

## LOKÁLNE EXTRÉMY

1. Nájdite lokálne extrémym funkcie  $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - x)^2}$ .

### Riešenie.

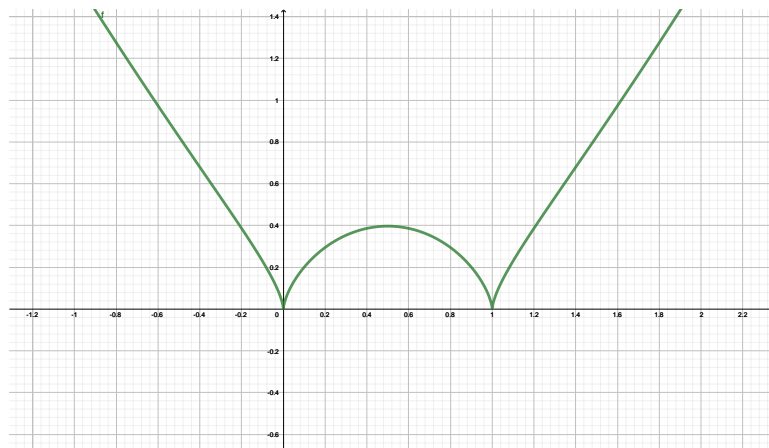
- Najskôr určíme definičný obor funkcie. Vzhľadom k tomu, že sa jedná o tretiu odmocninu, tak  $D_f = \mathbb{R}$ .
- Lokálne extrémym sú v bodoch, pre ktoré je  $f'(x) = 0$  alebo kde  $f'(x)$  neexistuje. Preto určíme prvú deriváciu funkcie  $f$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3} \cdot (x^2 - x)^{-\frac{1}{3}} \cdot (x^2 - x)' = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x^2 - x)^{\frac{1}{3}}} \cdot (2x - 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x \cdot (x - 1))^{\frac{1}{3}}} \cdot (2x - 1). \end{aligned}$$

- Zrejme  $f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$  a  $f'(x)$  neexistuje pre  $x \in \{0, 1\}$ .
- Tieto tri podozrivé body rozdelia číselnú os na štyri intervaly:  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{1}{2}, 1)$ ,  $(1, \infty)$ .
- Určíme znamienko prvej derivácie na jednotlivých intervaloch:
  - $f'(x) > 0$  pre  $x \in (0, \frac{1}{2})$  a pre  $x \in (1, \infty)$ .
  - $f'(x) < 0$  pre  $x \in (-\infty, 0)$  a pre  $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ .
- To znamená, že funkcia  $f$ :
  - rastie na intervale  $(0, \frac{1}{2})$  a  $(1, \infty)$ ,
  - klesá na intervale  $(-\infty, 0)$  a  $(\frac{1}{2}, 1)$ .
- Funkcia vľavo od bodu 0 klesá, napravo od bodu 0 rastie, preto je v bode 0 lokálne minimum, podobne zistíme, že v bode  $\frac{1}{2}$  je lokálne maximum a v bode 1 lokálne minimum.

Situáciu vidíme na obrázku. Všimnite si obe lokálne minimá a porovnajte s lokálnym maximom-v bodoch, v ktorých má funkcia lok. minimum derivácia neexistuje a v bode, kde je lok. maximum, je derivácia

rovná nule.

