+\tfrac{y^2}{4}+\tfrac{z^2}{9}=1 \quad b)\ \ 9x^2+9y^2+z^2=9$$
Elipsoidy s příslušnými řezy načrtněte.

3. Je dán jednodílný resp. dvojdílný hyperboloid ($a>0$, $b>0$, $c>0$)
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad \text{resp}\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$
Najděte
a) body, ve kterých protne souřadné osy
b) křivky, ve kterých protne souřadné roviny
c) křivky, ve kterých protne roviny $x=c$, $y=c$, $z=c$ a uveďte podmínky na konstanty c, za kterých jsou tyto křivky reálné.

4. Pro dané hyperboloidy najděte průsečíky se souřadnými osami a průsečnice s danými rovinami:
$$\begin{aligned}
&a)\quad -x^2+y^2-z^2=1,\quad x=0\\
&b)\quad -x^2+4y^2+9z^2=36,\quad x=8\\
&c)\quad -\tfrac{x^2}{4}+y^2+\tfrac{z^2}{9}=1,\quad z=3\\
&d)\quad x^2-y^2+z^2=1,\quad y=0,\ y=\sqrt{3},\ y=-\sqrt{3}\\
&e)\quad \tfrac{x^2}{4}-\tfrac{y^2}{9}+z^2=1,\quad y=0,\ y=3,\ y=-3\\
&f)\quad x^4+4y^2+4z^2=4,\quad z=0,\ z=\sqrt{3},\ z=-\sqrt{3}.
\end{aligned}$$
Hyperboloidy s příslušnými řezy načrtněte.

5. Pro dané kuželové plochy najděte průsečnice s danými rovinami:
$$\begin{aligned}
&a)\quad 3z^2=x^2+y^2,\quad z=1,\ x=1\\
&b)\quad 3z^2=4(x^2+y^2),\quad z=1,\ x=2\\
&c)\quad y^2=x^2+z^2,\quad z=1,\ x=3\\
&d)\quad z^2=\tfrac{x^2}{3}+\tfrac{z^2}{3},\quad z-1,\ y=2
\end{aligned}$$

Plochy s příslušnými řezy načrtněte.

6. Najděte (a načrtněte) průsečnice plochy $z = xy$ s rovinami:

$$a)\quad x = 2 \qquad b)\quad y = 2 \qquad c)\quad z = 2 \qquad e)\quad y = x \qquad f)\ y = -x.$$

7. Najděte translaci, která posune počátek souřadnic tak, aby dané kuželosečky byly v kanonickém tvaru. Zjistěte, o jaký typ kuželosečky se jedná a uveďte její rovnici v nových souřadnicích:

$$a)\quad 9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$$
$$b)\quad x^2 - 16y^2 + 8x + 128y = 256$$
$$c)\quad y^2 - 8x - 14y + 49 = 0$$
$$d)\quad x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$$
$$e)\quad 2x^2 - 3y^2 + 6x + 20y = -41$$
$$f)\quad x^2 + 10x + 7y = -32$$

8. Vyšetřete následující degenerované resp. imaginární kuželosečky a kde je to možné načrtněte graf:

$$a)\quad x^2 - y^2 = 0 \qquad b)\quad x^2 + 3y^2 + 7 = 0$$
$$c)\quad 8x^2 + 7y^2 = 0 \qquad d)\quad x^2 - 2xy + y^2 = 0$$
$$e)\quad 9x^2 + 12xy + 4y^2 - 52 = 0 \qquad f)\quad x^2 + y^2 - 2x - 4y = -5$$

9. Najděte matice následujících kvadrik a matice příslušných kvadratických forem. Každou kvadriku vyjádřete ve tvaru

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0\ :$$

$$a)\ x^2 + 2y^2 - y^2 + 4xy - 5yz + 7x + 2z = 3\ , \qquad b)\ xy + xz + yz = 1$$
$$c)\ 3x^2 + 7z^2 + 2xy - 3xy + 4yz - 3x = 4 \qquad d)\ x^2 + y^2 - z^2 = 7$$
$$e)\ 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - y + 3z = 0 \qquad f)\ 3z^2 + 3xy - 14y + 9 = 0$$

10. Pojmenujte následující kvadriky:

$$a)\ 36x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 36 = 0 \qquad b)\ 2x^2 + 6y^2 - 3z^2 = 18$$
$$c)\ 6x^2 - 3y^2 - 2z^2 - 6 = 0 \qquad d)\ 9x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$$
$$e)\ 16x^2 + y^2 = 16z \qquad f)\ 7x^2 - 3y^2 + y = 0$$
$$g)\ x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

11. Pro každou z následujících kvadrik najděte translaci, která ji převede do standardní pozice (na kanonický tvar). Napište rovnici kvadriky v nových proměnných a pojmenujte ji.

    a) $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 18x - 144y - 24z = -153$

