Diferenciálny počet

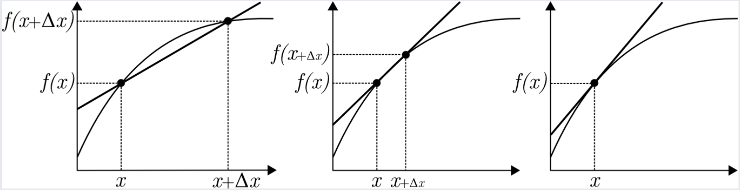
January 18, 2024

- *Nech pre funkciu f definovanú na nejakom okolí bodu x_0 existuje vlastná limita*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Potom túto limitu nazývame **deriváciou** *funkcie f v bode x_0.*

- *Ak má funkcia deriváciu v bode, hovoríme, že je v ňom* **diferencovateľná**.



Jednostranné derivácie v bode

- *Ak je funkcia f definovaná na $\mathcal{U}(x_0) \cap \langle x_0, \infty)$ resp. $\mathcal{U}(x_0) \cap (-\infty, x_0\rangle)$ a ak existujú jednostranné limity*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

resp.

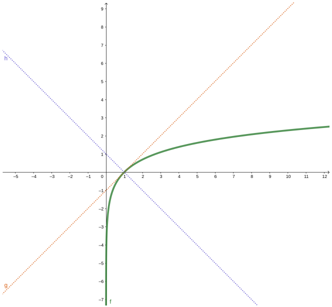
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

tak $f'_+(x_0)$ nazývame **deriváciou sprava** *a $f'_-(x_0)$ nazývame* **deriváciou zľava**.

Dotyčnice a normály

(Rovnica dotyčnice a normály ku grafu funkcie v f v bode)

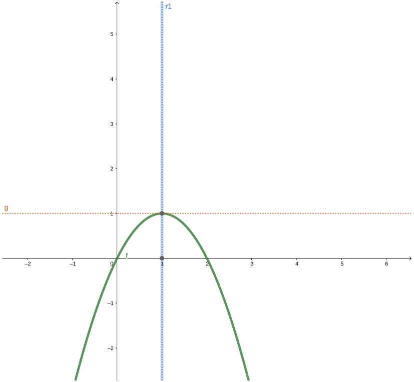
- **ak existuje vlastná nenulová derivácia** $f'(x_0)$
  - *dotyčnica* $\quad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
  - *normála* $\quad y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$



Dotyčnice a normály

(Rovnica dotyčnice a normály ku grafu funkcie v f v bode)

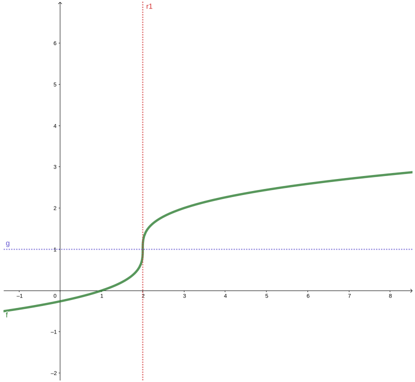
- **Ak je** $f'(x_0) = 0$
  - *vodorovná dotyčnica* $y = f(x_0)$
  - *zvislá normála* $x = x_0$



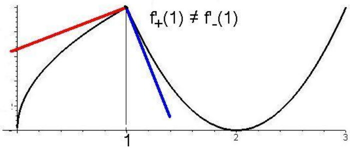
Dotyčnice a normály

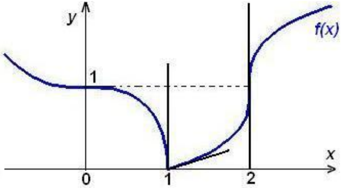
(Rovnica dotyčnice a normály ku grafu funkcie v f v bode)

- **Ak je $f'(x_0)$ nevlastná**
  - *zvislá dotyčnica* $x = x_0$
  - *vodorovná normála* $y = f(x_0)$