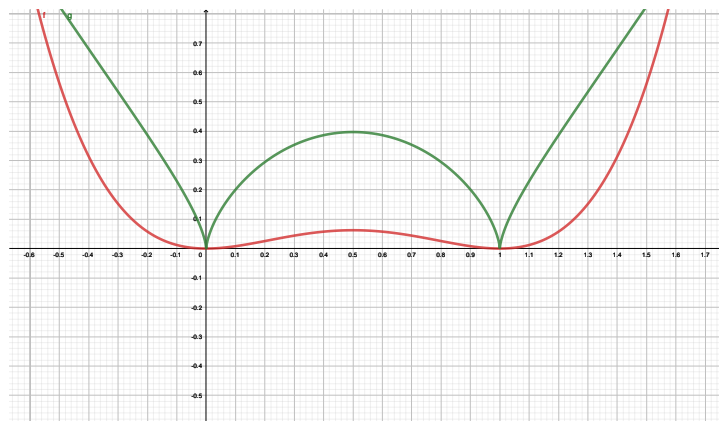


Teda lokálne minimá sú v bodoch  $x_1 = 0$  a  $x_2 = 1$ , ich hodnota je  $f(0) = f(1) = 0$ . Lokálne maximum je v bode  $x_3 = \frac{1}{2}$  a jeho hodnota je  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{4}$ .

**Pozor, dosadzujeme do pôvodnej funkcie  $f$ .**

**Vylepšenie riešenia-niečo pre lenivých študentov:**

Vzhľadom k tomu, že  $\sqrt[3]{x}$  je rastúca funkcia, tak funkcie  $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - x)^2}$  a  $g(x) = (x^2 - x)^2$  majú lokálne extrémny v tých istých bodoch. Situáciu vidíme na obrázku.



Funkcie  $f$  a  $g$  majú lokálne extrémny v tých istých bodoch, ale derivovať a následne aj upravovať funkciu  $g$  je jednoduchšie-v tom spočíva vylepšenie. *Prekonajte svoju lenivosť a vyskúšajte si to.*

2. Nájdite lokálne extrémny funkcie  $f(x) = \sqrt[3]{(2x+1) \cdot (x-4)^2}$ .

**Riešenie.**

- Najskôr určíme definičný obor funkcie. Vzhľadom k tomu, že sa jedná o tretiu odmocninu, tak  $D_f = \mathbb{R}$ .

- Lokálne extrémny sú v bodoch, pre ktoré je  $f'(x) = 0$  alebo kde  $f'(x)$  neexistuje. Preto určíme prvú deriváciu funkcie  $f$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} \cdot \left( (2x+1) \cdot (x-4)^2 \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left( (2x+1) \cdot (x-4)^2 \right)' = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left( (2x+1) \cdot (x-4)^2 \right)^{\frac{2}{3}}} \cdot \left( 2(x-4)^2 + (2x+1) \cdot 2(x-4) \right) = \\ &= \frac{2 \cdot (x-1)}{(2x+1)^{\frac{2}{3}} \cdot (x-4)^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$

- Zrejme  $f'(x) = 0 \iff x = 1$  a  $f'(x)$  neexistuje pre  $x \in \{-\frac{1}{2}, 4\}$ .

- Tieto tri podozrivé body rozdelia číselnú os na štyri intervaly:  $(-\infty, -\frac{1}{2})$ ,  $(-\frac{1}{2}, 1)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(4, \infty)$ .

- Určíme znamienko prvej derivácie na jednotlivých intervaloch:

- $f'(x) > 0$  pre  $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ , pre  $x \in (-\frac{1}{2}, 1)$  a pre  $x \in (4, \infty)$ .

- $f'(x) < 0$  pre  $x \in (1, 4)$ .

- To znamená, že funkcia  $f$ :

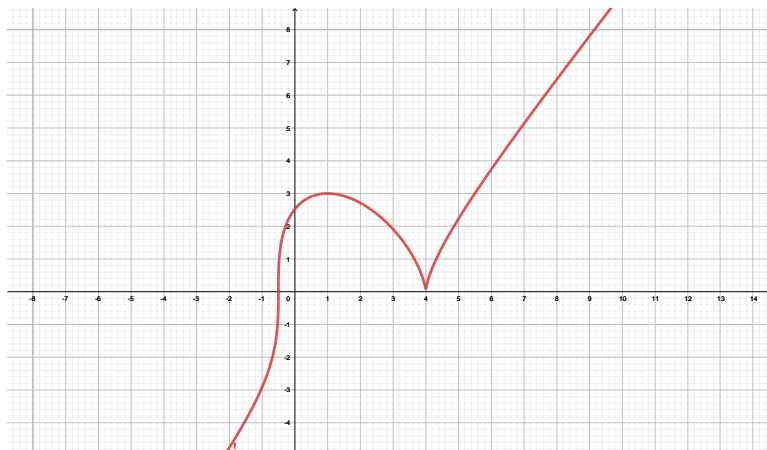
- rastie na intervale  $(-\infty, -\frac{1}{2})$ ,  $(-\frac{1}{2}, 1)$  a  $(4, \infty)$ .

