1. **Načrtněte graf funkce f, pro kterou platí:**

   $D_f = \mathbb{R}$, v $x = 2$ má nespojitost 2. druhu, přičemž je zde spojitá zleva, funkce je lichá;

   $f(2) = 0, f(3) = 1, f(4) = 2, \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1;$

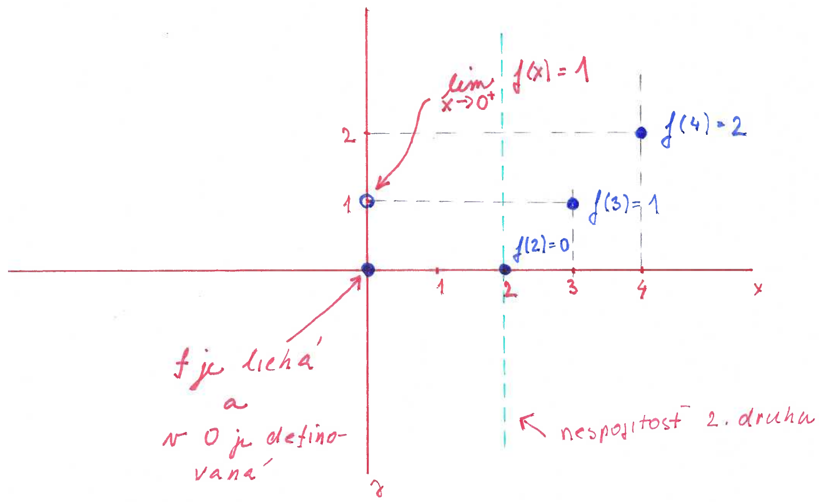
   $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 1, \lim\limits_{x \to 2^-} f'(x) = -\infty, \lim\limits_{x \to 3^-} f'(x) = -1, \lim\limits_{x \to 3^+} f'(x) = \infty, f'(4) = 0;$

   $f''(x) > 0$ pro $x \in (2,3)$ a pro $x \in (4, \infty)$, $f''(x) < 0$ pro $x \in (0,2)$ a pro $x \in (3,4)$;

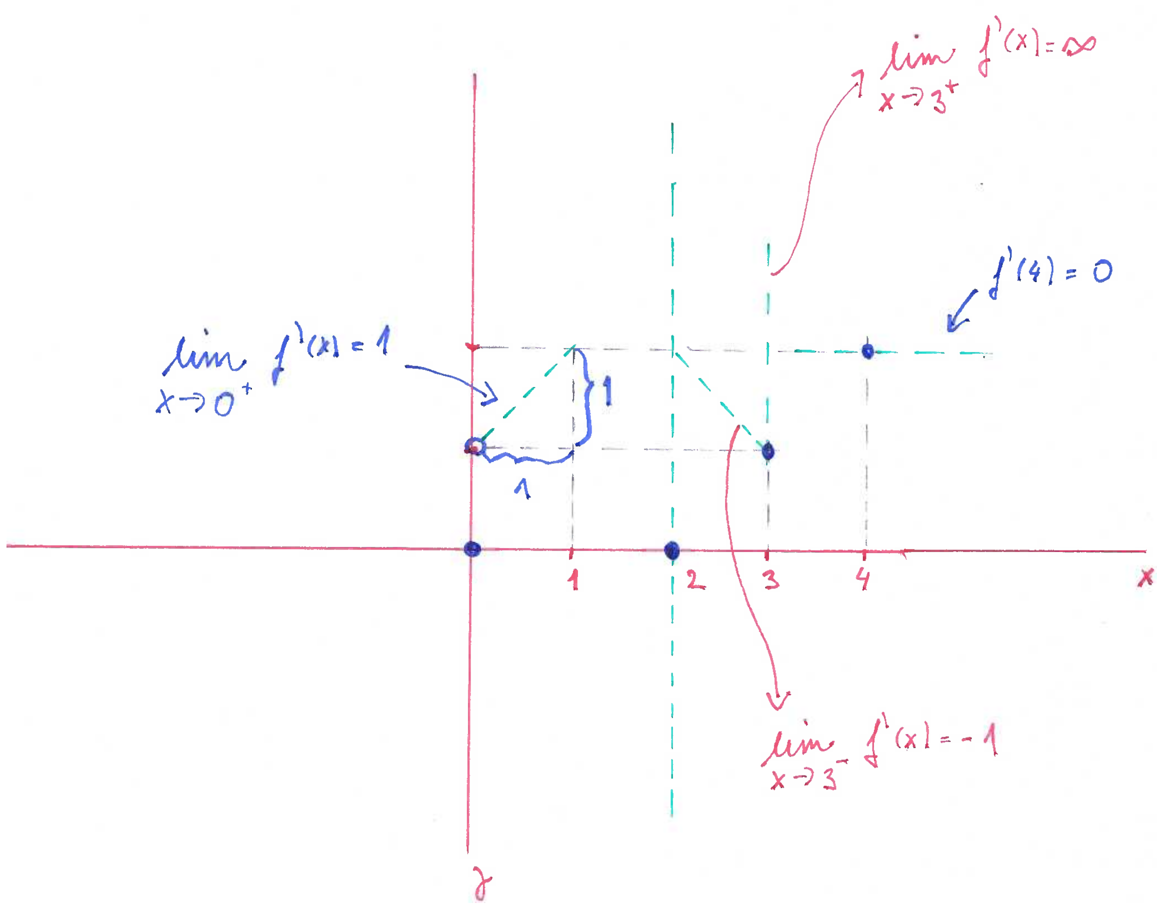
   pro $x \to \infty$ má asymptotu $y = x - 5$.

