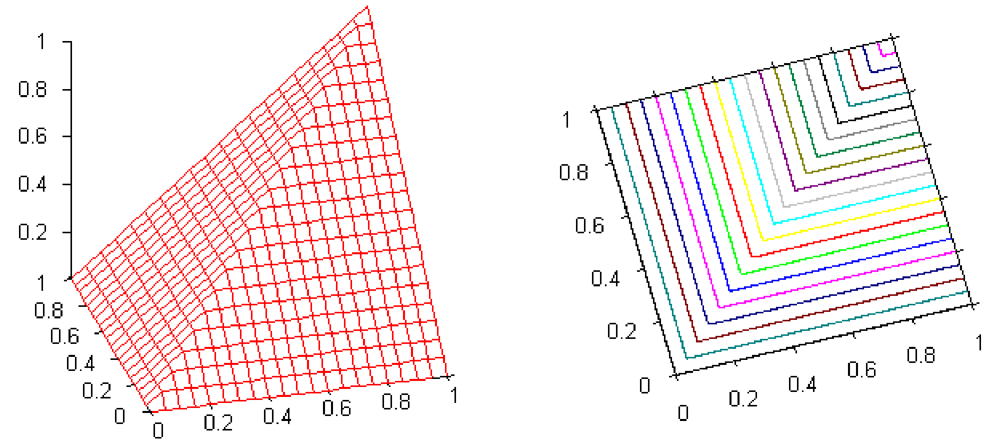
Kopule

ADFD

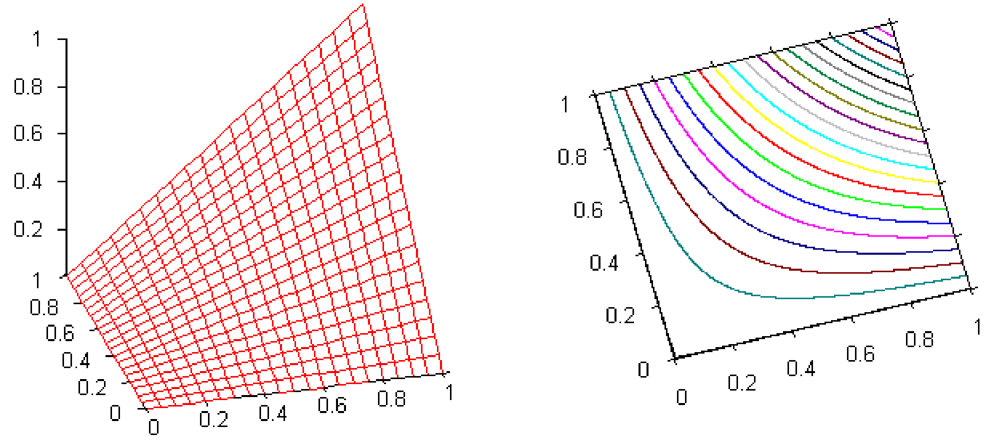
t-normy - definice

- Funkce T: $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$

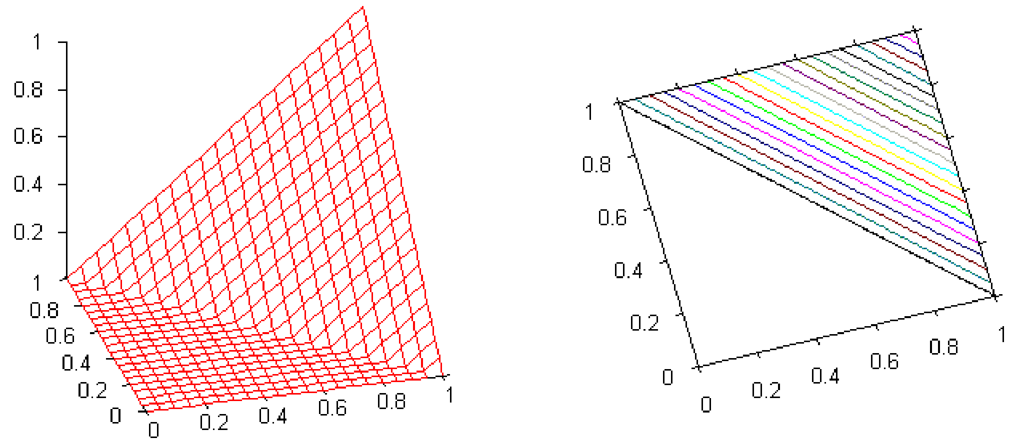
1) Okrajová podmínka:
   - $T(x, 1) = T(1, x) = x$
   - $T(x, 0) = T(0, x) = 0$
2) Neklesající:
   - Když $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_{2,}$, tak $T(x_1, y_1) \leq T(x_2, y_2)$
3) Komutativní
   - $\forall x, y \in I$: T(x,y) = T(y,x)
4) Asociativní:
   - $\forall x, y, z \in I$: $T(T(x, y), z) = T\big(x, T(y, z)\big)$



