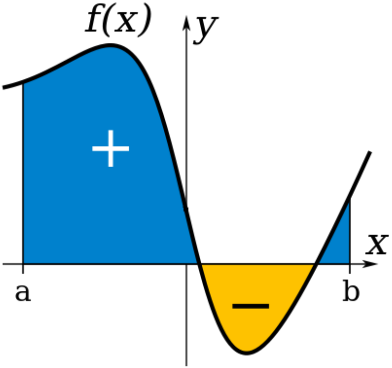
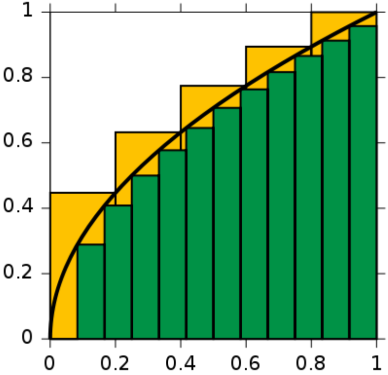
Integrální počet, pokračování

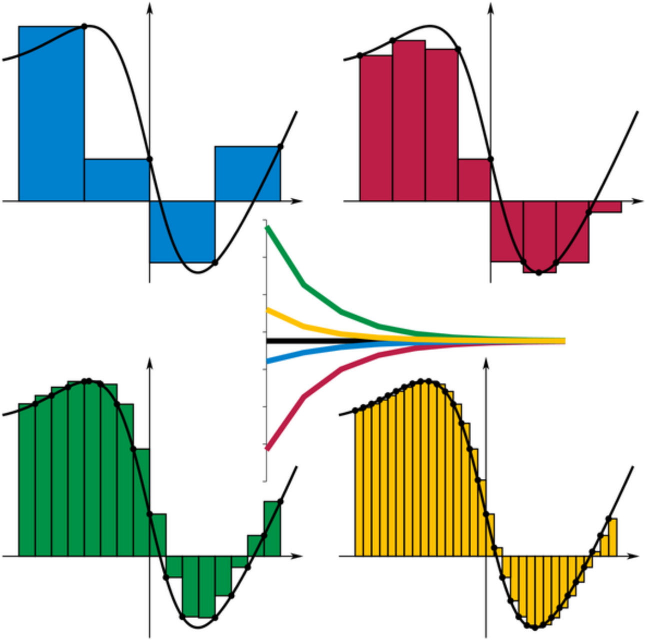
April 4, 2020

Určitý integrál





- dělení, dělící body, norma
- integrální součet
- integrovatelná funkce



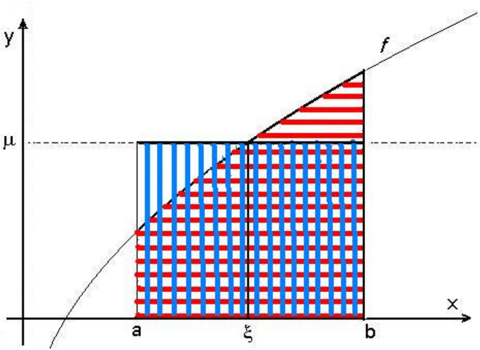
- Má-li ohraničená funkce f na uzavřetém intervalu $\langle a, b\rangle$ pouze konečně mnoho bodů nespojitosti, pak existuje určitý integrál

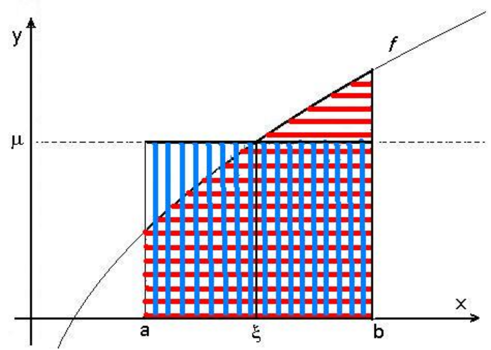
$$\int\limits_a^b f(x)dx.$$

- vlastnosti
  - $\int\limits_a^b 0 dx = 0,$
  - $\int\limits_a^b dx = b - a,$
  - $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, pro $c \in \langle a, b\rangle$,
  - $f(x) \leq g(x)$ na $\langle a, b\rangle \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx,$
  - $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx,$
  - $\int\limits_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int\limits_a^b f(x)dx; \quad \forall k \in R,$
  - $\int\limits_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx,$
  - $\int\limits_{-a}^a S(x)dx = 2\int\limits_0^a S(x)dx; \quad \int\limits_{-a}^a L(x)dx = 0.$

- Nechť je funkce f integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in \langle a, b\rangle$.

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$



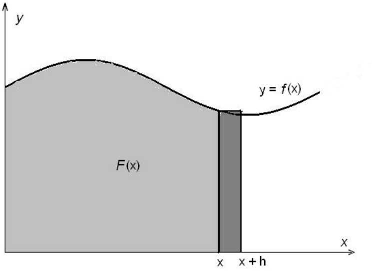


$$\exists \mu \in \langle m, M \rangle ; \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Ak f je spojitá na $\langle a, b \rangle$, tak $\exists \psi \in \langle a, b \rangle$;

$$f(\psi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Fundamentální věta



$$F(x) = \int_0^x f(x)dx,$$

$$F(x+h) - F(x) \doteq f(x) \cdot h \iff f(x) \doteq \frac{F(x+h) - F(x)}{h},$$

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x).$$

- **Funkce horní meze** $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$.

