1. Určte definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x+2}}$.
Riešenie. Najskôr si určíme podmienky pre obe odmocniny:

$$(x + 2 \geq 0) \wedge (x + \sqrt{x+2} \geq 0).$$

Z prvej podmienky dostaneme: $x \geq -2 \Rightarrow x \in \langle -2, \infty)$.
Všimneme si druhú podmienku:

$$x + \sqrt{x+2} \geq 0,$$

keby sme nerovnicu umocnili v tomto tvare, tak by sme sa odmocniny nezbavili, preto ju upravíme takto: $x \geq -\sqrt{x+2}$.
Je dobré si všimnúť, že $-\sqrt{x+2} \leq 0$ pre každé $x \in \langle -2, \infty)$. Na ľavej strane máme x a preto pred umocňovaním nerovnice musíme rozlíšiť dve možnosti, či je $x \geq 0$ alebo $x < 0$.

- Nech $x \geq 0$. Potom máme:

$$(x \geq 0) \ \wedge \ (-\sqrt{x+2} \leq 0),$$

zrejme

$$x \geq -\sqrt{x+2} \quad \text{pre} \quad \forall x \in \langle 0, \infty).$$

- Nech $x < 0$. Potom z nerovnice

$$x \geq -\sqrt{x+2}$$

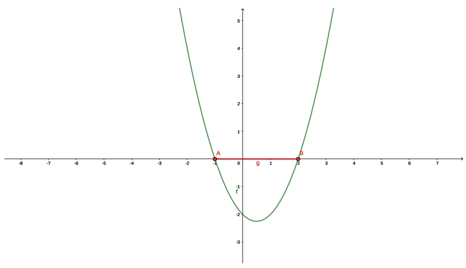
po umocnení dostaneme

$$x^2 \leq x + 2,$$

toto si dobre premyslite. Potom

$$(x-2)(x+1) \leq 0 \iff x \in \langle -1, 2 \rangle,$$

interval sa dá jednoducho určiť z obrázku:



Vzhľadom k tomu, že v tejto časti bolo $x < 0$, dostaneme: $x \in \langle -1, 0)$.

- Teda pre podmienku $(x + \sqrt{x+2} \geq 0$ dostávame interval $\langle 0, \infty) \cup \langle -1, 0) = \langle -1, \infty)$.

Na záver už treba urobiť len prienik intervalov, ktoré sme dostali z prvej a druhej podmienky, teda

$$x \in \langle -2, \infty) \cap \langle -1, \infty) \Rightarrow x \in \langle -1, \infty).$$

2. Určte definičný obor funkcie $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x+2}}$.
Riešenie. Najskôr si určíme podmienky pre obe odmocniny:

$$(x + 2 \geq 0) \wedge (x - \sqrt{x+2} \geq 0).$$

Z prvej podmienky dostaneme: $x \geq -2 \Rightarrow x \in \langle -2, \infty)$.
Všimneme si druhú podmienku:

$$x - \sqrt{x+2} \geq 0,$$

keby sme nerovnicu umocnili v tomto tvare, tak by sme sa odmocniny nezbavili, preto ju upravíme takto: $x \geq \sqrt{x+2}$.
Je dobré si všimnúť, že $\sqrt{x+2} \geq 0$ pre každé $x \in \langle -2, \infty)$. Na ľavej strane máme x a preto pred umocňovaním nerovnice musíme rozlíšiť dve možnosti, či je $x \geq 0$ alebo $x < 0$.

- Nech $x < 0$. Potom máme:

  $$(x < 0) \ \wedge \ (\sqrt{x+2} \geq 0),$$

  zrejme

  $$x \geq \sqrt{x+2} \ \text{ nebude platiť pre žiadne } x < 0.$$

- Nech $x \geq 0$. Potom z nerovnice

  $$x \geq \sqrt{x+2}$$

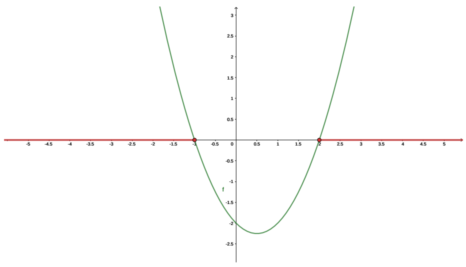
  po umocnení dostaneme

  $$x^2 \geq x + 2.$$

  Potom

  $$(x-2)(x+1) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 2, \infty),$$

  intervaly sa dajú jednoducho určiť z obrázku:

  Vzhľadom k tomu, že v tejto časti bolo $x \geq 0$, dostaneme: $x \in \langle 2, \infty)$.

- Teda pre podmienku $(x - \sqrt{x+2} \geq 0$ dostávame interval

  $$\langle 2, \infty) \cup \emptyset = \langle 2, \infty).$$

Na záver už treba urobiť len prienik intervalov, ktoré sme dostali z prvej a druhej podmienky, teda

$$x \in \langle -2, \infty) \cap \langle 2, \infty) \Rightarrow x \in \langle 2, \infty).$$