Keď $f'_+(x) \neq f'_-(x)$, polodotyčnice

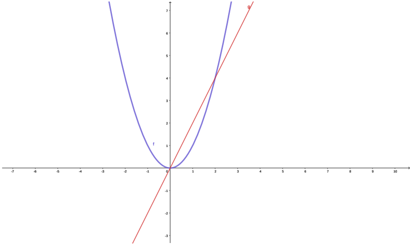


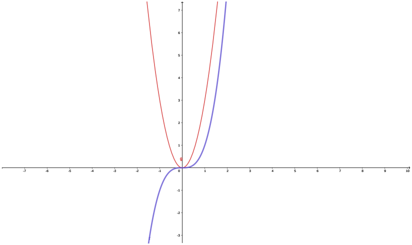


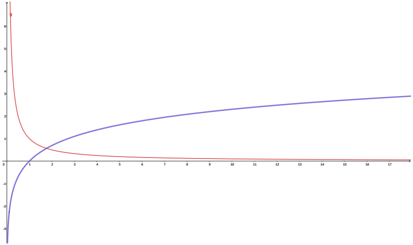
Derivácia na intervale

- *Nech pre funkciu* f *definovanú na intervale* (a, b) *existuje derivácia* $f'(x)$ *v každom bode* $x \in (a, b)$. *Potom je na intervale* (a, b) *definovaná funkcia* $f' : x \to f'(x)$, *ktorú nazývame* **deriváciou** *funkcie* f.

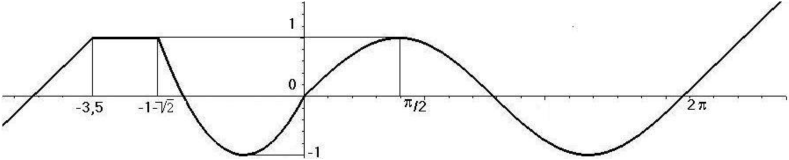
Derivácia na intervale



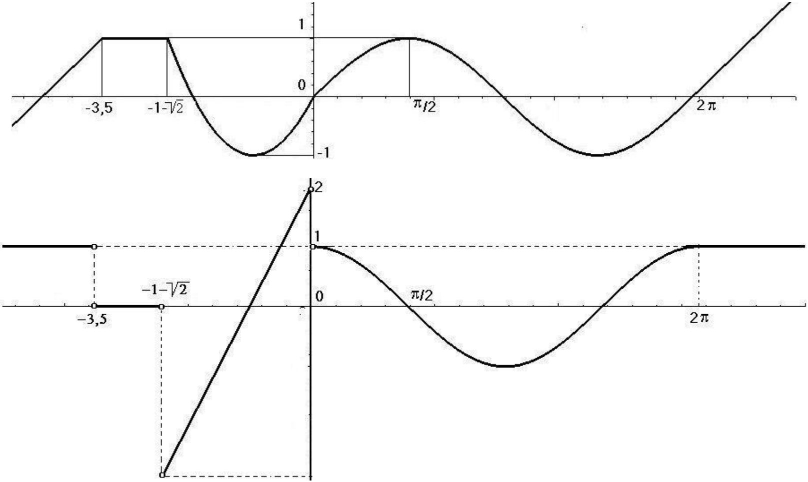




Derivácia na intervale



Derivácia na intervale



Derivácie niektorých elementárnych funkcií

- $(c)' = 0$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Derivácie niektorých elementárnych funkcií

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

Pravidlá derivovania

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{(f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{1}{g(x)^2} \cdot (f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x))$

Derivácia inverznej a zloženej funkcie

- *Nech f a g sú navzájom inverzné funkcie. Potom*

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(f(x_0))}.$$

- *Pre zloženú funkciu $f \circ g$ platí*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Numerické derivovanie

Funkciu poznáme, ale analytické určenie derivácie je náročné. Metóda vychádza z definície derivácie:

$$f'(x) \doteq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ďalšie možnosti num. derivovania budú až pri interpoláciách.

Numerické derivovanie

Príklad (prvá derivácia, varovný príklad)

Aproximujeme deriváciu funkcie $f(x) = e^x$ *v bode* 0.

h	$f'(0)$
10^0	$1,7182817$
10^{-1}	$1,0517097$
10^{-2}	$1,0050178$
10^{-3}	$1,0005237$
10^{-4}	$1,0001661$
10^{-5}	$1,0013582$
10^{-6}	$1,9536744$
10^{-7}	$1,1920930$

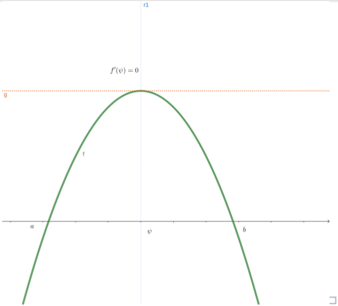
Vety o prírastku

Veta (Fermatova veta)

Ak

- f *je spojitá na* $\langle a, b\rangle$,
- *v bode* $\psi \in (a, b)$ *nadobúda svoju najväčšiu (alebo najmenšiu) hodnotu,*
- *existuje* $f'(\psi)$,

potom $f'(\psi) = 0$.