- klesá na intervale  $(1, 4)$ .

- Funkcia vľavo od bodu 4 klesá, napravo od bodu 4 rastie, preto je v bode 4 lokálne minimum, podobne zistíme, že v bode 1 je lokálne maximum a v bode  $-\frac{1}{2}$  nie je ani lokálne minimum, ani lok. maximum (funkcia vpravo, aj vľavo od  $-\frac{1}{2}$  rastie).

Situáciu vidíme na obrázku. Všimnite si lokálne minimum a porovnajte s lokálnym maximom-v bode, v ktorom má funkcia lok. minimum derivácia neexistuje a v bode, kde je lok. maximum, je derivácia rovná nule. A všimnite si funkciu v bode  $-\frac{1}{2}$ , tam derivácia tiež neexistuje a

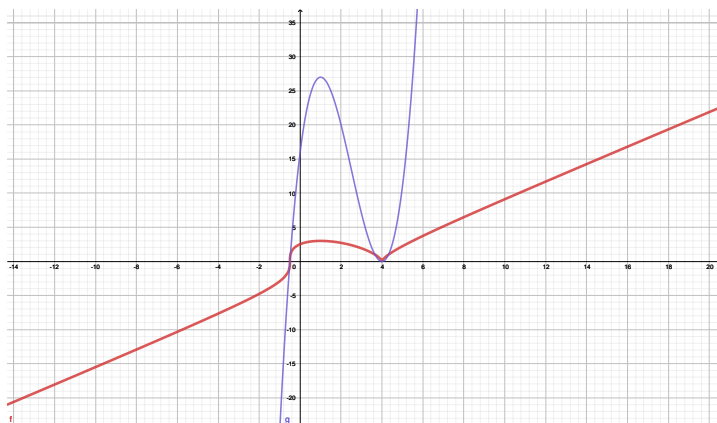
nie je v ňom ani extrém.



Teda lokálne minimum je v bode  $x_1 = 4$  a jeho hodnota je  $f(4) = 0$ . Lokálne maximum je v bode  $x_2 = 1$  a jeho hodnota je  $f(1) = 3$ .

**Vylepšenie riešenia-niečo pre lenivých študentov:**

Vzhľadom k tomu, že  $\sqrt[3]{x}$  je rastúca funkcia, tak funkcie  $f(x) = \sqrt[3]{(2x+1) \cdot (x-4)^2}$  a  $g(x) = (2x+1) \cdot (x-4)^2$  majú lokálne extrém v tých istých bodoch. Situáciu vidíme na obrázku.



Funkcie  $f$  a  $g$  majú lokálne extrém v tých istých bodoch, ale derivovať a následne aj upravovať funkciu  $g$  je určite jednoduchšie-v tom spočíva vylepšenie.

