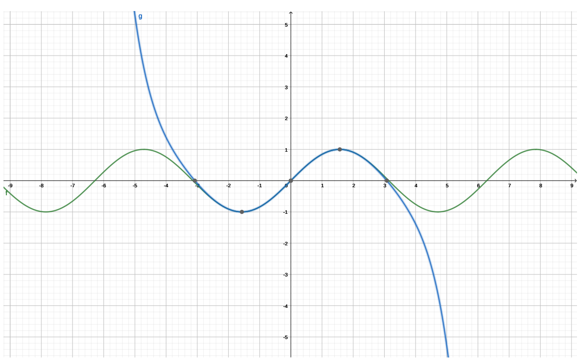
Taylorov polynóm

- Ak je funkcia f $n-$krát diferencovateľná v bode x_0, potom funkciu
$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0).h^n$$
premennej $h \in R$ nazývame **diferenciálom n-tého rádu** funkcie f v bode x_0.

- **Taylorovým polynómom** funkcie f v bode x_0 nazývame polynóm
$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$
Pre $x_0 = 0$ se T_n nazývá **Maclaurinov polynóm**.

- Necht funkcia f je $(n+1)-$ krát diferencovateľná na nejakom okolí bodu x_0. Potom pre body toho okolia platí:
$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x);$$
$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \vartheta = x_0 + a(x - x_0); 0 < a < 1.$$

Príklad. Napíšte Taylorov polynóm 7. stupňa pre funkciu $\sin x$ v bode $x_0 = 0$.
Zrejme
$$f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x, \ldots$$
Vidíme, že
$$f^{(n)}(x) = f^{(n+4)}(4).$$
Určíme hodnoty derivácií v bode $x_0 = 0$:
$$f(0) = \sin 0 = 0, f'(0) = \cos 0 = 1, f''(0) = -\sin 0 = 0, f'''(0) = -\cos 0 = -1, f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0, \ldots$$
Dosadíme do vzťahu pre Taylorov polynóm
$$T_7(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(7)}(x_0)}{7!}(x - x_0)^7 = 0 + \frac{1}{1!}(x-0) + \frac{0}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{-1}{7!}(x-0)^7 =$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$
Aproximáciu týmto polynómom vidime na obrázku:



Ešte určíme chybu, ktorej sa pri takejto aproximácii dopustíme:

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\vartheta)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \vartheta=x_0+a(x-x_0); 0<a<1$$

V našom prípade máme $n=7, x_0=0$, potom

$$R_{7+1}(x)=\frac{f^{(7+1)}(\vartheta)}{(7+1)!}(x-x_0)^{7+1}=\frac{\sin(\vartheta)}{8!}x^8.$$

Vzhľadom na ohraničenosť funkcie sin dostávame pre $R_8(x)$ nasledujúci vzťah:

$$|R_8(x)|\leq\frac{1}{8!}.x^8,$$

teda pokiaľ budeme „blízko“ nuly, tak chyba bude pomerne „malá“, čo sme mali možnosť vidieť aj na obrázku.

Príklad. Napíšte Taylorov polynóm 5. stupňa pre funkciu $e^x\cdot\sin x$ v bode $x_0=0$.
Zrejme

$$f(x)=e^x\cdot\sin x, f'(x)=e^x(\sin x+\cos x), f''(x)=2e^x\cos x, f'''(x)=2e^x(\cos x-\sin x),$$

$$f^{(4)}(x)=-4e^x\cdot\sin x, f^{(5)}(x)=-4e^x(\sin x+\cos x)$$

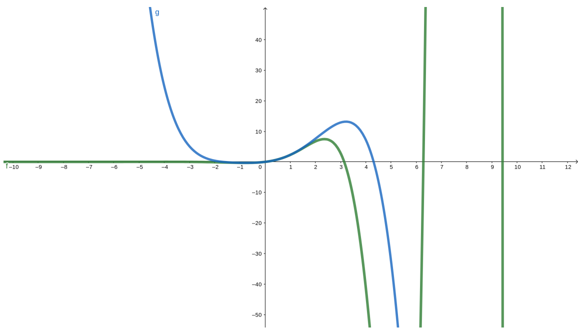
Určíme hodnoty derivácií v bode $x_0=0$:

$$f(0)=0, f'(0)=1, f''(0)=2, f'''(0)=2, f^{(4)}(0)=0, f^{(5)}(0)=-4.$$

Dosadíme do vzťahu pre Taylorov polynóm

$$T_5(x)=0+\frac{1}{1!}\cdot x+\frac{2}{2!}\cdot x^2+\frac{2}{3!}\cdot x^3+\frac{0}{4!}\cdot x^4+\frac{-4}{!}\cdot x^5=x+x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5.$$

Aproximáciu týmto polynómom vidime na obrázku (zelená je $e^x\cdot\sin x$, modrá je jej aproximácia):