   Do obrázku zakreslete asymptoty a tečny, resp. polotečny v bodech, kde je známa derivace.

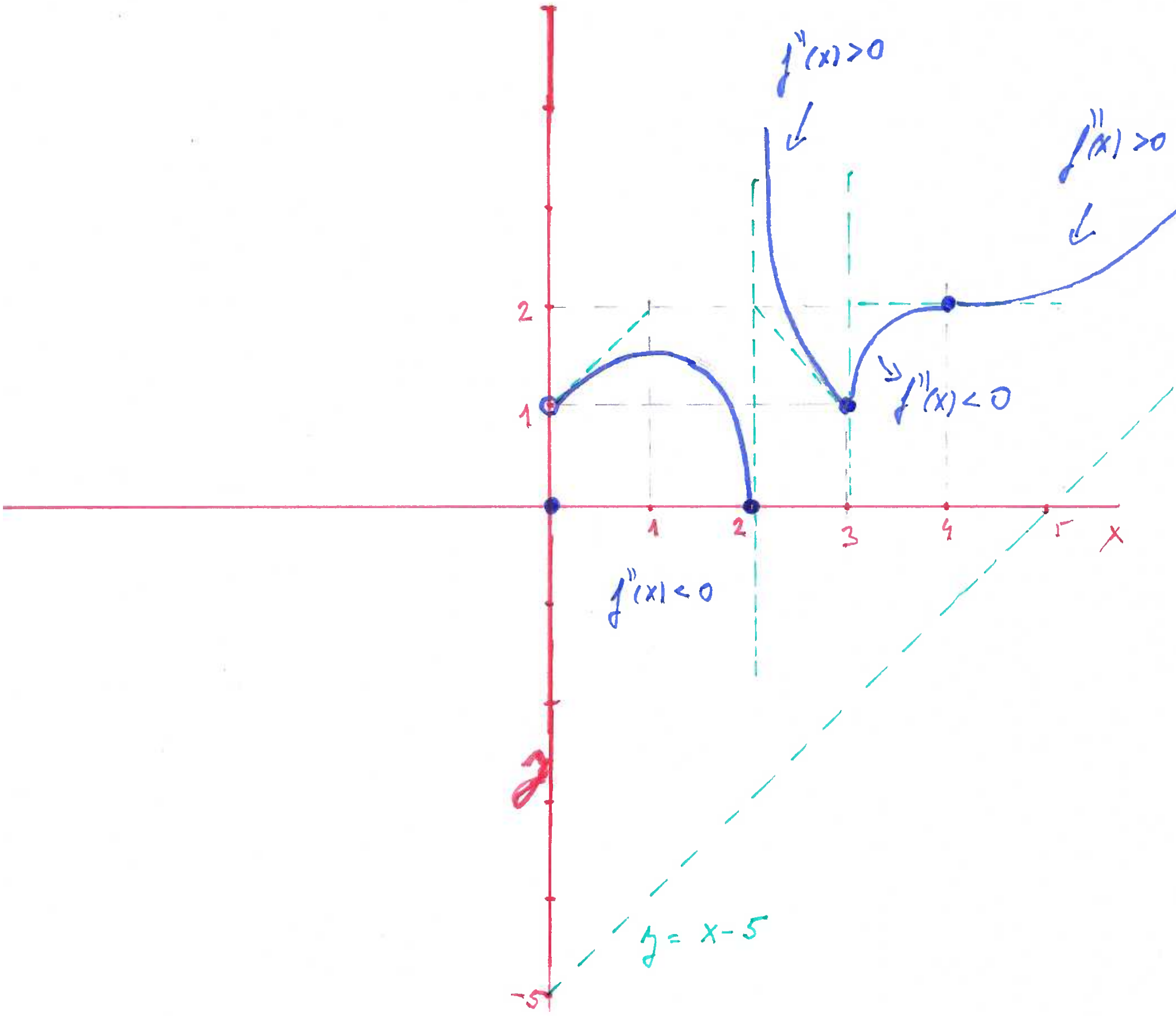
   Riešenie. Túto úlohu som postupne rozkreslila, aby bol zrejmý postup. Na prvom obrázku vidíme len zaznačené funkčné hodnoty vo vybraných bodoch, teda $f(2) = 0, f(3) = 1, f(4) = 2$, ďalej zvislú asymptotu v bode 2, kde má byť nespojitosť druhého typu a je tam vyznačená funkčná hodnota v bode 0, ktorá síce nebola zadaná, ale vzhľadom k tomu, že f je lichá a je definovaná aj pre $x = 0$, musí byť $f(0) = 0$, toto si premyslite. Ďalej je tam prázdny puntík v bode $(0,1)$, lebo $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$. Plný nemôže byť, lebo plný je už v $(0,0)$, kreslíme funkciu, na to nesmieme zaabudnúť.