## LOKÁLNE EXTRÉMY-ÚLOHY NA PRECVIČENIE

Nájdite lokálne extrémym funkcií:

(a)  $f_1(x) = \sqrt[3]{(3x+1) \cdot (x+2)^2}$ ,  
[lok.max. v bode  $-2$ , lok. min. v bode  $-\frac{8}{9}$ ]

(b)  $f_2(x) = \sqrt{|6x - x^2|}$ ,  
[lok.max. v bode  $3$ , lok. min. v bodoch  $0$  a  $6$ ]

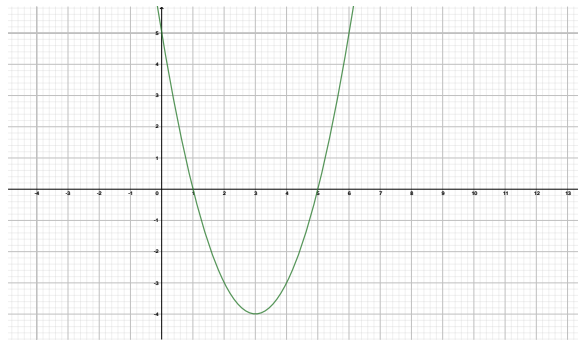
(c)  $f_3(x) = \ln \frac{x^2+4x+2}{x+2}$ ,  
[bez lok. extrémym]

(d)  $f_4(x) = x^3 - 2|x|$ .  
[lok.max. v bode  $0$ , lok. min. v bode  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ]

## GLOBALNE EXTRÉMY

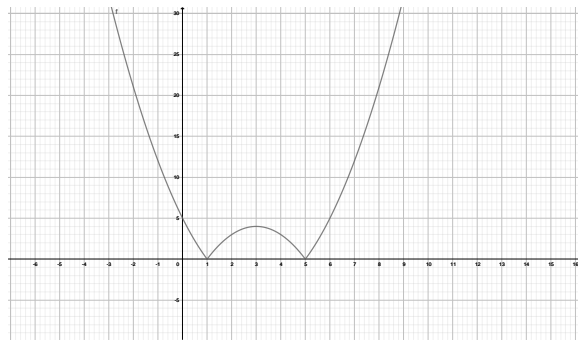
3. Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie  $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$  na intervale  $\langle -5, 5 \rangle$ .

**Riešenie.** Zrejme  $f(x) = |x^2 - 6x + 5| = |(x - 5)(x - 1)|$ . Úlohu vyriešime graficky, najskôr nakreslíme graf funkcie  $g(x) = x^2 - 6x + 5 = (x - 5)(x - 1)$ :



Vrchol tejto paraboly je v bode  $x = 3$ .

Teraz si nakreslíme graf funkcie  $f(x) = |g(x)|$ :



Úlohu vyriešime bez toho, aby sme museli funkciu derivovať. Zrejme body, v ktorých by funkcia  $f$  mohla nadobudnúť najväčšiu a najmenšiu hodnotu sú krajné body intervalu, teda  $-5$  a  $5$  a potom body, v ktorých je derivácia nulová, alebo neexistuje. Z priebehu funkcie je zrejmé, že derivácia neexistuje v bodoch  $1$  a  $5$ . Derivácia je nulová v bode  $3$ . Teraz stačí porovnať funkčné hodnoty v týchto bodoch a vybrať najväčšiu a najmenšiu hodnotu. Najmenšia hodnota je  $0$  a funkcia ju nadobúda v bodoch  $1$  a  $5$ , najväčšiu hodnotu nadobúda v bode  $-5$  a je to hodnota  $60$ .

4. Nájďte najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$  na intervale  $\langle -2, 1 \rangle$ .

**Riešenie.**

Funkcia môže najväčšiu a najmenšiu hodnotu nadobudnúť v krajných bodoch intervalu, ďalej v bodoch, v ktorých má deriváciu rovnú nule, alebo v nich derivácia neexistuje a zároveň o nich platí, že patria do daného intervalu. Preto funkciu najskôr zderivujeme a dostaneme:

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x - 3)(x - 1).$$

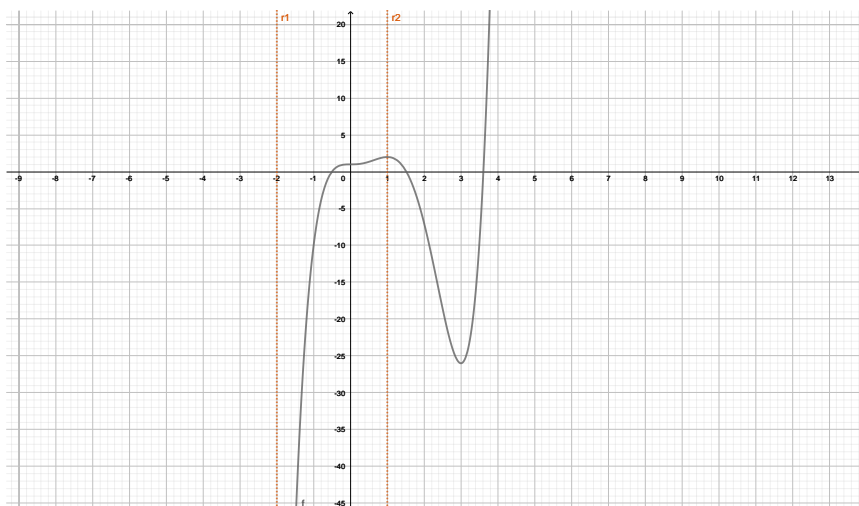
Derivácia existuje pre každé  $x \in \mathbb{R}$ . Teda "podozrivé" body sú

- krajné body intervalu:  $-2, 1$ ,
- body, kde je prvá derivácia nulová:  $0, 1, 3$ .

Zrejme  $3 \notin \langle -2, 2 \rangle$ , preto sa ním ďalej nebudeme zaoberať a svoju pozornosť sústredíme len na body  $-2, 0, 1$ . V týchto bodoch určíme funkčné hodnoty a vyberieme najväčšiu a najmenšiu z nich.

$$f(-2) = -151, f(0) = 1, f(1) = 2.$$

Takže funkcia  $f$  nadobúda najmenšiu hodnotu v bode  $x = -2$  a je to hodnota  $-151$  a najväčšiu hodnotu v bode  $x = 1$  a je to hodnota  $2$ . Situáciu si môžeme aj graficky znázorniť.



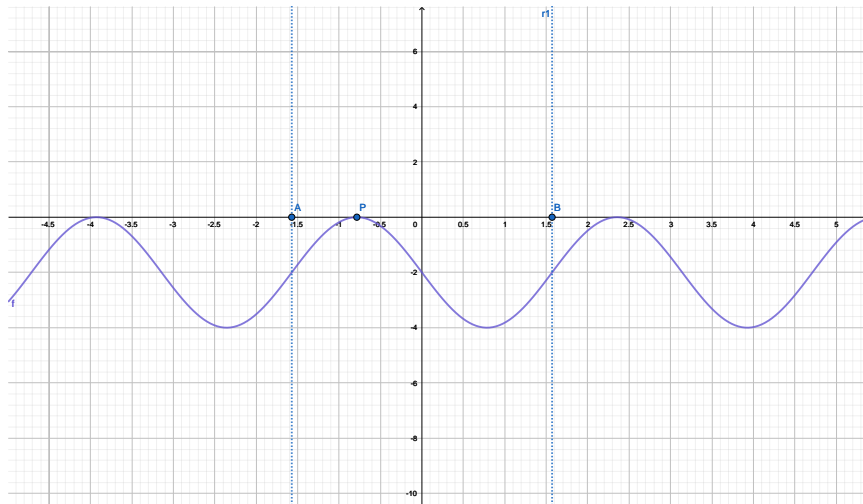
5. Nájďte najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie  $f(x) = \cos 2x - 2x$  na intervale  $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ .

**Riešenie.**

Funkcia môže najväčšiu a najmenšiu hodnotu nadobudnúť v krajných bodoch intervalu, ďalej v bodoch, v ktorých má deriváciu rovnú nule, alebo v nich derivácia neexistuje a zároveň o nich platí, že patria do daného intervalu. Preto funkciu najskôr zderivujeme a dostaneme:

$$f'(x) = -2 \sin(2x) - 2 = -2(\sin(2x) + 1).$$

Derivácia existuje pre každé  $x \in \mathbb{R}$ . Graf prvej derivácie na danom intervale je takýto.



