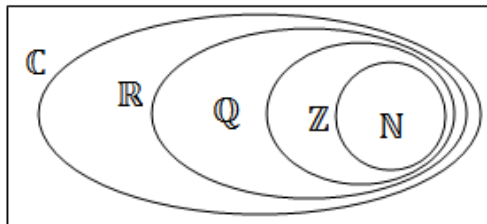


Množiny, Funkcie

January 18, 2024

Číselné množiny

- \mathbb{N} – *Prirodzené čísla,*
- \mathbb{Z} – *Celé čísla,*
- \mathbb{Q} – *Racionálne čísla,*
- \mathbb{R} – *Reálne čísla,*
- \mathbb{C} – *Komplexné čísla.*



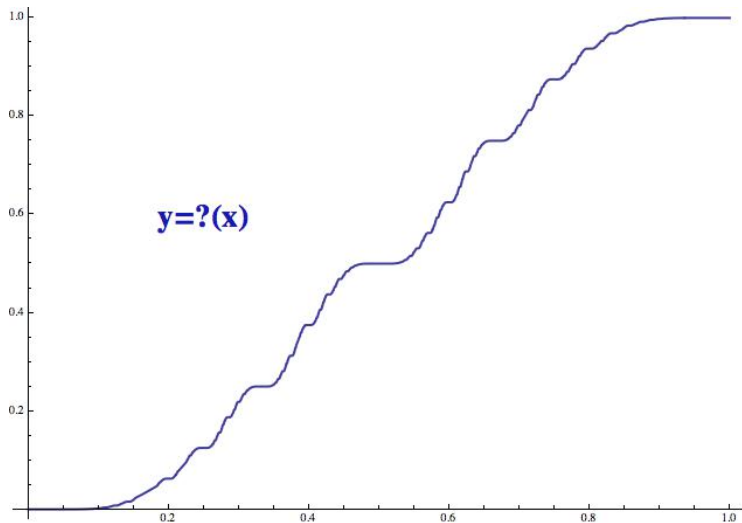
Intervaly

- **uzavretý interval** $\langle a, b \rangle = \{x; a \leq x \leq b\}$
- **otvorený interval** $(a, b) = \{x; a < x < b\}$
- **zľava otvorený a sprava uzavretý interval**
 $(a, b] = \{x; a < x \leq b\}$
- **sprava otvorený a zľava uzavretý interval**
 $[\langle a, b) = \{x; a \leq x < b\}$

Pozor, $a < b$!

Nevlastné body reálnej osi: $-\infty, \infty$

Funkcie



Definícia

- *Nech $f \subseteq A \times B$ je binárna relácia. Túto reláciu f nazývame **zobrazením** z množiny A do množiny B vtedy, keď o nej platí:*

$$[a, b] \in f \wedge [a, c] \in f \Rightarrow b = c.$$

Definícia

- *Nech $f \subseteq A \times B$ je binárna relácia. Túto reláciu f nazývame **zobrazením** z množiny A do množiny B vtedy, keď o nej platí:*

$$[a, b] \in f \wedge [a, c] \in f \Rightarrow b = c.$$

- **Obraz množiny:**

$$f(M) = \{b; \exists a \in M \ f(a) = b\}.$$

Definícia

- *Nech $f \subseteq A \times B$ je binárna relácia. Túto reláciu f nazývame **zobrazením** z množiny A do množiny B vtedy, keď o nej platí:*

$$[a, b] \in f \wedge [a, c] \in f \Rightarrow b = c.$$

- **Obraz množiny:**

$$f(M) = \{b; \exists a \in M \ f(a) = b\}.$$

- **Úplný vzor množiny:**

$$f^{-1}(P) = \{a; \exists b \in P \ f(a) = b\}.$$

Definícia

- **Definičný obor**

$$D_f = f^{-1}(B).$$

Definícia

- **Definičný obor**

$$D_f = f^{-1}(B).$$

- **Obor hodnôt**

$$H_f = f(D_f).$$

- rovnosť zobrazení

$$f = g \iff D_f = D_g \wedge \forall x \in D_f; f(x) = g(x).$$

- *rovnosť zobrazení*

$$f = g \iff D_f = D_g \wedge \forall x \in D_f; f(x) = g(x).$$

- *zúženie zobrazenia na množinu $A_1 \subseteq D_f$*

$$f/A_1 = \{[x, y] \in f; x \in A_1\}.$$

- *súčet*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x); D_{f+g} = D_f \cap D_g,$$