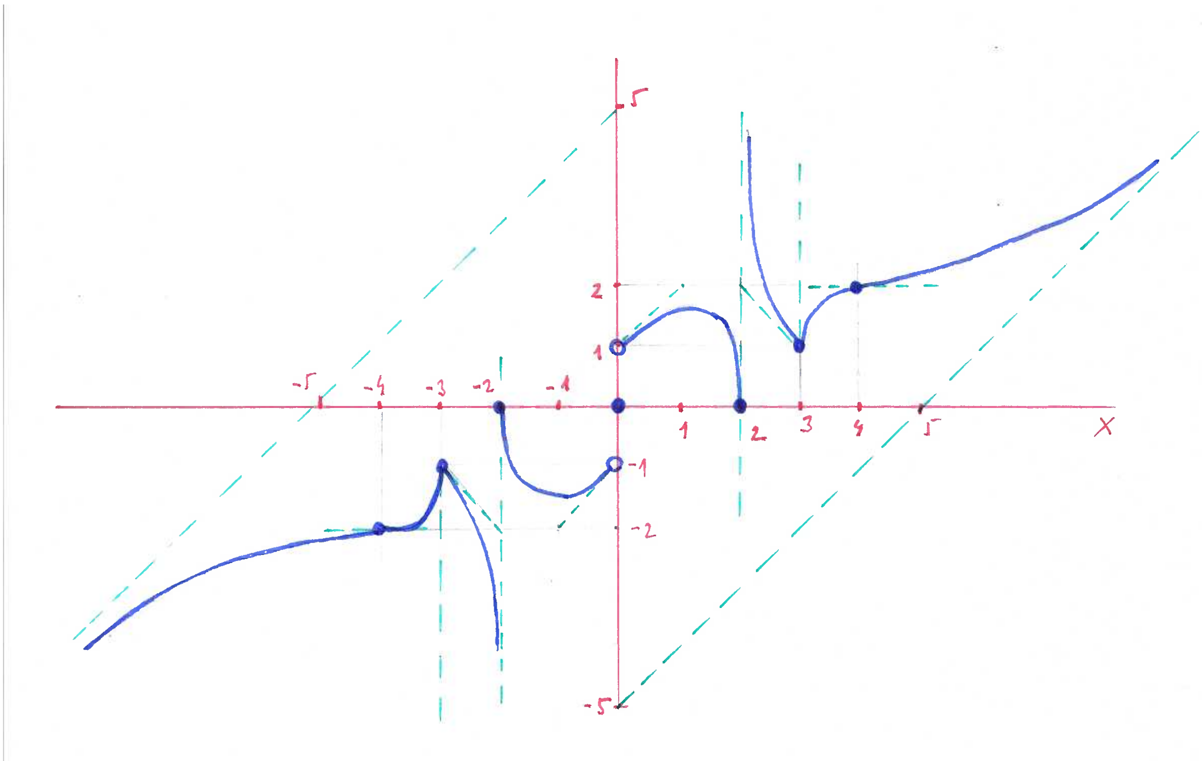
Na ďalšom obrázku máme zaznačené všetky tečny a polotečny. Teda kreslíme úsečky, ktoré prechádzajú vybranými bodmi a majú smernicu takú, aká je derivácia v príslušnom bode. Napr. $f'(4) = 0$. Vieme, že $f(4) = 2$, takže bodom $(4, f(4))$ vedieme úsečku, ktorá má smernicu 0, teda je rovnobežná s osou x.



Na nasledujúcom obrázku už máme takmer výsledok. Pridali sme asymptotu v ∞ a podľa znamienka druhej derivácie sme kreslili buď konvexnú alebo konkávnu časť funkcie. Ešte treba myslieť na to, že f je v bode 2 zľava spojitá. Tečny a polotečny z predchádzajúceho obrázku nám poslúžili ako "mantinely".

