Integrální počet

January 18, 2024

- $\mathcal{I}$ interval v R, $f : \mathcal{I} \to R$. Funkci F nazveme **primitivní** k funkci f v intervalu $\mathcal{I}$, ak $\forall x \in \mathcal{I}$ je
$$F'(x) = f(x).$$
- Je-li F primitivní k nějaké funkci f na intervalu $\mathcal{I}$, pak je F spojitá funkce na $\mathcal{I}$.
- Je-li F primitivní k nějaké funkci f na intervalu $\mathcal{I}$, pak $\{F + c; c \in R\}$ je množina všech primitivních funkcí k funkci f.

Integrační metody

- **Integrace per partes**

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

$\left[(uv)' = u'v + uv'\right]$

- **Metoda substituce**
  - Jestliže $f \circ g, g'$ jsou definovány na intervalu $\mathcal{I}$ a $\int f(t)dt = F(t) + c$ potom

$$\int f\left(g(x)\right) g'(x)dx = F\left(g(x)\right) + c,$$

  - jestliže navíc existuje g^{-1} a $\int f\left(g(t)\right) g'(t)dt = G(t) + c$, potom

$$\int f(x)dx = G\left(g^{-1}(x)\right) + c.$$

- **Integrace racionálních lomených funkcí**

Neurčitý integrál-integrační metody, pokračování

- **Integrace některých iracionálních funkcí**
  - $\int R\left(x, x^{\frac{1}{k_1}}, x^{\frac{1}{k_2}}, \cdots, x^{\frac{1}{k_n}}\right) dx;\ k_1, k_2, \cdots, k_n \in N$
  - *substituce:* $x = t^k; k$ *nejmenší sp. násobek* k_i
  - $\int R\left(x, \left(\frac{1ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_1}}, \left(\frac{1ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_2}}, \cdots, \left(\frac{1ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k_n}}\right) dx;$ $k_1, k_2, \cdots, k_n \in N$
  - *substituce:* $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}}; k$ *nejmenší sp. násobek* k_i
  - $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$
  - *substituce:*
    - *ak* $a > 0 \Rightarrow t = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm x\sqrt{a}$
    - *ak* $c \geq 0 \Rightarrow tx = \sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{c}$

- **Integrace trigonometrických funkcí**
  - $\int R(\sin x, \cos x)dx$
  - *substituce:* $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$
  - *Je-li* $R(\sin x, \cos x)$ *lichá v sinu (resp. kosinu)*
  - *substituce:* $t = \cos x$
  - *Je-li* $R(\sin x, \cos x)$ *sudá v sinu i v kosinu (současně)*
  - *substituce:* $t = \operatorname{tg} x$