- *súčet*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x); D_{f+g} = D_f \cap D_g,$$

- *rozdiel*

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x); D_{f-g} = D_f \cap D_g,$$

- *súčet*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x); D_{f+g} = D_f \cap D_g,$$

- *rozdiel*

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x); D_{f-g} = D_f \cap D_g,$$

- *súčin*

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x); D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g,$$

- *súčet*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x); D_{f+g} = D_f \cap D_g,$$

- *rozdiel*

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x); D_{f-g} = D_f \cap D_g,$$

- *súčin*

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x); D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g,$$

- *podiel*

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g; g(x) \neq 0\},$$

- c -násobok

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x); D_{c \cdot f} = D_f,$$

- *c*-násobok

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x); D_{c \cdot f} = D_f,$$

- *skladanie*

$$f \circ g(x) = f(g(x)),$$

- *c*-násobok

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x); D_{c \cdot f} = D_f,$$

- *skladanie*

$$f \circ g(x) = f(g(x)),$$

- *inverzná relácia*

$$f^{-1} = \{[x, y]; [y, x] \in f\}.$$

- *c*-násobok

$$(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x); D_{c \cdot f} = D_f,$$

- *skladanie*

$$f \circ g(x) = f(g(x)),$$

- *inverzná relácia*

$$f^{-1} = \{[x, y]; [y, x] \in f\}.$$

V akom vzťahu je graf f a f^{-1} ? Je f^{-1} vždy funkcia?

Definícia

- Ak o zobrazení f platí

$$\forall a, b \in D(f); a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b),$$

hovoríme, že je **prosté**, alebo **injekcia**.

Definícia

- Ak o zobrazení f platí

$$\forall a, b \in D(f); a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b),$$

hovoríme, že je **prosté**, alebo **injekcia**.

- Nech $f : A \rightarrow B$. Ak platí, že $H(f) = B$ hovoríme, že f je zobrazenie **z množiny A na (surjekcia) množinu B** .

Definícia

- Ak o zobrazení f platí

$$\forall a, b \in D(f); a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b),$$

hovoríme, že je **prosté**, alebo **injekcia**.

- Nech $f : A \rightarrow B$. Ak platí, že $H(f) = B$ hovoríme, že f je zobrazenie z množiny A **na (surjekcia) množinu B** .
- Prosté zobrazenie množiny A **na množinu B nazývame vzájomne jednoznačným zobrazením A na B alebo bijekciou A na B** .

Definícia

- Ak o zobrazení f platí

$$\forall a, b \in D(f); a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b),$$

hovoríme, že je **prosté**, alebo **injekcia**.

- Nech $f : A \rightarrow B$. Ak platí, že $H(f) = B$ hovoríme, že f je zobrazenie z množiny A **na (surjekcia) množinu B** .
- **Prosté zobrazenie množiny A na množinu B nazývame vzájomne jednoznačným zobrazením A na B alebo bijekciou A na B .**
- Každé prosté zobrazenie je bijekciou svojho definičného oboru na svoj obor hodnôt.