Príklad. Napíšte Taylorov polynóm n-tého stupňa pre funkciu $\ln(1+2x)$ v bode $x_0 = 0$.
Zrejme

$$f(x) = \ln(1 + 2x), f'(x) = 2 \cdot (1 + 2x)^{-1}, f''(x) = -2^2 \cdot (1 + 2x)^{-2},$$

$$f'''(x) = 2^3 \cdot 2(1 + 2x)^{-3}, f^{(4)}(x) = -2^4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (1 + 2x)^{-4},$$

potom

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)!2^n.(1 + 2x)^{-n}.$$

Dosadíme do vzťahu pre Taylorov polynóm

$$T_n(x) = 0 + 2x - \frac{4}{2} \cdot x^2 + \frac{8}{3} \cdot x^3 - \frac{16}{4} \cdot x^4 + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n} \cdot x^n.$$

Interpolácia polynómom

Chceme nájsť polynóm

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = f(x),$$

ak poznáme:

x	x_0	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$\dots$	$f(x_n)$

Vandermondova matica

Z tabuľky zostavíme sústavu rovníc s neznámymi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

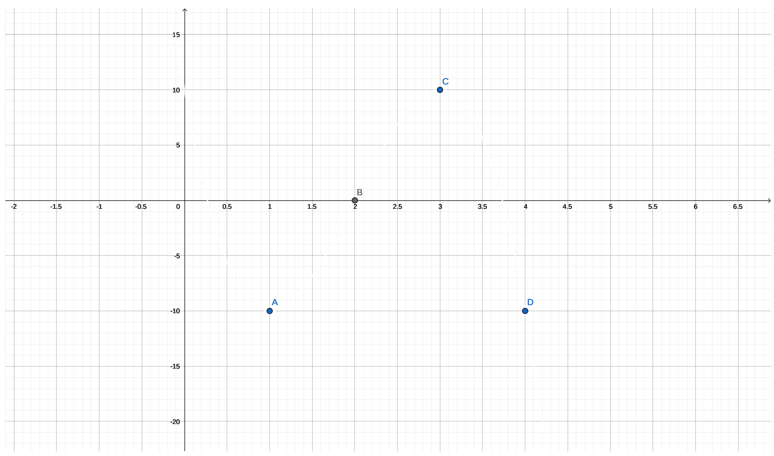
$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n &= f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n &= f(x_1) \\ &\vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n &= f(x_n) \end{aligned}$$

Potom dostaneme tzv. **Vandermondovu maticu**.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n & f(x_n) \end{array}\right)$$

Pomocou GEM dostaneme hľadané koeficienty $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.
Príklad. Zostavte interpolačný polynóm pre namerané hodnoty:

x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	-10	0	10	-10

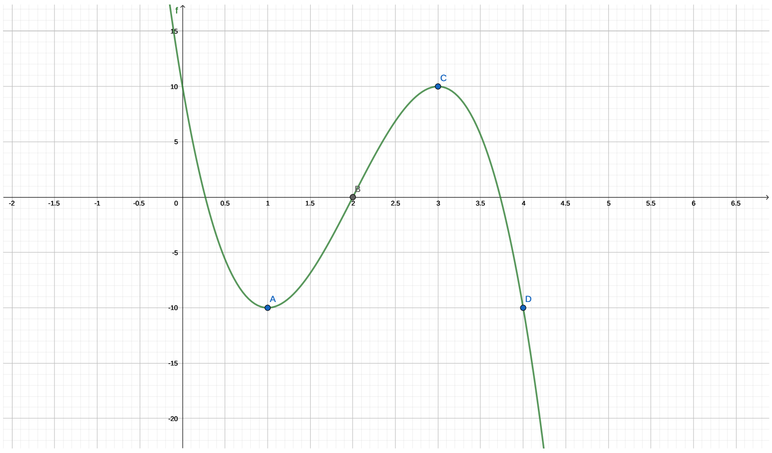


Podľa návodu zostrojíme Vandermondovu maticu:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -10 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 10 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & -10 \end{array}\right)$$

Aplikujeme GEM a dostaneme riešenie $\overline{a} = (10, -45, 30, -5)$. Preto hľadaný interpolačný polynóm je:

$$f(x) = 10 - 45x + 30x^2 - 5x^3.$$



Lagrangeov interpolačný polynóm

Máme namerané honoty:

x	x_0	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$\dots$	$f(x_n)$

Hľadáme polynóm L_n stupňa najviac n taký, že $L_n(x_0) = f(x_0)$, $L_n(x_1) = f(x_1)$, ..., $L_n(x_n) = f(x_n)$.
Pomôžu nám pomocné funkcie $F_i(x) \forall i \in 0, \dots, n$ také, že

$$F_i(x_j) = \begin{cases} 1 & j = i, \\ 0 & j \neq i. \end{cases}$$

Ako ich vymyslieť?

$$F_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Lagrangeov interpolačný polynóm n-tého stupňa má tvar

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \, F_i(x).$$

Príklad Nájdite Lagrangeov interpolačný polynóm pre uzly:

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	-10	0	10	-10

Zostavíme l_0 až l_3, tak, aby l_i pre x_i nadobúdalo hodnotu 1 a pre x_j, kde $j \neq i$ nadobúdalo hodnotu 0.