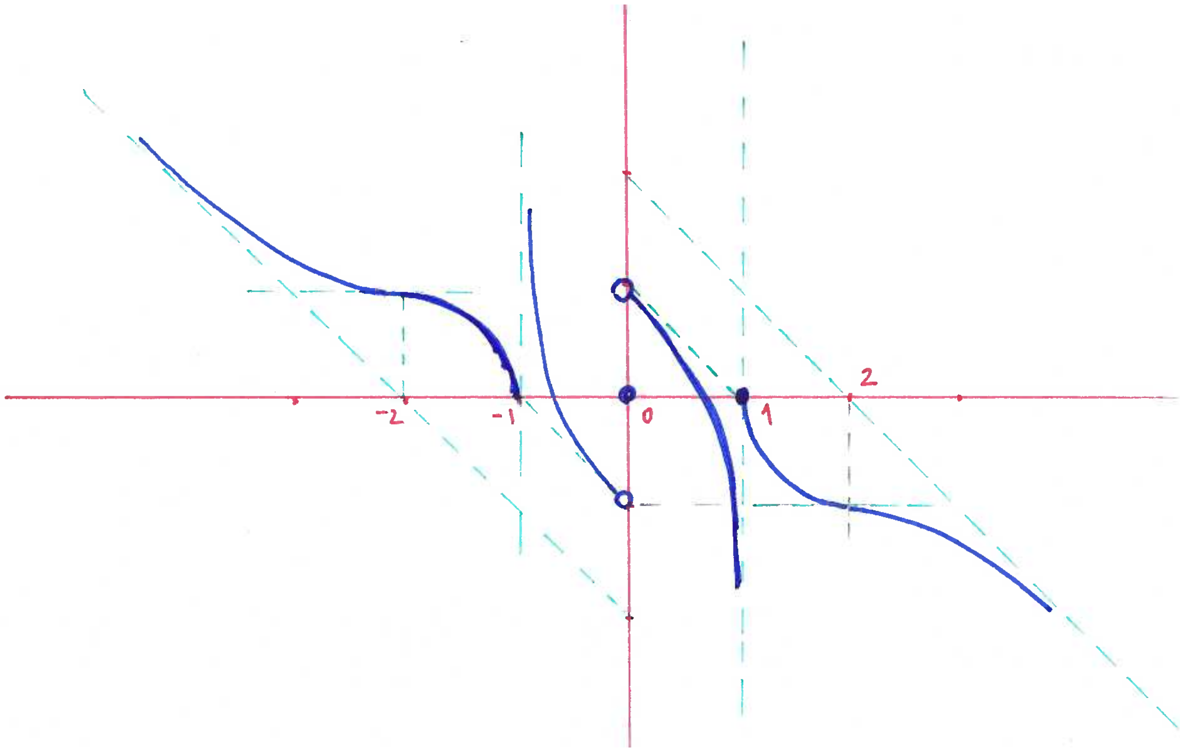


A v poslednom obrázku sme len, vzhľadom na lichosť funkcie, dokreslili zvyšnú časť grafu:

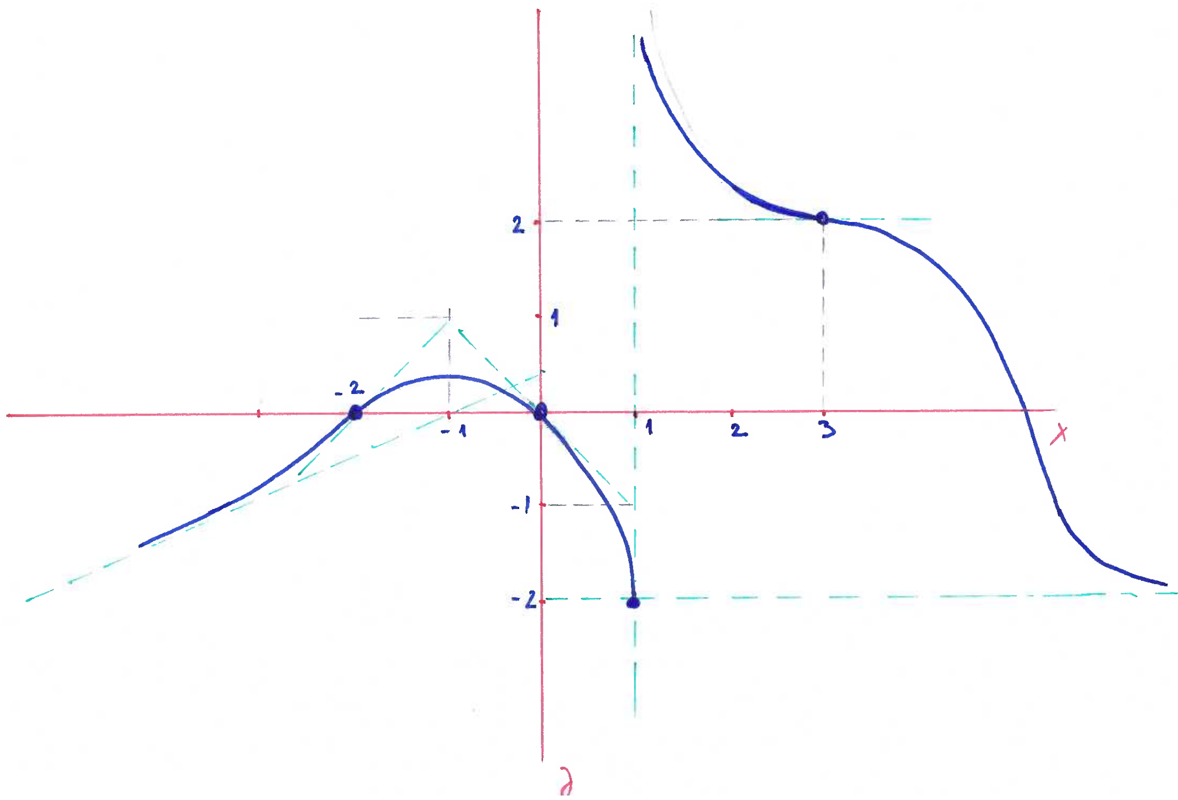


V nasledujúcich úlohách máte hneď po zadaní výsledok. Doporučujem najskôr samostatne graf nakresliť a potom porovnať.

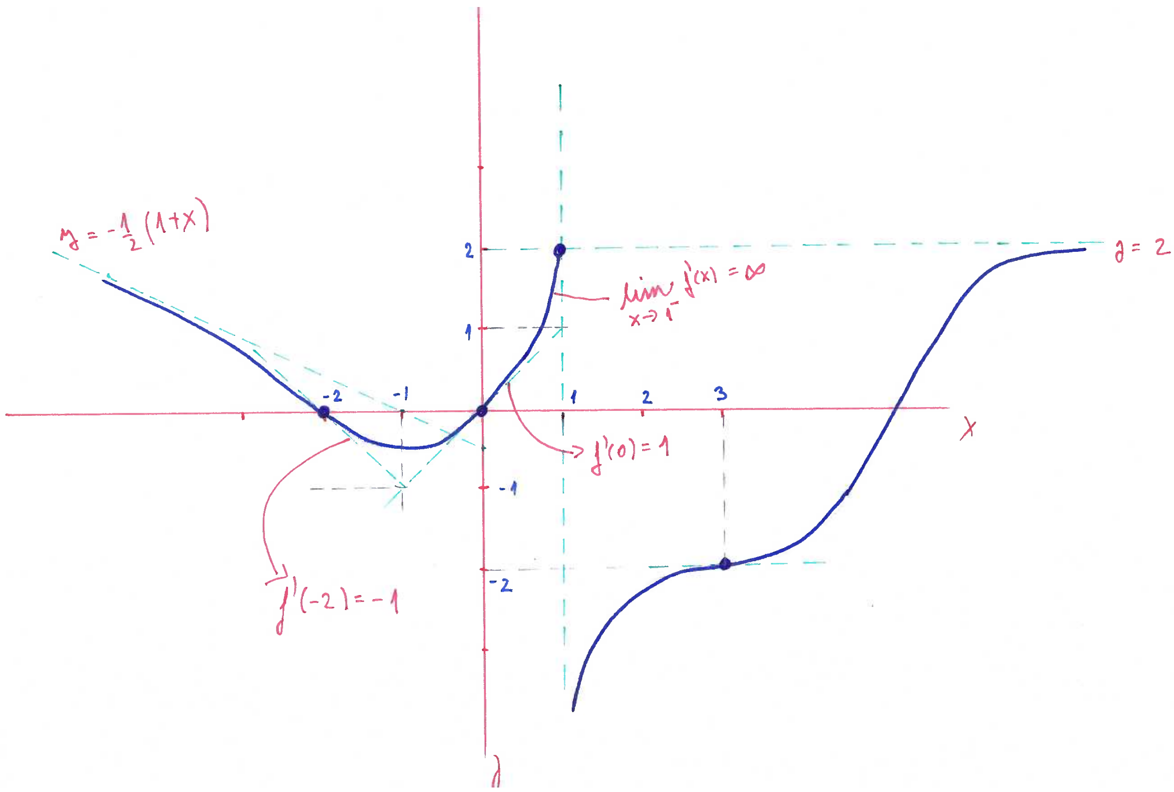
2. **Načtrněte graf funkce f, pro kterou platí:**
$D_f = \mathbb{R}, f$ je lichá, v $x = 0$ má nespojitost 1. druhu, v $x = 1$ má nespojitost 2. druhu, přičemž je zde spojitá zprava.
$f(1) = 0, f(2) = -1,$
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = -1,\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = -\infty, f'(2) = 0.\ f''(x) > 0$ pro $x \in (1, 2), f''(x) < 0$ pro $x \in (0, 1)$ a pre $x \in (2, \infty)$, pro $x \to \infty$ má asymptotu $y = 2 - x$. Do obrázku zakreslete asymptoty a tečny, resp. polotečny v bodech, kde je známa derivace.