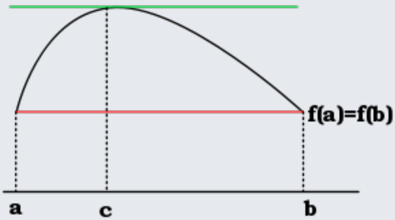
Vety o prírastku

Veta (Rolleova veta)

Ak

- *je* f *spojitá na* $\langle a, b \rangle$,
- *je* f *diferencovateľná na* (a, b),
- *platí* $f(a) = f(b)$,

potom existuje bod $\psi \in (a, b)$ *tak, že* $f'(\psi) = 0$.



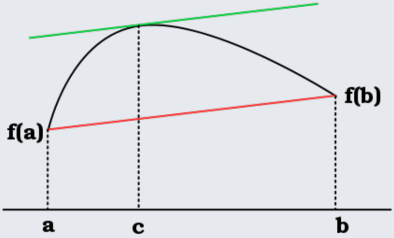
Vety o prírastku

Veta (Lagrangeova veta)

Ak

- *je* f *spojitá na* $\langle a, b\rangle$,
- *je* f *diferencovateľná na* (a, b),

potom existuje bod $\psi \in (a, b)$ *tak, že* $f'(\psi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Vety o prírastku

Veta (Cauchyho veta)

Nech $f(x), g(x)$ *majú nasledujúce vlastnosti:*

- f, g *sú spojité na* $\langle a, b\rangle$,
- f, g *sú diferencovateľné na* (a, b),
- *pro všetky* $x \in (a, b)$, *je* $g'(x) \neq 0$.

Potom existuje bod $\psi \in (a, b)$ *tak, že* $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\psi)}{g'(\psi)}$.

Limita podielu: typy $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Veta (Prvé L'Hospitalovo pravidlo)

- *Nech funkcie $f(x), g(x)$ sú diferencovateľné na nejakom okolí bodu c.*
- *Nech* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0.$
- *Nech existuje* $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(vlastná alebo nevlastná.)*

Potom existuje aj $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a je* $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

Podobná veta platí aj pre $\lim\limits_{x\to c^-}$ a pre $\lim\limits_{x\to c^+}$.

V prípade $c = \pm\infty$ použijeme substitúciu $t = \frac{1}{x}$.

Veta (Druhé L'Hospitalovo pravidlo)

- *Nech funkcie $f(x), g(x)$ sú diferencovateľné na nejakom okolí bodu c.*
- *Nech* $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = \infty, \lim\limits_{x\to c} |g(x)| = \infty.$
- *Nech existuje* $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(vlastná alebo nevlastná.)*

Potom existuje aj $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a je* $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$

Podobná veta platí aj pre $\lim\limits_{x\to c^-}$ a pre $\lim\limits_{x\to c^+}$.

Derivácie vyšších rádov

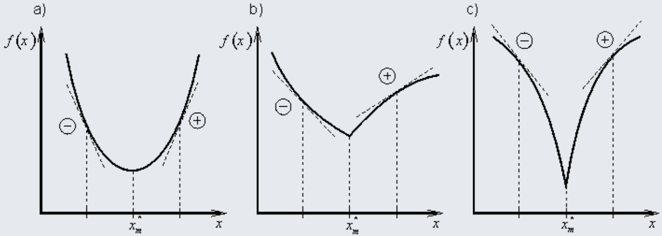
- Ak je f' deriváciou funkcie f na otvorenom intervale a f' má na tomto intervale deriváciu. Potom túto deriváciu nazývame **deriváciou druhého rádu,** alebo tiež **druhou deriváciou** funkcie f a zapisujeme f''.
- Rekurzívne definujeme **deriváciu** $n-$**tého rádu**, alebo tiež $n-$**tou deriváciu** ako