- *ohraničenost*

- *Funkcia je ohraničená zhora, ak*

$$\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in D_f; f(x) \leq c.$$

- *Funkcia je ohraničená zdola, ak*

$$\exists d \in \mathbb{R} \forall x \in D_f; f(x) \geq d.$$

- *Funkcia je ohraničená, ak*

$$\exists c, d \in \mathbb{R} \forall x \in D_f; d \leq f(x) \leq c.$$

- *monotónnosť*

- *Funkcia je rastúca na M*

$$\forall x_1, x_2 \in M; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

- *Funkcia je klesajúca na M*

$$\forall x_1, x_2 \in M; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

- *Funkcia je neklesajúca na M*

$$\forall x_1, x_2 \in M; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

- *Funkcia je nerastúca na M*

$$\forall x_1, x_2 \in M; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

- *parita*

- *Funkcia je párna (sudá)*

$$\forall x \in D_f; f(-x) = f(x),$$

- *Funkcia je nepárna (lichá)*

$$\forall x \in D_f; f(-x) = -f(x).$$

Pozor, definičný obor musí byť symetrický, teda

$$x \in D_f \iff -x \in D_f.$$

- *periodicita*

$$\exists p \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall x \in D_f; f(x \pm p) = f(x).$$

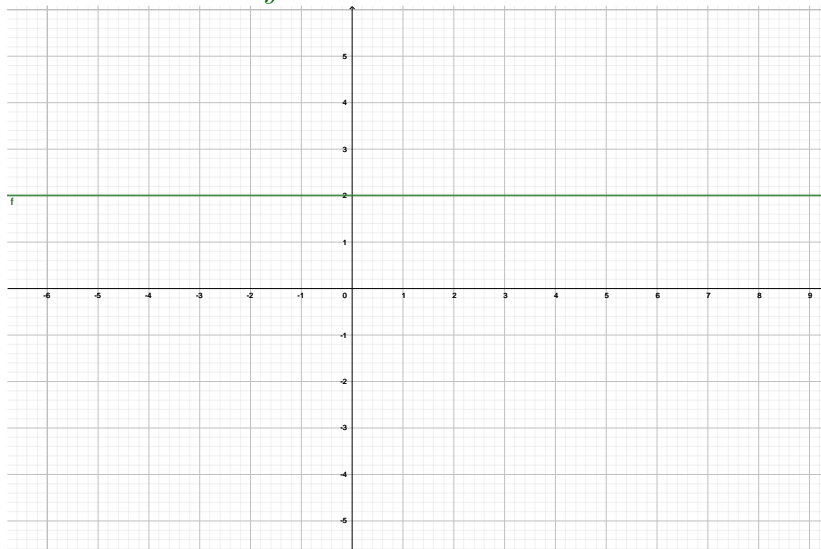
Elementárne funkcie

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \cdots + a_n \cdot x^n.$$

- konštantné funkcie, $n = 0$,
- lineárne funkcie, $n = 1$,
- kvadratické funkcie, $n = 2$,
- polynomické funkcie pre $n > 2$.

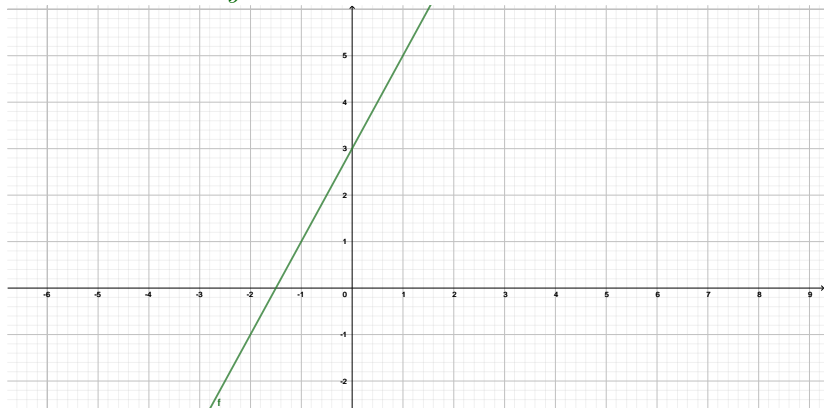
Polynomické funkcie

Konštantná funkcia: $y = 2$.