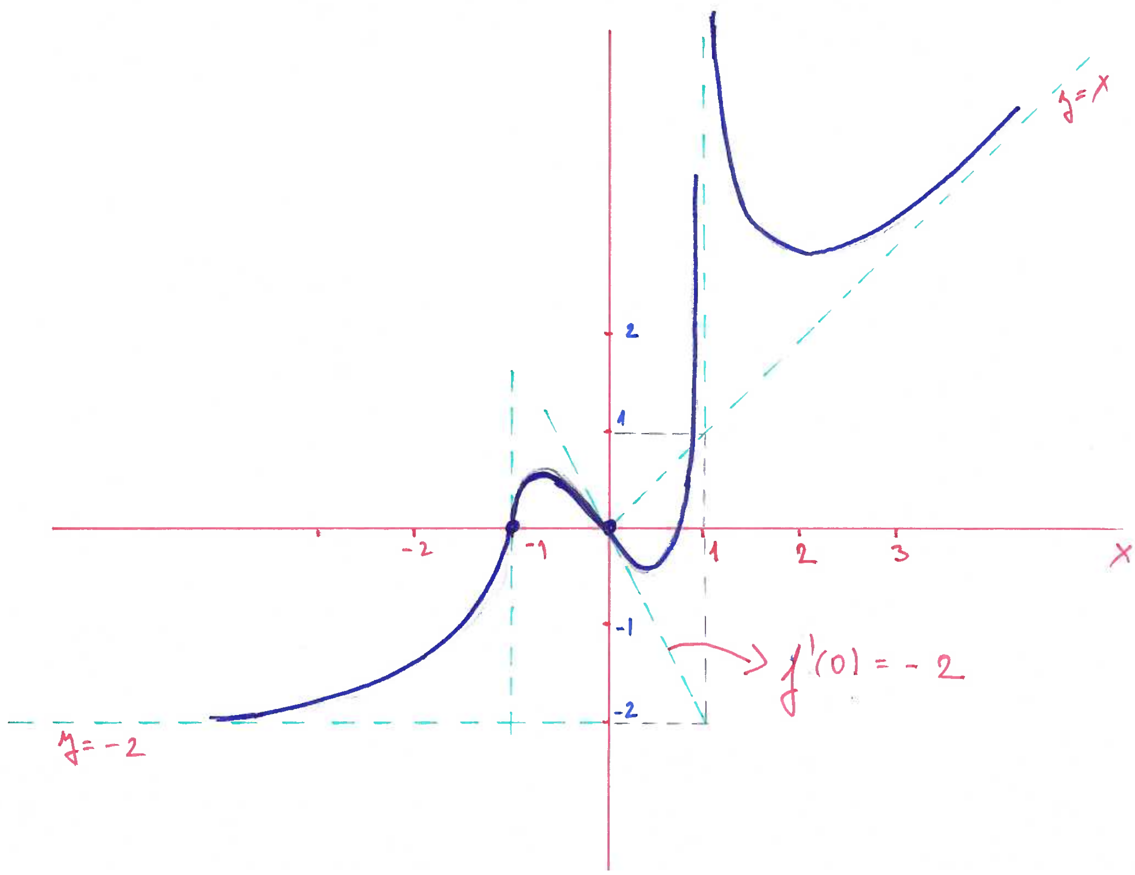
3. **Načtrněte graf funkce f, pro kterou platí:**
$D_f = \mathbb{R}, f$ v bodě $x = 1$, má nespojitost 2. druhu, přičemž je zde spojitá zleva.
$f(3) = 2, f(1) = -2, f(0) = f(-2) = 0, f'(0) = -1.$
$\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty, f'(x) \leq 0$ pro $x \in (1, \infty)$.
$x = -2$ a $x = 3$ jsou inflexní body, pričemž $f'(-2) = 1$, $f'(3) = 0$.
Přímka $y = -2$ je její asympota pro $x \to \infty$, přímka $y = \frac{1}{2}(1 + x)$ je asympota pro $x \to -\infty$.
Do obrázku zakreslete asymptoty a tečny, resp. polotečny v bodech, kde je známa derivace.



4. **Načtrněte graf funkce f, pro kterou platí:**
$D_f = \mathbb{R}, f$ v bodě $x = 1$, má nespojitost 2. druhu, přičemž je zde spojitá zleva.
$f(3) = -2, f(1) = 2, f(0) = f(-2) = 0, f'(0) = 1.$
$\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \infty, f'(x) \geq 0$ pro $x \in (1, \infty).$
$x = -2$ a $x = 3$ jsou infl. body, přičemž $f'(-2) = -1,\ f'(3) = 0.$
Přímka $y = 2$ je její asympota pro $x \to \infty$, přímka $y = -\frac{1}{2}(1 + x)$ je asympota pro $x \to -\infty$.
Do obrázku zakreslete asymptoty a tečny, resp. polotečny v bodech, kde je známa derivace.



5. **Načtrněte graf funkce f, pro kterou platí:**
Funkce f je spojitá na $\mathbb{R} - \{1\}$.
$f(0) = f(-1) = 0$, $\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$.
$f'(0) = -2$, $\lim_{x \to -1} f'(x) = \infty$,
$f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -1), x \in (0, 1)$ a $x \in (1, \infty)$, $f''(x) < 0$ pro $x \in (-1, 0)$.
Přímka $y = x$ je její asympota pro $x \to \infty$.
Do obrázku zakreslete asymptoty a tečny, resp. polotečny v bodech, kde je známa derivace.