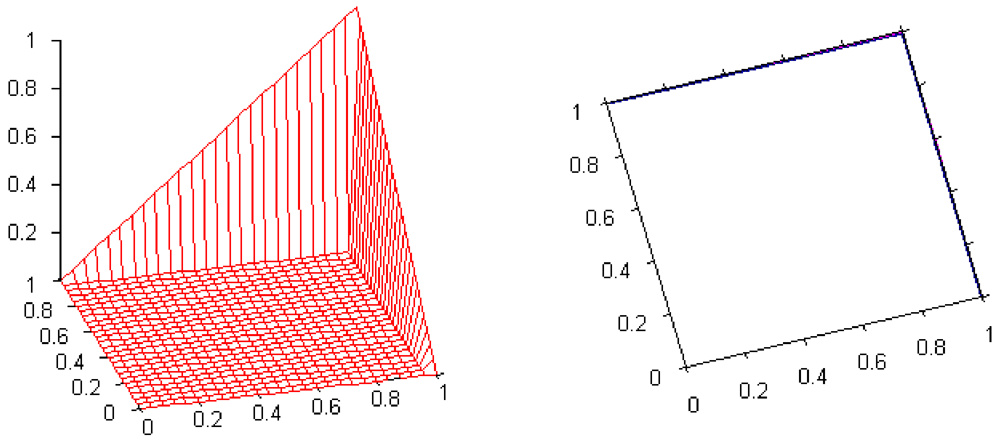
Minimová t-norma



Součinová t-norma



Łukasiewiczova t-norma



Drastický součin

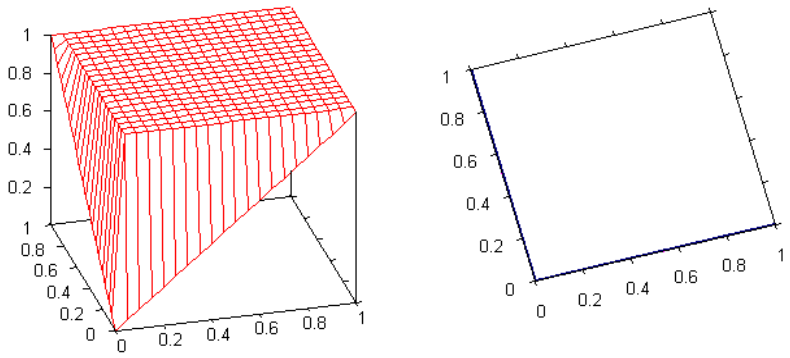
s-normy (t-konormy)

- Funkce S: $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$

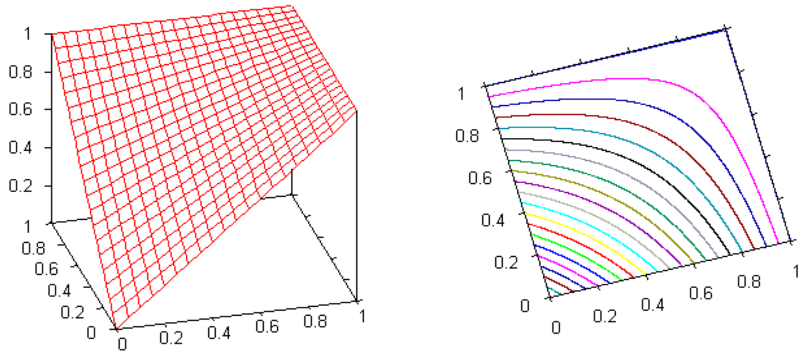
1) Okrajová podmínka:
   - $\mathrm{S}(x, 1) = S(1, x) = 1$
   - $\mathrm{S}(x, 0) = S(0, x) = x$
2) Neklesající:
   - Když $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_{2,}$, tak $\mathrm{S}(x_1, y_1) \leq S(x_2, y_2)$
3) Komutativní
   - $\forall x, y \in I$: S(x,y) = S(y,x)
4) Asociativní:
   - $\forall x, y, z \in I: S(S(x, y), z) = S\big(x, S(y, z)\big)$

s-normy (t-konormy)