Polynomické funkcie

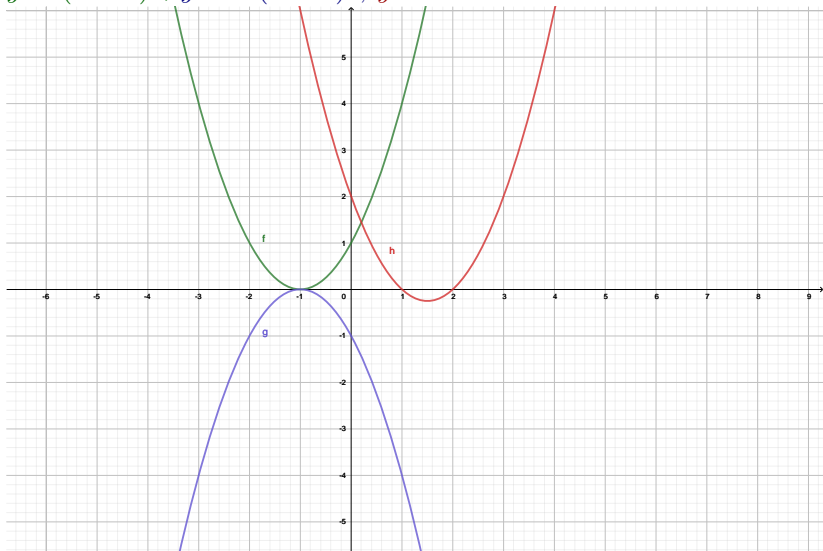
Lineárna funkcia: $y = 2x + 3$.



Polynomické funkcie

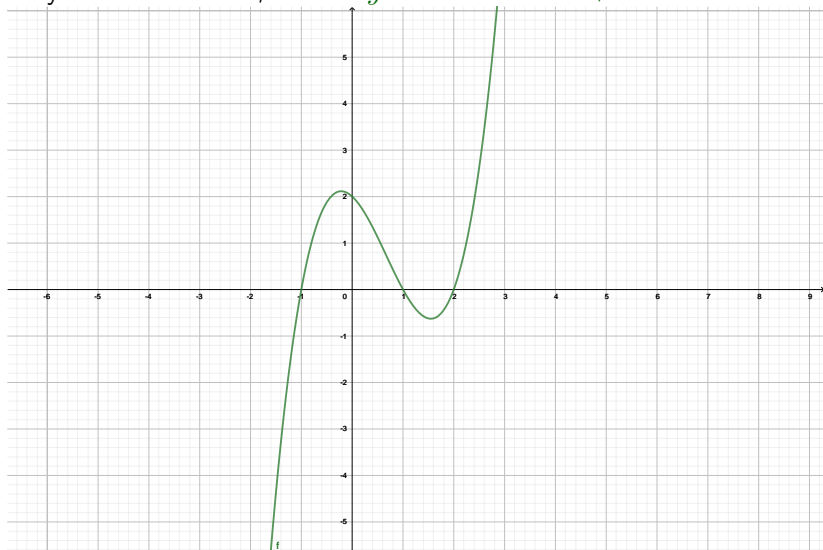
Kvadratická funkcia:

$$y = (x + 1)^2, \quad y = -(x + 1)^2, \quad y = x^2 - 3x + 2.$$



Polynomické funkcie

Polynomická funkcia, $n = 3$: $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