  Funkce Φ určuje obsah mezi osou x a funkcí f na intervalu $\langle a, x\rangle$.

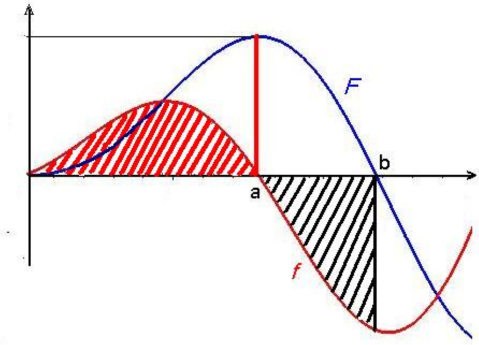
- **Funkce dolní meze** $\Psi(x) = \int\limits_x^b f(t)dt$.

  Funkce Ψ určuje obsah mezi osou x a funkcí f na intervalu $\langle x, a\rangle$.

Je-li $f : \langle a, b\rangle \to R$ v okolí bodu x spojitá, má funkce horní meze v bodě x derivaci a platí $\Phi'(x) = f(x)$.

Příklad:

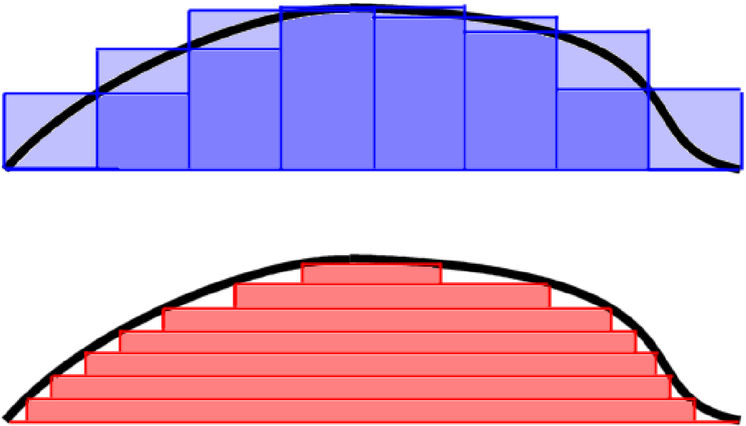
$$F(x) = \int_0^x f(t)dt$$



Nechť je f spojitá na $\langle a, b\rangle$. Jestliže na $\langle a, b\rangle$ platí $F'(x) = f(t)$, potom

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Různé přístupy k měření obsahu



Určitý integrál-integrační metody

- **Per partes**

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

- **Substituce**
  - *Jestliže* $f \circ g, g'$ *jsou spojité na* $\langle a, b\rangle$

$$\int_a^b f\left(g(x)\right)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

  - *Jestliže* f *je spojitá na* $\langle a, b\rangle$, $x = g(t)$ *je monotónní funkce se spojitou derivací a oborem hodnot* $\langle a, b\rangle$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f[g(t)] \cdot g'(t)dt$$

- **Obsah rovinné oblasti**

$$P = \int_a^b f(x)dx.$$

- **Objem rotačního tělesa**

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

- **Délka rovinné křivky**

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

- **Délka krivky dané parametricky** $(x = f(t), y = \varphi(t))$

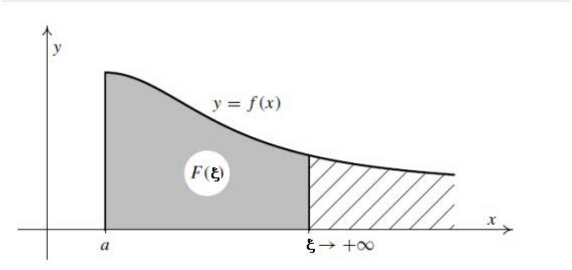
$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt.$$

Nevlastní integrál na neohraničeném intervalu

Buď f funkce definovaná na intervalu $\langle a, \infty)$. Nechť je f integrovatelná v intervalu $\langle a, t\rangle$ pro každé $t > a$. Nechť existuje vlastní limita

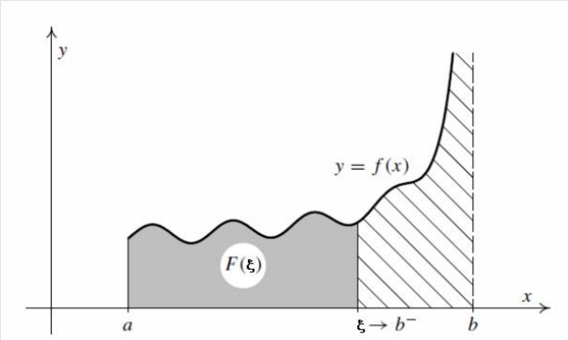
$$\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)dx.$$

Tuto limitu nazýváme **nevlastním integrálem** *a říkáme, že integrál $\int_a^\infty f(x)dx$* **konverguje**.



Integrál z neohraničené funkce

Buď f funkce definovaná na intervalu $\langle a, b)$ a v okolí bodu b je neohraničená. Nechť pro každé $t \in (a, b)$ existuje $\int\limits_a^t f(x)dx$ a nechť existuje limita $\lim\limits_{t \to b^-} \int\limits_a^t f(x)dx$. Pak tuto limitu nazýváme **nevlastním integrálem** *v intervalu $\langle a, b)$ a v případě, že limita je vlastní, říkáme, že integrál* **konverguje**.



Obecná definice nevlastního integrálu