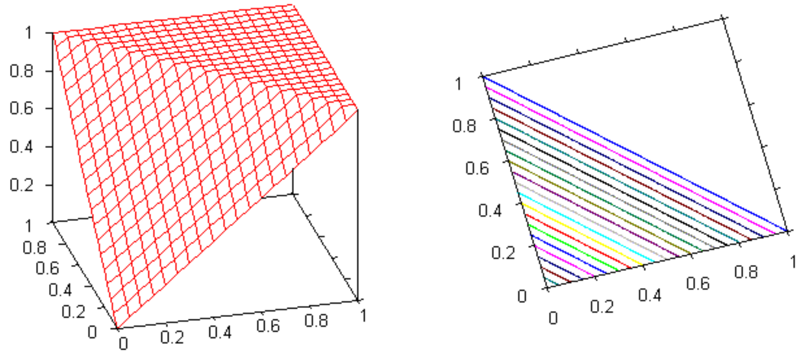
- Komplementární t-konormu pro t-normu lze získat: $S = 1 - T(1-x,\ 1-y)$



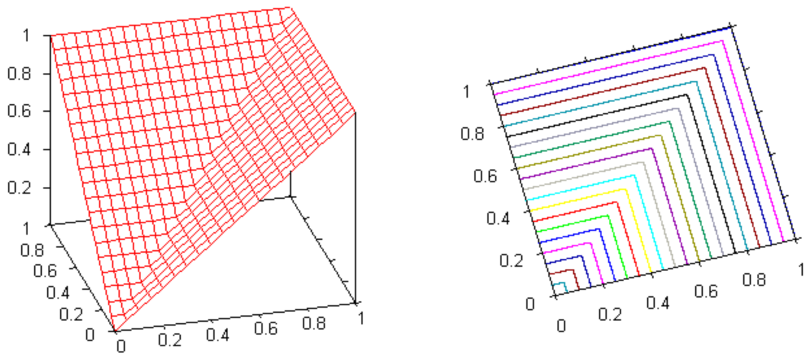
Drastický součet



Pravděpodobnostný součet



Łukasiewiczova s-norma



Maximová S-norma

Kopule - definice

- Funkce C: $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$

1) Okrajová podmínka:
   - $C(x, 1) = C(1, x) = x$
   - $C(x, 0) = C(0, x) = 0$
2) Monotónnost:
   - $C(x_1, y_1) - C(x_2, y_1) - C(x_1, y_2) + C(x_2, y_2) \geq 0$ pro $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$

- Ak je C kopula, tak platí:
  - $0 \leq C(x_2, y_2) - C(x_1, y_1) \leq x_2 - x_1 + y_2 - y_1$

Kopula vzťah t-normam

- T norma je kopulou právě tehdy, když splňuje Lipschitzovu podmínku:

- T(x_2, y) – T(x_1, y) $\leq x_2$ – x_1 , právě tehdy, když $x_1 \leq x_2$

- Pro každou kopuli C platí: $T_L \geq C \geq T_{Min}$

- Platí pro Lukasiewiczovu, minimovou, součinovou t-normu

Příklady

- 1. Najďete t-normu, která je kopulou.
- 2. Najďete t-normu, která není kopulou

Duální kopule

- Funkce $C^{\wedge}: I^2 \to I$
- Definice: $C^{\wedge}(x, y) = x + y - C(x, y)$
- Platí též, že pokud C je kopule a $C^{\wedge}$ je její duální kopule, tak
  - $C^{\wedge}$ splňuje okrajové podmínky:
  - $C^{\wedge}(x, 1) = C^{\wedge}(1, x) = 1$
  - $C^{\wedge}(x, 0) = C^{\wedge}(0, x) = x$

  - $C^{\wedge}$ je neklesající, v každém bodě
  - $C^{\wedge}$ je komutativní jen pokud je C komutativní