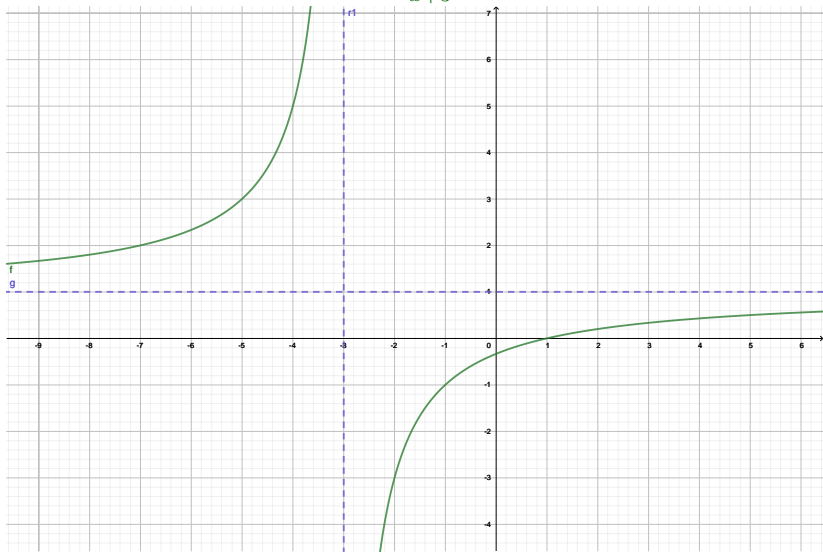


$$y = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

P_m – polynóm stupňa m , Q_n – polynóm stupňa n .

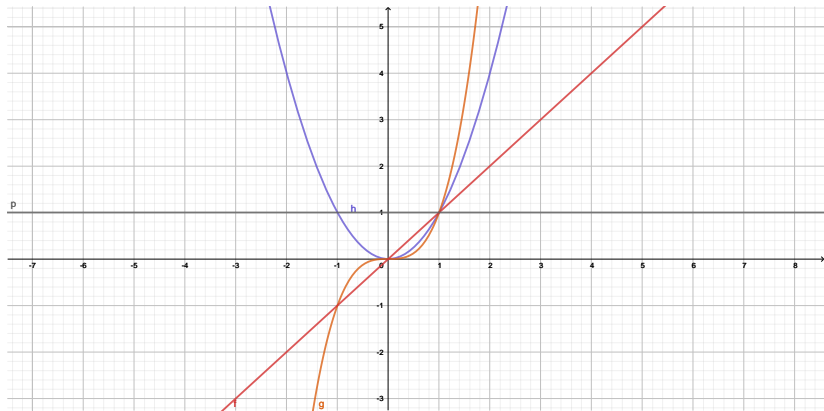
Racionálne lomené funkcie

Racionálna lomená funkcia: $y = \frac{x-1}{x+3}$.