6. **Vyšetrite priebeh funkcie**

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}.$$

Riešenie.

- Def. obor je $\mathbb{R}$. V menovateli nehrozí nula a pod odmocninou tiež žiadne záporné číslo nebude, lebo $x^4 + 1 \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Funkcia je lichá (nepárna):

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{\sqrt{(-x)^4+1}} = \frac{-x^3}{\sqrt{x^4+1}} = -f(x).$$

- Monotónnosť.

$$f'(x) = \frac{3x^2.\sqrt{x^4+1} - x^3\frac{1}{2}(x^4+1)^{-\frac{1}{2}}(4x^3)}{x^4+1} =$$

$$= \frac{3x^2.\sqrt{x^4+1} - \frac{2x^6}{\sqrt{x^4+1}}}{x^4+1} = \frac{\frac{3x^2(x^4+1)-2x^6}{\sqrt{x^4+1}}}{x^4+1} = \frac{3x^6+3x^2-2x^6}{(x^4+1)\sqrt{x^4+1}}.$$

Teda po úprave

$$f'(x) = \frac{x^2 \cdot (x^4+3)}{\sqrt{(x^4+1)^3}}.$$

Zřejme

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in R \quad \text{a} \quad f'(x) = 0 \iff x = 0.$$

Preto funkcia f je rastúca $\forall x \in R$.

- Konvexnosť a konkávnosť.

$$f''(x) = \frac{(6x^5+6x).(x^4+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^4+1)^{\frac{1}{2}}.4x^3.(x^6+3x^2)}{(x^4+1)^3} =$$

$$= \frac{6x(x^4+1)(x^4+1)^{\frac{3}{2}} - x^2(x^4+3)6x^3(x^4+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^4+1)^3} =$$

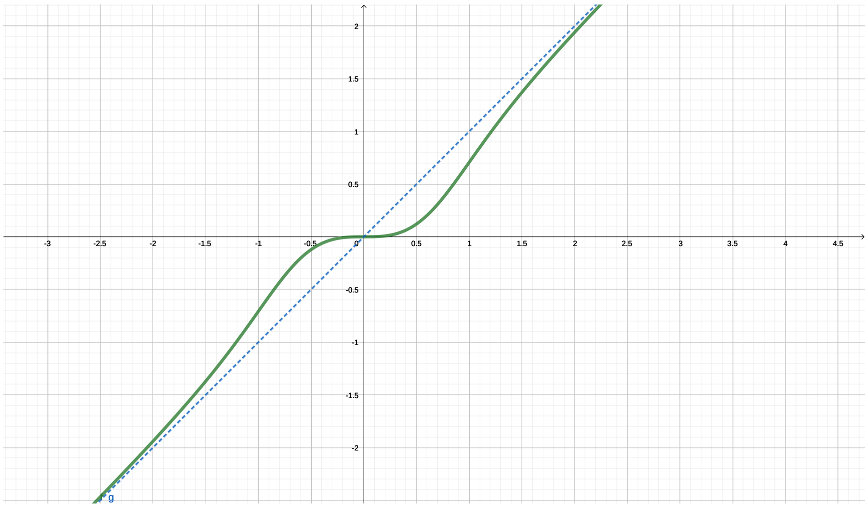
$$= \frac{6x(x^4+1)^{\frac{1}{2}}\left[(x^4+1)^2 - x^4(x^4+3)\right]}{(x^4+1)^3} = \frac{6x(x^4+1)^{\frac{1}{2}}\left[x^8+2x^4+1-x^8-3x^4\right]}{(x^4+1)^3}.$$

Posledná úprava:

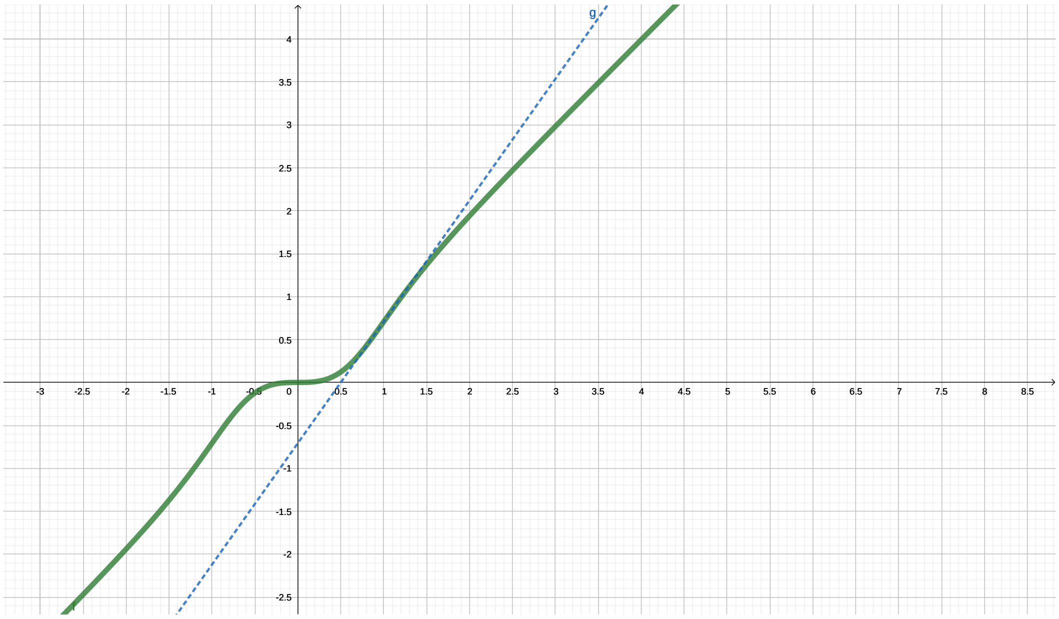
$$f''(x) = \frac{6x(1-x^4)\sqrt{x^4+1}}{(x^4+1)^3}.$$