Duální kopule

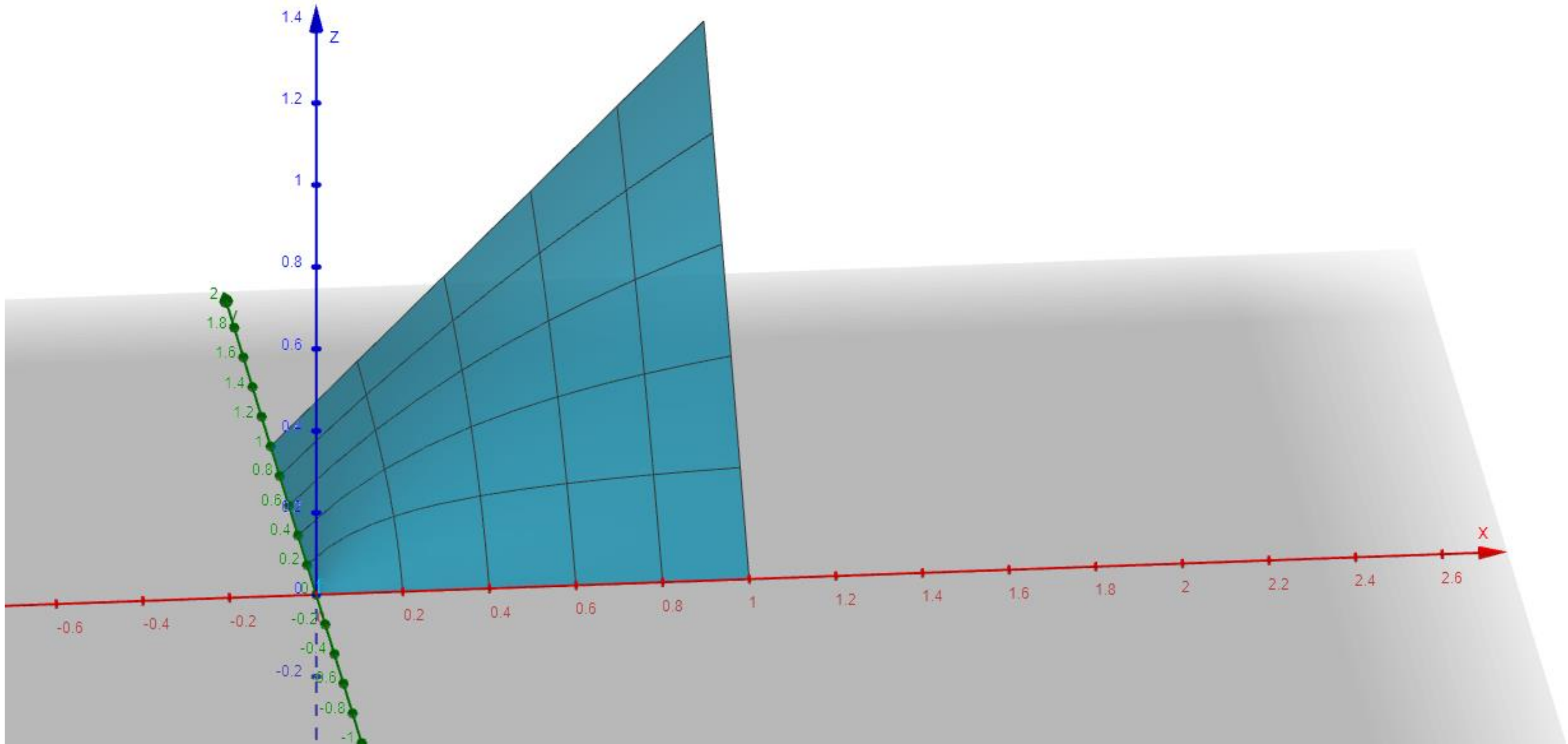
- Pokud C je t-norma, tak její duální kopule nemusí být s-normou
  - T_L , T_P, T_{Min} jsou výjimky

Příklad

3. Duální kopula ke kopule C je dána vztahem $C^d(x,y) = x + y - C(x,y)$. Duální t-norma k t-normě T je dána vztahem $S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y)$. Existuje t-norma, pro kterou je T^d a S stejná funkce?