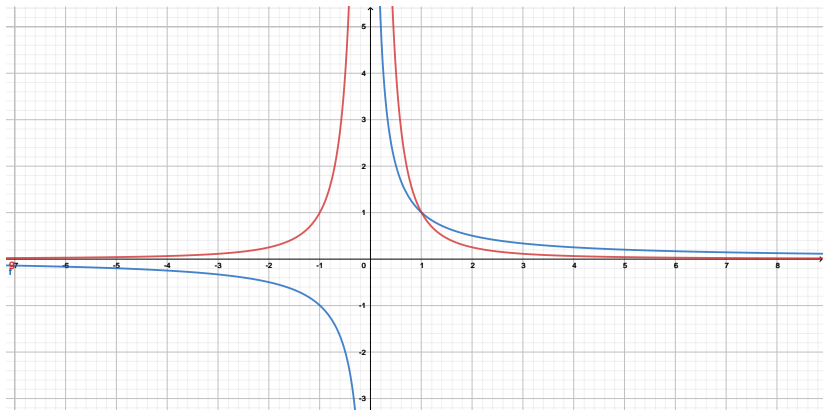
Mocninné funkcie

$$y = x^a; a \in \{0, 1, 2, 3\}$$



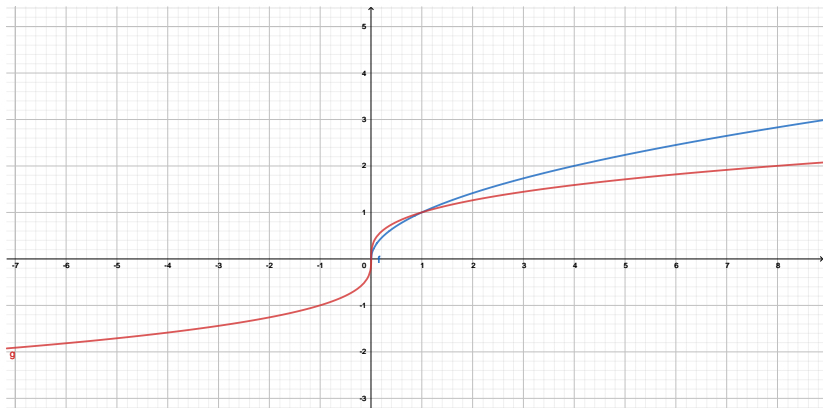
Mocninné funkcie

$$y = x^a; a \in \{-1, -2\}$$



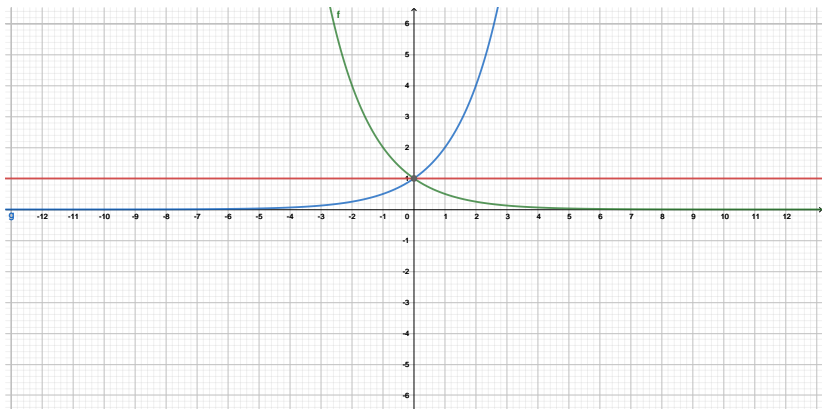
Mocnné funkcie

$$y = x^a; a \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\}$$



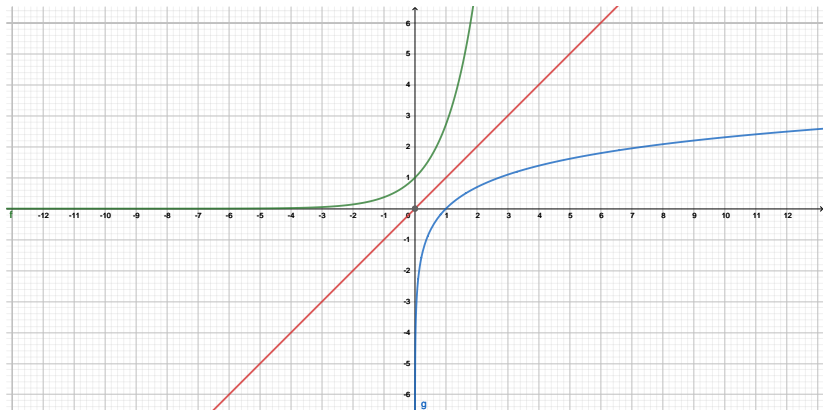
Exponenciálna funkcie

$$y = a^x, a > 0, a \in \left\{1, \frac{1}{2}, 2\right\}$$



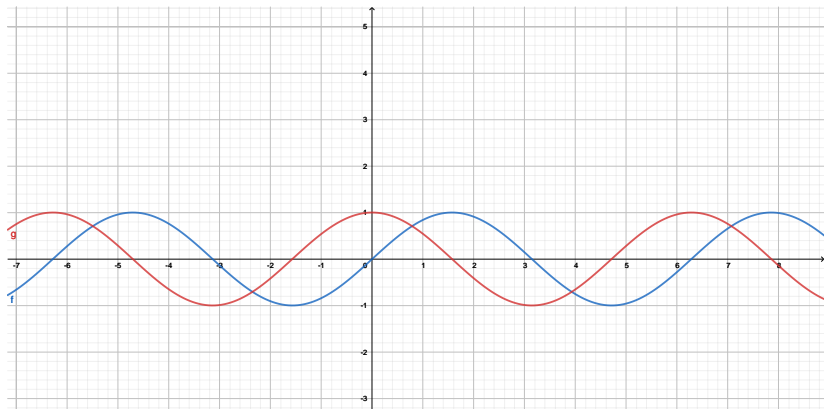
Logaritmické funkcie