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(x_0-2)(x_0-3)(x_0-4)} = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} =$$

$$= \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{-6}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(x_1-1)(x_1-3)(x_1-4)} = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} =$$

$$= \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{2}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(x_2-1)(x_2-2)(x_2-4)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} =$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{-2}$$

$$l_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x_3-1)(x_3-2)(x_3-3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} =$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}$$

A už môžeme zostaviť Lagrangeov polynóm:

$$L_3(x) = f(x_0) \cdot l_0(x) + f(x_1) \cdot l_1(x) + f(x_2) \cdot l_2(x) + f(x_3) \cdot l_3(x) =$$

$$= -10 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{-6} + 0 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{2} +$$

$$+ 10 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{-2} + (-10) \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6} =$$

$$= \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad = -5x^3 + 30x^2 - 45x + 10$$

Newtonov interpolačný polynóm

Máme

x	x_0	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$\dots$	$f(x_n)$

Hľadáme interpolačný polynóm, ktorý má tvar:

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$
$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

Existuje jednoduchý spôsob, ako určiť koeficienty a_0 až a_n. Použijeme tabulku s tzv. **pomernými diferenciami**. V tabuľke budú diferencie $0-$tého až $n-$tého rádu. Pomerné diferencie $0-$tého rádu sú funkčné hodnoty v uzloch x_i.

Ak označíme D_j ako $j-$tu pomernú diferenciu $k-$teho rádu a C_j ako $j-$tu pomernú diferenciu $(k-1)-$teho rádu. Potom platí:

$$D_j = \frac{(C_j - C_{j-1})}{(x_j - x_{j-k})}.$$

Príklad. Nájdite Newtonov interpolačný polynóm pre uzly:

x_i	1	2	3	4
$f(x_i)$	-10	0	10	-10

i	x_i	$f(x_i)$	1.rád	2.rád	3.rád
0	1	**-10**	$\frac{0-(-10)}{2-1} = \mathbf{10}$	$\frac{10-10}{3-1} = \mathbf{0}$	$\frac{-15-0}{4-1} = \mathbf{-5}$
1	2	0	$\frac{10-0}{3-2} = 10$	$\frac{-20-10}{4-2} = -15$	
2	3	10	$\frac{-10-10}{4-3} = -20$		
3	4	-10			

Použijeme hodnoty z prvého riadku tabuľky (tučne vyznačené) a dostaneme:

$$N_3 = -10 + 10(x - x_0) + 0(x - x_0)(x - x_1) + (-5)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) =$$
$$= -10 + 10(x - 1) + 0(x - 1)(x - 2) + (-5)(x - 1)(x - 2)(x - 3) =$$
$$= -10 + 10(x - 1) + (-5)(x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Newtonov interpolačný polynóm má výhodu, že je, v porovnaní s Lagrangeovou interpoláciou, menej náročné pridať jeden uzol, protože niektoré výpočty ostanú bez zmeny.

Splajny

Príklad.

x_i	3	$\frac{9}{2}$	7	9
$f(x_i)$	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$

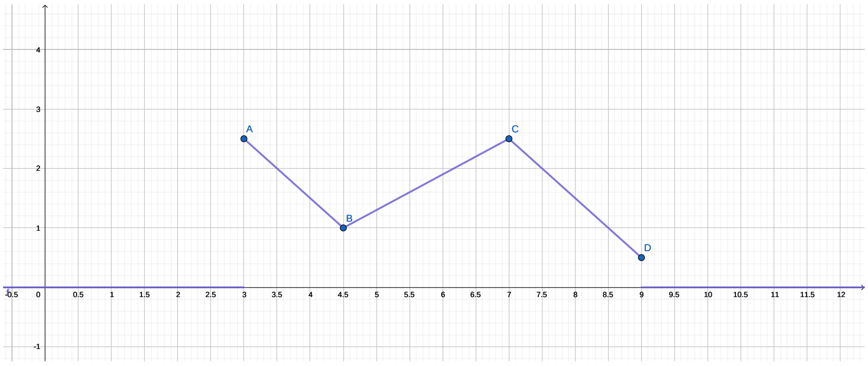
Lineárny splajn

- spojitosť a linearita

$$x \in \left\langle 3, \frac{9}{2} \right\rangle : s_0(x) = \frac{5}{2} \cdot \frac{x - \frac{9}{2}}{3 - \frac{9}{2}} + 1 \cdot \frac{x-3}{\frac{9}{2} - 3},$$

$$x \in \left\langle \frac{9}{2}, 7 \right\rangle : s_1(x) = 1 \cdot \frac{x-7}{\frac{9}{2} - 7} + \frac{5}{2} \cdot \frac{x - \frac{9}{2}}{7 - \frac{9}{2}},$$

$$x \in \langle 7, 9 \rangle : s_2(x) = \frac{5}{2} \cdot \frac{x-9}{7-9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x-7}{9-7}.$$