Příklad

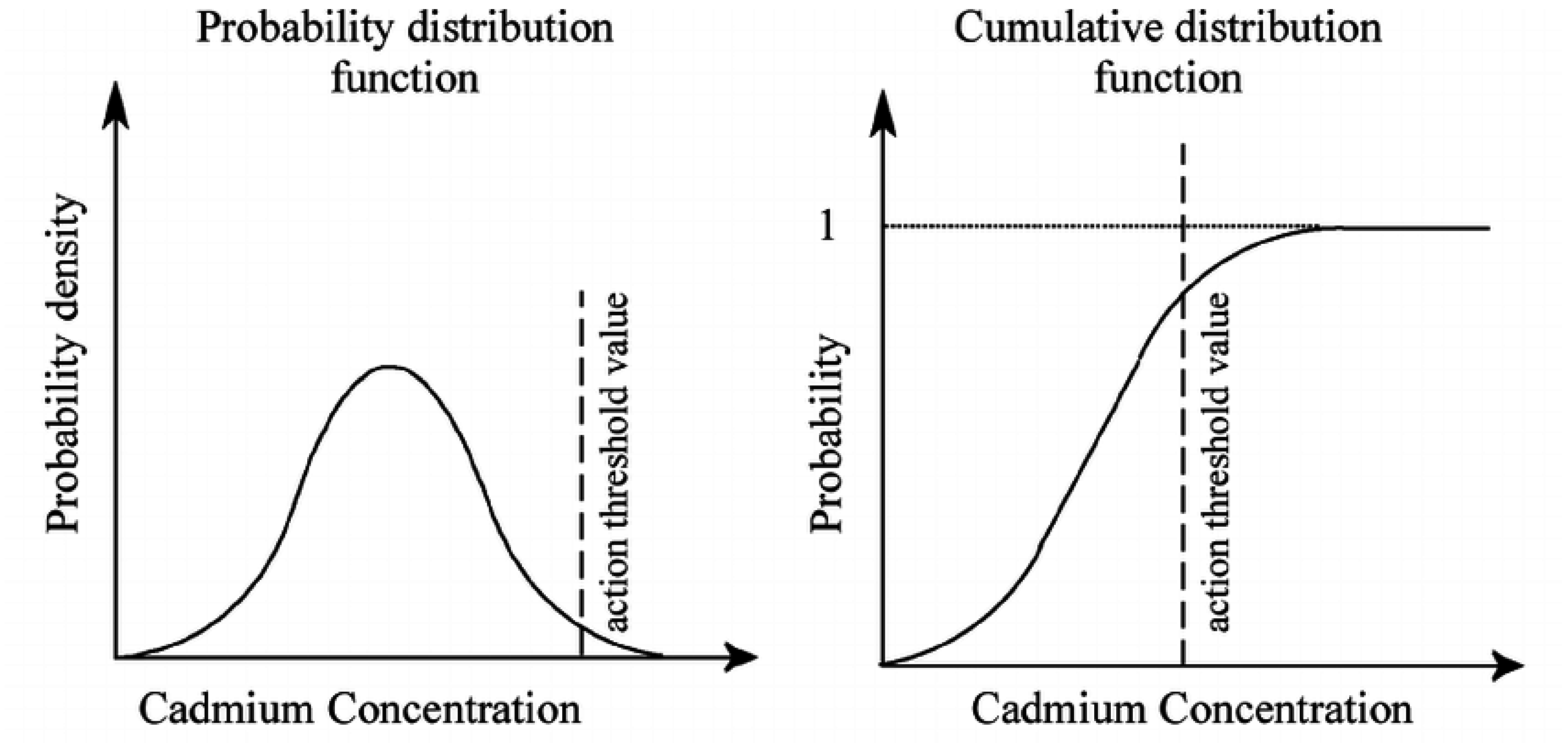
4. Zkoumejte vlastnosti kopuly $C(x,y) = \frac{xy}{x+y-xy}$.



Pravděpodobnost – opakování

- **Náhodná veličina**: funkce, která přiřazuje každému elementárnímu náhodnému jevu nějakou hodnotu
- **Distribuční funkce**: $F(x) = P(X \leq x)$
- **Náhodný vektor:** n-tice náhodných veličin
- **Sdružená distribuční funkce:** $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$
- **Marginální distribuční funkce:** $F_X(x) = P(X \leq x) = \lim_{y \to \infty} F(x, y)$
- **Nezávislost veličin:** Veličiny jsou nezávislé, právě když platí:
  - $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$
- **Tail dependence:** Závislost veličin ve velmi vysokých a nízkých hodnotách