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right).$$

Lokálne extrémy

Definícia. *Funkcia* f *má v bode* x_0 **lokálne maximum (minimum)** *ak existuje okolie* $\mathcal{U}(x_0) \subset D_f$ *také, že*

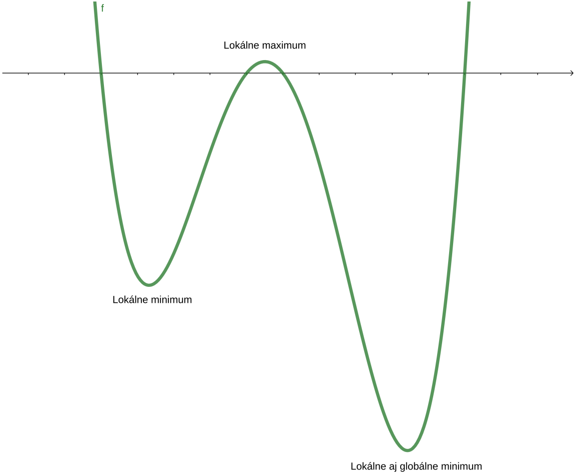
$$x \in \mathcal{U}(x_0) \Rightarrow f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0)).$$



Lokálne extrémy

- **Nutná podmienka.** *Ak f má v x_0 extrém, tak $f'(x_0) = 0$ alebo $f'(x_0)$ neexistuje.*
- **Definícia.** *Bod x_0, v ktorom je $f'(x_0) = 0$ sa nazýva* **stacionárny bod.**
- **Postačujúca podmienka.** *Nech má funkcia f druhú deriváciu v stacionárnom bode. Ak je $f''(x_0) > 0$, nastáva v bode x_0 lok. minimum, ak je $f''(x_0) < 0$, nastáva v bode x_0 lok. maximum.*

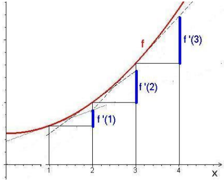
Globálne extrémy



Globálne extrémy sú najväčšie a najmenšie hodnoty funkcie na danej množine.

Konvexnosť a konkávnosť

- f *je* **konvexná (konkávna)** *na* M*, ak má túto vlastnosť: Nech* $x_1, x, x_2 \in M$ *a* $x_1 < x < x_2$*, potom* $P = [x, f(x)]$ *leží pod (nad) priamkou* P_1P_2*, kde* $P_i = [x_i, f(x_i)]$*.*
- *Nech* f *je spojitá na* M*, diferencovateľná na* M_0 *potom:*
  - f *je konvexná na* M $\iff$ f' *rastie na* M_0
  - f *je konkávná na* M $\iff$ f' *klesá na* M_0
- *Nech* f *je dvakrát diferencovateľná na* M*. Potom* f *je konvexná (konkávna)* $\iff$ $f''(x) \geq 0 (f''(x) \leq 0)$ *na* M_0 *a nie je* $f''(x) = 0$ *na žiadom podintervale intervalu* M*.*

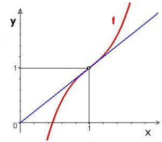


Inflexný bod

- **inflexný bod** *funkcie f- f je diferencovateľná v bode x_0 a existuje $\varepsilon > 0$ okolie tak, že na intervale $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ je funkcia konkávna a na intervale $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ je funkcia konvexná (alebo naopak).*
- **Nutná podmienka.** *x_0 je inflexný bod $\Rightarrow f''(x_0) = 0$ alebo $f''(x_0)$ neexistuje.*
- **Postačujúca podmienka.** *Nech*

$$f^{(k)} = 0 \quad \forall k = 2, 3, \cdots n - 1, f^{(n)} \neq 0.$$

Ak je n nepárne (liché), potom x_0 je inflexný bod, ak je n párne (sudé), potom x_0 nie je inflexný bod.



Priebeh funkcie

Ako postupujeme?

- Nájdeme definičný obor funkcie,
- zistíme vlastnosti: parita, periodicita,
- nájdeme významné body– napr. nulové body funkcie, body nespojitosti,
- vypočítame rovnice asymptôt grafu funkcie,
- určíme intervaly monotónnosti funkcie a jej lokálne extrémy,
- určíme intervaly, kde je funkcia konvexná, konkávna a jej inflexné body,
- spokojne načrtneme graf funkcie.