Zrejme
$$f^{''}(x) = 0 \iff x = -1 \vee x = 0 \vee x = 1.$$
Na znamienko druhej derivácie majú vplyv len výrazy x a $1 - x^4$. Teda druhá derivácia je záporná na intervaloch $(-1, 0), (1, \infty)$ a preto f je na týchto intervaloch konkávna. Na intervaloch $(-\infty, -1), (0, 1)$ je druhá derivácia kladná, teda funkcia f je tam konvexná. Všimnite si, že zmena konvexnosti na konkávnosť (a naopak) nastáva v bodoch $-1, 0, 1$, preto sú to inflexné body.

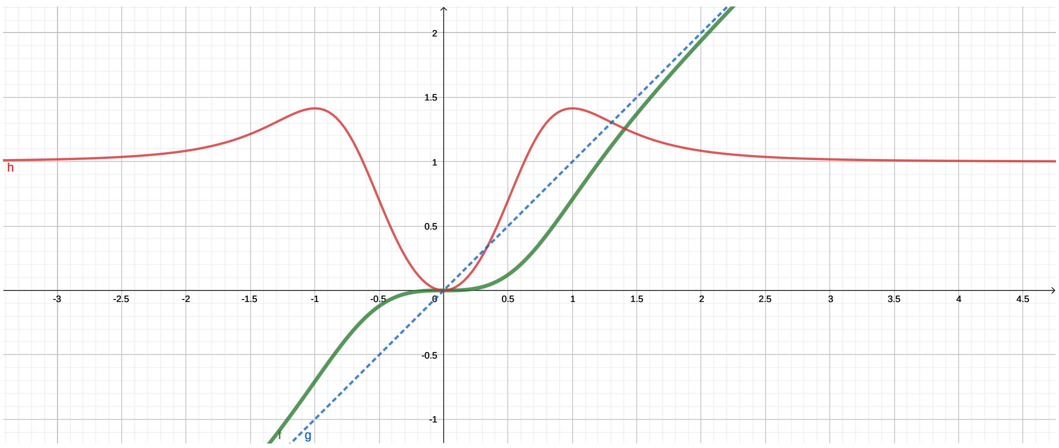
- Asymptoty.
  Funkcia nemá zvislé asymptoty, lebo nemá body nespojitosti (pozri def. obor).
  Ak existuje šikmá asymptota v nekonečne, tak platí
  $$y = ax + b; a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}; b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax.$$
  Podobne by sme zisťovali asymptotu v $-\infty$, ale funkcia f je lichá, tak nám stačí informácia pre $+\infty$. Teda
  $$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x.\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x.\sqrt{x^4(1+\frac{1}{x^4})}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = 1$$
  $$b = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}} - 1.x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x.\sqrt{x^4+1}}{\sqrt{x^4+1}} \cdot \frac{x^3 + x.\sqrt{x^4+1}}{x^3 + x.\sqrt{x^4+1}} =$$
  $$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^6 - x^2(\sqrt{x^4+1})^2}{\sqrt{x^4+1}\cdot(x^3 + x.\sqrt{x^4+1})} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{\sqrt{x^4+1}\cdot(x^3 + x.\sqrt{x^4+1})} = 0$$
  Asymptota má predpis $y = x$, vďaka tomu, že f je lichá, bude spoločná aj pre $-\infty$ (toto si premyslite).
- **Graf funkcie, aj s asymptotou je:**



- **Detial inflexného bodu** 1**, aj s dotyčnicou je na nasledujúcom obrázku.** *Všimnite si,že konvexná časť funkcie je nad dotyčnicou a konkávna pod dotyčnicou.*



- Na nasledujúcom obrázku je zelenou farbou nakreslená funkcia f a červenou farbou jej prvá derivácia:



- Na poslednom obrázku je okrem funkcie f, jej prvej derivácie aj druhá derivácia (oranžová farba):