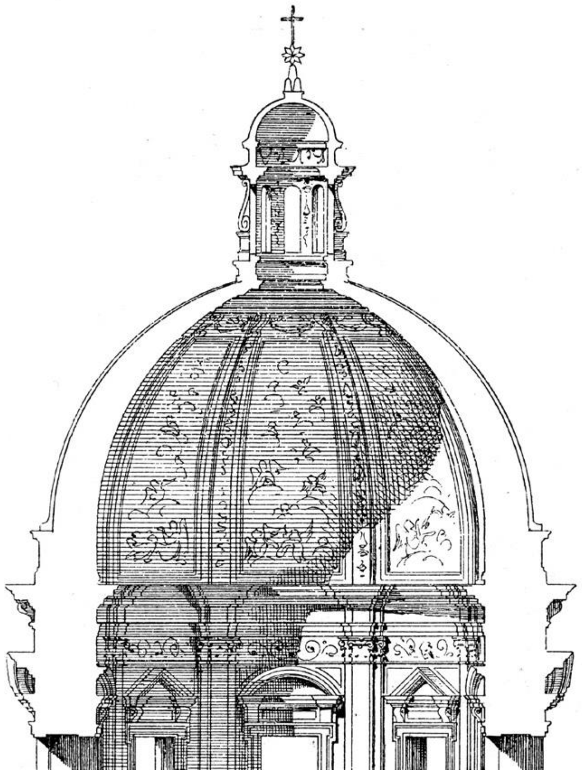
Pravděpodobnost – opakování



Kopule a statistika

- Kopule – lze také brát jako sdruženou distribuční funkci na intervalu [0, 1]
- Slouží k modelování závislosti mezi náhodnými veličinami
- Pro sdruženou distribuční funkci $H_{XY}(u, v) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \le \mathrm{u}, \mathrm{Y} \le v)$, marginální distribuční funkce $F_X(u)$ a $F_Y(v)$ platí:
  - $H_{XY}(u, v) = C_{XY}(F_X(u), F_Y(v))$
- Duální kopule:
  - $\mathrm{P}(X \le u \; or \; Y \le v) = F_X(u) + F_Y(v) - C_{XY}(F_X(u), F_Y(v)) = \hat{C}_{XY}(F_X(u), F_Y(v))$

Známé příklady kopulí

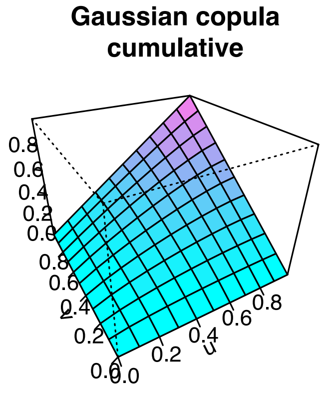
Známé příklady kopulí - archimedovské

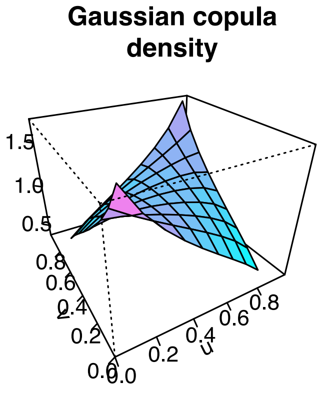
- Většina má explicitní předpis, dovolují modelovat závislost neomezeně mnoha veličin
- Nezávislost ($= T_P$) – nezávislost náhodných veličin

- Claytonova: $\left[\max\left\{u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1; 0\right\}\right]^{-1/\theta}$ $\quad \theta \in [-1, \infty)\setminus\{0\}$
  - Modelování nižší tail-dependence
- Gumbelova: $\exp\left[-\left((-\log(u))^{\theta} + (-\log(v))^{\theta}\right)^{1/\theta}\right]$ $\quad \theta \in [1, \infty)$
  - Modelování vyšší tail-dependence
- Joeova: $1 - \left[(1-u)^{\theta} + (1-v)^{\theta} - (1-u)^{\theta}(1-v)^{\theta}\right]^{1/\theta}$ $\quad \theta \in [1, \infty)$
  - Modelování vyšší tail-dependence

Známé příklady kopulí

- Gaussovské
  - Založeny na vícerozměrném normálním rozložení
- T-kopule
  - Založeny na vícerozměrném Studentově rozložení





Známé příklady kopulí