    b) $6x^2 + 3y^2 - z^2 + 12x - 18y - 8z = -7$

    c) $3x^2 - 3y^2 - z^2 + 42x + 144 = 0$

    d) $4x^2 + 9y^2 - z^2 - 54y - 50z = 544$

    e) $x^2 + 16y^2 + 2x - 32y - 16z - 15 = 0$

    f) $7x^2 - 3y^2 + 126x + 72y + z + 135 = 0$

    g) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 11$

8 Přehled literatury

Klasické učebnice

1. Bican,L.: Algebra. Academia Praha 2001
2. Brabec,J., Martan,F., Rozenský,Z.: Matemetická analýza 1, SNTL Praha 1985
3. Budinský,B., Charvát,J.: Matemetika 1. SNTL Praha,1987
4. Čech,E.: Elementární funkce. Praha, JČMF 1947
5. Demlová, M., Nagy, J., Algebra, STNL, Praha, 1982.
6. Gillman,L., McDowell,R.: Matematická analýza. SNTL Praha, 1980
7. Grebenča,M.K., Novoselov,S.L.: Učebnice matematické analýzy I,II. NČSAV Praha, 1955
8. Havel,V., Holenda,J.: Lineární algebra. SNTL Praha 1984
9. Havlíček,K.: Diferenciální počet pro začátečníky. SNTL Praha 1962
10. Havlíček,K.: Integrální počet pro začátečníky. SNTL Praha 1963
11. Havlíček,K.: Diferenciální počet pro začátečníky. SNTL Praha 1962
12. Hruša,K.: Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu. NČSAV Praha 1959
13. Jarník,V.: Diferenciální počet I. NČSAV Praha 1963
14. Jarník,V.: Diferenciální počet II. NČSAV Praha 1956
15. Jarník,V.: Integrální počet I. NČSAV Praha 1963
16. Jarník,V.: Integrální počet II. NČSAV Praha 1955
17. Kluvánek,I., Mišík,L., Švec,M.: Matematika pre štúdium technických vied I,II. SVTL Bratislava 1961
18. Knichal,V., Bašta,A., Pišl,M., Rektorys,K.: Matematika I,II. SNTL Praha 1966

19. Kolibiar, M. a kol., Algebra a príbuzné disciplíny, Alfa, Bratislava, 1992.
20. Ljusternik,L.A. a kol.: Přehled matematické analýzy. SNTL Praha 1969
21. Pražák, P.: Matematika 1. Gaudeamus UHK, 2012
22. Rychnovský,R.: Úvod do vyšší matematiky. SZN Praha 1968
23. Smirnov,V.I.: Učebnice vyšší matematiky I,II. NČSAV Praha 1956
24. Škrášek,J.: Základy vyšší matematiky. NV Praha 1966
25. Švarc, S., kol., Matematická analýza I, PC DIR, Brno, 1997.
26. Vlasov,A.K.: učebnice vyšší matematiky. SNTL Praha 1958
27. Vojtěch,J.: Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických. NČSAV Praha 1959

Matematické příručky

1. Bartsch,H.J.: Matematické vzorce. SNTL Praha 1971
2. Bronštejn,I.N., Semenďajev,K.A.: Príručka matematiky pre inžinierov a pre študujúcich na vysokých školách technických. SVTL Bratislava 1964
3. Frank,L.: Matematika - technický průvodce. SNTL Praha 1973
4. Hruša,K. a kol.: Přehled elementární matematiky. SNTL Praha 1965
5. Kohlmann,Č.: Matematika ve sdělovací technice. SNTL Praha 1960
6. Nečas,J. a kol.: Aplikovaná matematika I,II. SNTL Praha 1977
7. Rektorys,K. a spol.: Přehled užité matematiky SNTL Praha 1973, 1995
8. Šalát,T. a kol.: Malá encyklopedie matematiky. Obzor Bratislava 1967

Sbírky úloh

1. Berman,G.N.: Zbierka úloh z matematickej analýzy ŠNTL Bratislava 1957
2. Eliaš,J., Horváth,J., Kajan,J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky, 1,2,3,4. Alfa Bratislava (několik vydání)

3. Hlaváček,A.,Dolanský,P.: Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky pro přípravu pracujících ke studiu na vysokých školách. SPN Praha 1971
4. Hrůza,B., Mrhačová,H.: Cvičení z algebry a geometrie. ES VUT 1990
5. Chemnitius,X.X.: Riešené príklady derivácie a spätnej integrácie funkcií. SVTL Bratislava 1966
6. Jirásek,F., Kriegelstein,E., Tichý,Z.: Sbírka řešených příkladů z matematiky, SNTL Praha 1981
7. Krupková,V., Studená,V.: Cvičení z matematické analýzy I. PC-DIR Brno 1994
8. Ryšavý,V.: Řešené úlohy z vyšší matematiky I,II. JČMF Praha 1950
9. Svätokrížny,P.: Lineárna algebra v úlohách. Alfa Bratislava 1984

Anglické učebnice

1. Anton, H., Elementary Linear Algebra, John Wiley, New York, 1984.
2. Avers,F.jr., Mendelsohn,E.: Calculus - Schaum's outline series. McGraw-Hill 1999
3. Drift,A., Davison,R.: Mathematics for Engineers. Pearson Education Limited 2004
4. Edwards, C.H., Penney, D.E., Calculus with Analytic Geometry, Prentice Hall, 1993.
5. Fong, Y., Wang, Y., Calculus, Springer, 2000.
6. Lipschuts,S.: Beginning linear algebra - Schaum's outline series. McGraw-Hill 1997
7. Mathews, K., Elementary Linear Algebra, University of Queensland, AU, 1991.
8. Mendelsohn, E., 3000 solved problems in Calculus, McGraw-Hill 1988.
9. Ross, K.A., Elementary analysis: The Theory of Calculus, Springer, 2000.
10. Small, D.B., Hosack, J.M., Calculus (An Integrated Approach), Mc Graw-Hill Publ. Comp., 1990.
11. Smith,R.T., Minton, R.B.: Calculus. McGraw-Hill 2000
12. Stroud,K.A., Booth,D.J: Engineering mathematics. Palgrave Macmillan 2001
13. Stroud,K.A., Booth,D.J: Advanced Engineering mathematics. Palgrave Macmillan 2001
14. Thomas, G.B., Finney, R.L., Calculus and Analytic Geometry, Addison-Wesley Publ. Comp., 1994.