Zrejme  $f'(x) = 0 \iff x = -\frac{\pi}{4}$ . Bod, v ktorom je  $f'(x) = 0$  vieme určiť aj výpočtom.

$$f'(x) = -2(\sin(2x) + 1) \text{ a } f'(x) = 0 \iff \sin(2x) = -1.$$

Zrejme  $\sin 2x = -1 \iff 2x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ .

Potom  $x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ .

Vzhľadom k tomu, že úlohu riešime len na intervale  $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ , máme jediné riešenie:

$$f'(x) = 0 \iff x = -\frac{\pi}{4}.$$

Teda "podozrivé" body sú:

- krajné body intervalu:  $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ ,
- bod, kde je prvá derivácia nulová:  $-\frac{\pi}{4}$ .

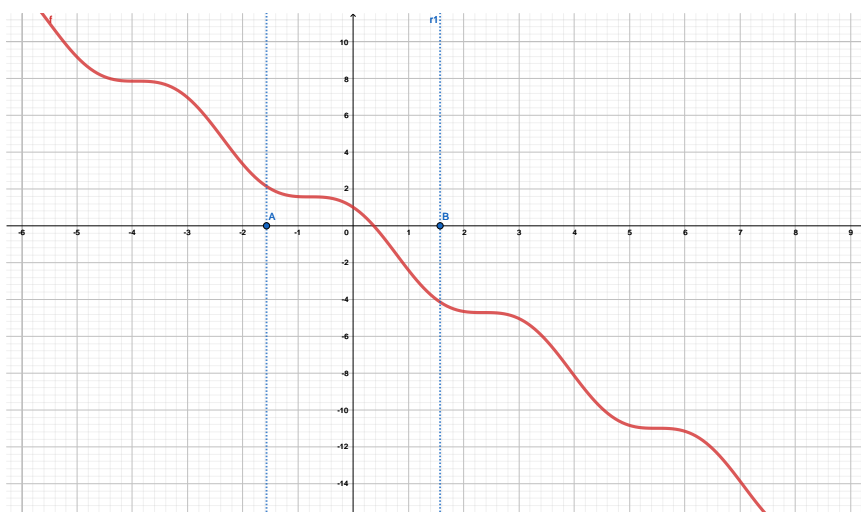


V týchto bodoch určíme funkčné hodnoty a vyberieme najväčšiu a najmenšiu z nich.

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 1, f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi i}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 - \pi.$$

Takže funkcia  $f$  nadobúda najmenšiu hodnotu v bode  $x = \frac{\pi}{2}$  a je to hodnota  $-1 - \pi$  a najväčšiu hodnotu v bode  $x = -\frac{\pi}{2}$  a je to hodnota  $\pi - 1$ .

Situáciu si môžeme aj graficky znázorniť.



## GLOBALNE EXTREMY-ÚLOHY NA PRECVIČENIE

Nájdite maximum a minimum nasledujúcich funkcií na daných intervaloch:

(a)  $f_1(x) = \sqrt[3]{(3x+1) \cdot (x+2)^2}$ ,  $\langle 0, 5 \rangle$ ,  
[ Max. v bode 5, min. v bode 0 ]

(b)  $f_2(x) = \sqrt{|6x-x^2|}$ ,  $\langle 1, 2 \rangle$ ,  
[ Max. v bode 2, min. v bode 1 ]

(c)  $f_3(x) = \ln \frac{x^2+4x+2}{x+2}$ ,  $\langle 0, 2 \rangle$ ,  
[ Max. v bode 2, min. v bode 0 ]

(d)  $f_4(x) = x^3 - 2|x|$ ,  $\langle 0, 2 \rangle$ .  
[ Max. v bode 2, min. v bode  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  ]