$$y = \log_a x, 0 < a < 1 \vee a > 1, (a = e).$$



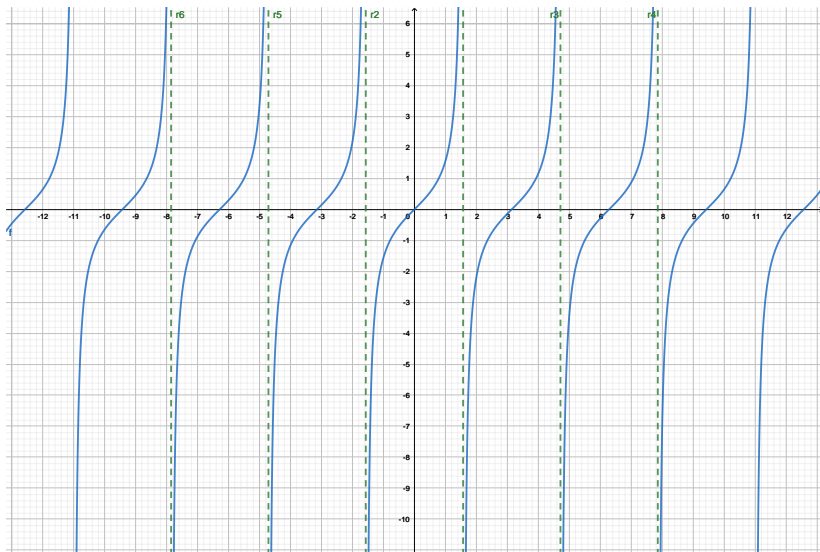
Goniometrické funkcie

$$y = \sin x, y = \cos x.$$



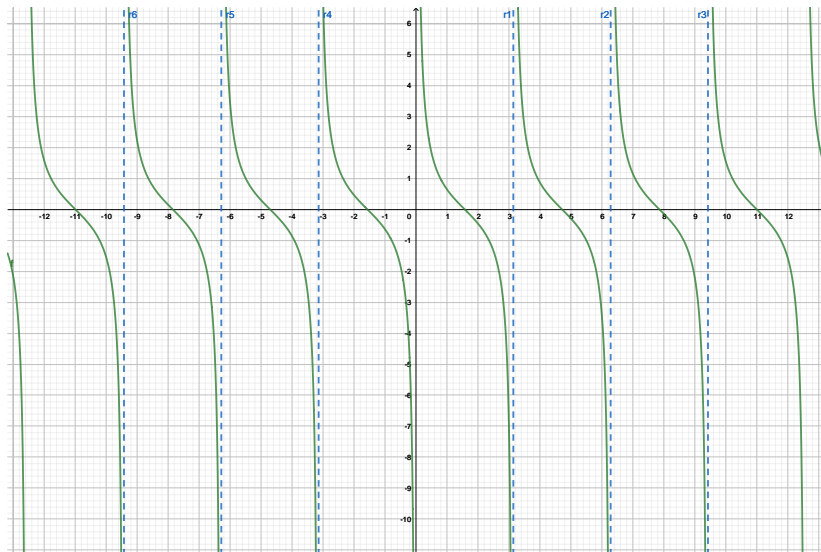
Goniometrické funkcie

$$y = \operatorname{tg} x.$$



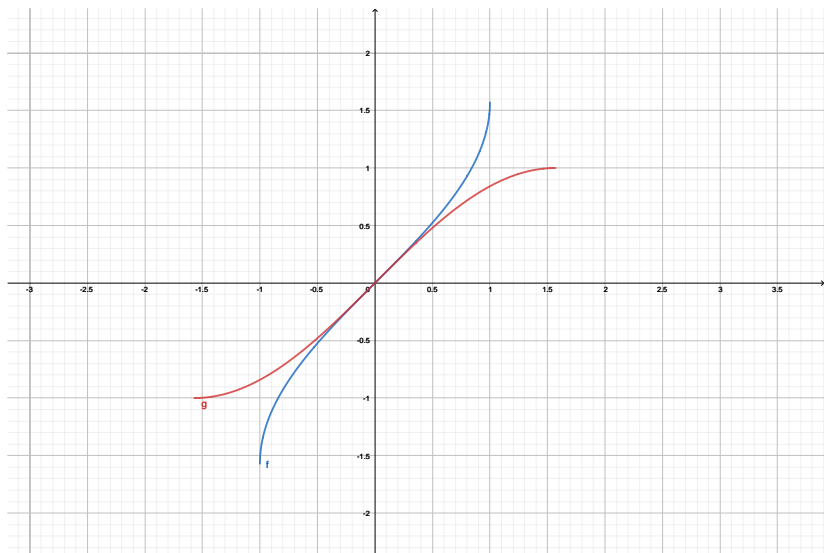
Goniometrické funkcie

$$y = \cot g x.$$



Cyklometrické funkcie

$$y = \sin x, y = \arcsin x.$$



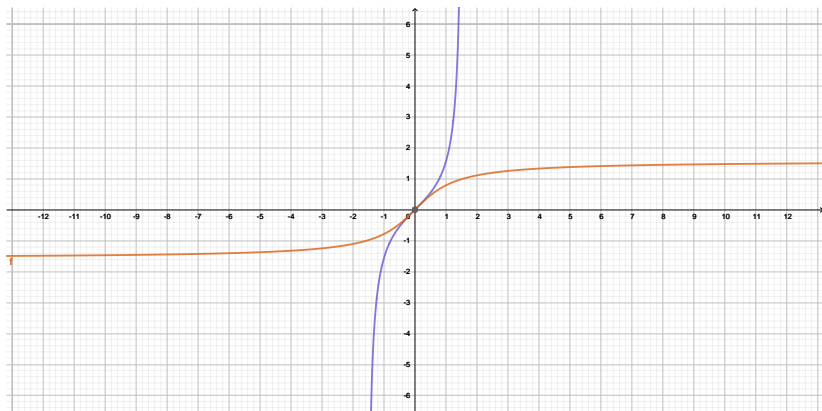
Cyklometrické funkcie

$$y = \cos x, y = \arccos x.$$



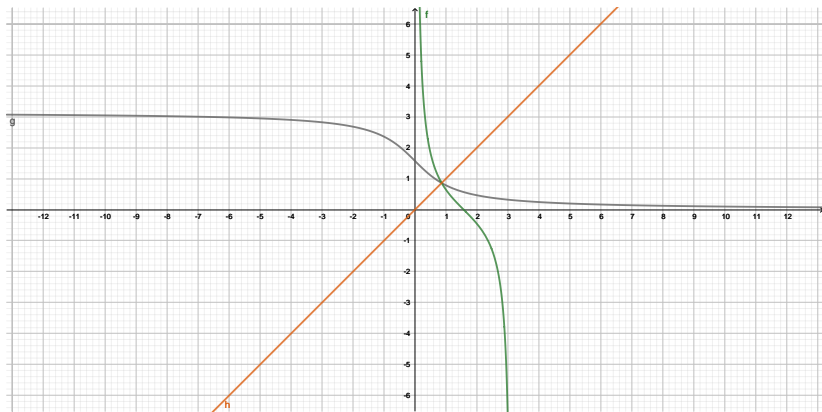
Cyklometrické funkcie

$$y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{arctg} x.$$



Cyklometrické funkcie

$$y = \cotg x, y = \operatorname{arccot} g x.$$



- **celá časť:** $[x] \leq x < [x] + 1$

- **celá časť:** $[x] \leq x < [x] + 1$
- **charakteristická funkcia množiny** M : $\chi(x) = \begin{cases} 0 & x \notin M \\ 1 & x \in M \end{cases}$

- **celá časť:** $[x] \leq x < [x] + 1$

- **charakteristická funkcia množiny** M : $\chi(x) = \begin{cases} 0 & x \notin M \\ 1 & x \in M \end{cases}$

- $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$