Kvadratický splajn

Príklad.

x_i	3	$\frac{9}{2}$	7	9
$f(x_i)$	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$x \in \left\langle 3, \frac{9}{2} \right\rangle : s_0(x) = a_0 + b_0(x-3) + c_0(x-3)^2,$$

$$x \in \left\langle \frac{9}{2}, 7 \right\rangle : s_1(x) = a_1 + b_1.\left(x - \frac{9}{2}\right) + c_1\left(x - \frac{9}{2}\right)^2,$$

$$x \in \langle 7, 9 \rangle : s_2(x) = a_2 + b_2(x-7) + c_2(x-7)^2.$$

Funkčné hodnoty:

$$s_0(3) = \frac{5}{2}, s_1\left(\frac{9}{2}\right) = 1, s_2(7) = \frac{5}{2}, s_2(9) = \frac{1}{2}.$$

Spojitosť

$$s_0\left(\frac{9}{2}\right) = s_1\left(\frac{9}{2}\right), s_1(7) = s_2(7).$$

Spojitosť prvej derivácie

$$s_0'\left(\frac{9}{2}\right) = s_1'\left(\frac{9}{2}\right), s_1'(7) = s_2'(7).$$

Deviata podmienka?

napr.: $s_0''(x_0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$ *(overte si to!)*

Funkčné hodnoty:

$$s_0(3) = a_0 + b_0(3-3) + c_0(3-3)^2 = a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{5}{2},$$

$$s_1\left(\frac{9}{2}\right) = a_1 + b_1\left(\frac{9}{2} - \frac{9}{2}\right) + c_1(\frac{9}{2} - \frac{9}{2})^2 = a_1 \Rightarrow a_1 = 1,$$

$$s_2(7) = a_2 + b_2(7-7) + c_2(7-7)^2 = a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{5}{2},$$

$$s_2(9) = a_2 + b_2(9-7) + c_2(9-7)^2 = \frac{5}{2} + 2b_2 + 4c_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow b_2 + 2c_2 = -1.$$

Spojitosť

$$s_0\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{5}{2} + b_0\left(\frac{9}{2} - 3\right) + c_0(4,5-3)^2 = s_1\left(\frac{9}{2}\right) = 1 \Rightarrow b_0 + 1,5c_0 = -1,$$

$$s_1(7) = 1 + b_1\left(7 - \frac{9}{2}\right) + c_1\left(7 - \frac{9}{2}\right)^2 = s_2(7) = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5}{2}b_1 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 c_1 = \frac{3}{2}.$$

Hladkosť=spojitosť prvej derivácie

$$s_0'(x) = b_0 + 2c_0(x-3), s_1'(x) = b_1 + 2c_1\left(x - \frac{9}{2}\right), s_2'(x) = b_2 + 2c_2(x-7).$$

Dosadíme

$$s_0'\left(\frac{9}{2}\right) = b_0 + 2c_0\left(\frac{9}{2} - 3\right) = s_1'\left(\frac{9}{2}\right) = b_1 \Rightarrow b_0 + 3c_0 = b_1,$$

$$s_1'(7) = b_1 + 2c_1(7 - 4,5) = s_2'(7) = b_2 \Rightarrow b_1 + 5c_1 = b_2.$$

Určili sme 4 koeficienty (a_0, a_1, a_2, c_0) a máme 5 rovníc:

$$b_2 + 2c_2 = -1$$

$$b_0 + 3c_0 = b_1$$

$$b_1 + 5c_1 = b_2$$

$$b_0 + \frac{3}{2}c_0 = -1$$

$$\frac{5}{2}b_1 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 c_1 = \frac{3}{2}$$

Dostaneme:

- $x \in \langle 3; \frac{9}{2}\rangle : s_0(x) = \frac{5}{2} - (x-3)$
- $x \in \langle \frac{9}{2}; 7\rangle : s_1(x) = 1 - (x - \frac{9}{2}) + \frac{16}{25}(x - \frac{9}{2})^2$
- $x \in \langle 7; 9\rangle : s_2(x) = \frac{5}{2} + \frac{11}{5}(x-7) - \frac{8}{5}(x-7)^2$