Konstrukce spojitých t-norem
Aditivní a multiplikativní generátory

DOTRIVO

Aditivní a multiplikativní generování

Nech funkce f: $[0,1] \rightarrow [0,\infty]$ je spojitá a klesající, přičem $f(1) = 0$,

potom předpisem:

$$\mathbf{T_{<f>}(x, y) = f^{-1} (min(f(x) + f(y), f(0)))}$$

je daná t-norma a funkce f se nazývá aditivní generátor t-normy $T_{<f>}$.

Nech funkce f: $[0,1] \rightarrow [0,\infty]$ je spojitá a rostoucí, přičem $g(1) = 1$,

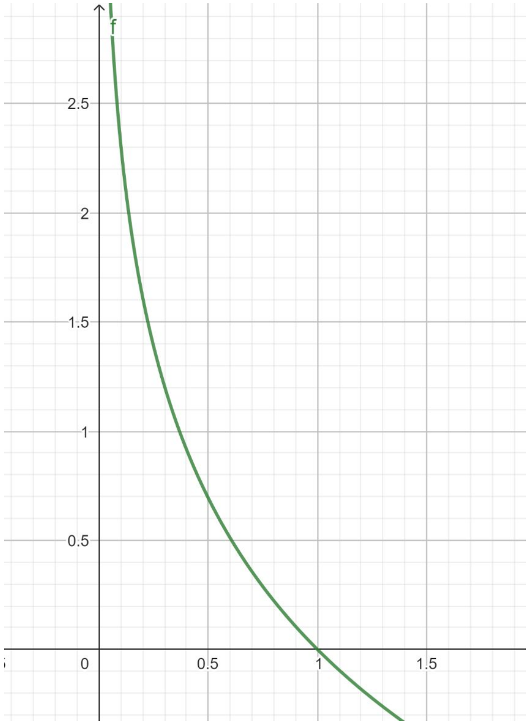
potom předpisem:

$$\mathbf{T^{<g>}(x, y) = g^{-1} (max(g(x) * g(y), g(0)))}$$

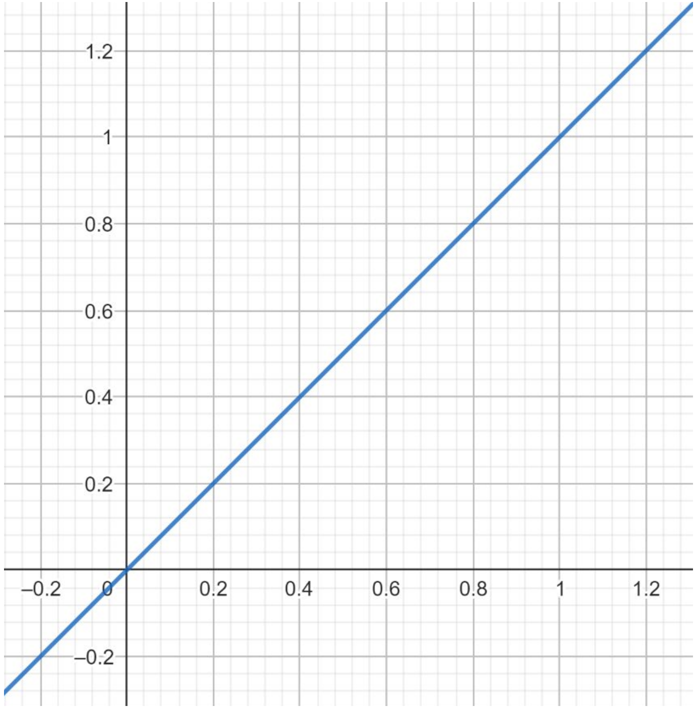
je daná t-norma a funkce g se nazývá multiplikativní generátor t-normy $T^{<g>}$.

Aditivní a multiplikativní generátor součinové T-normy

$f(x)=-\ln(x)$

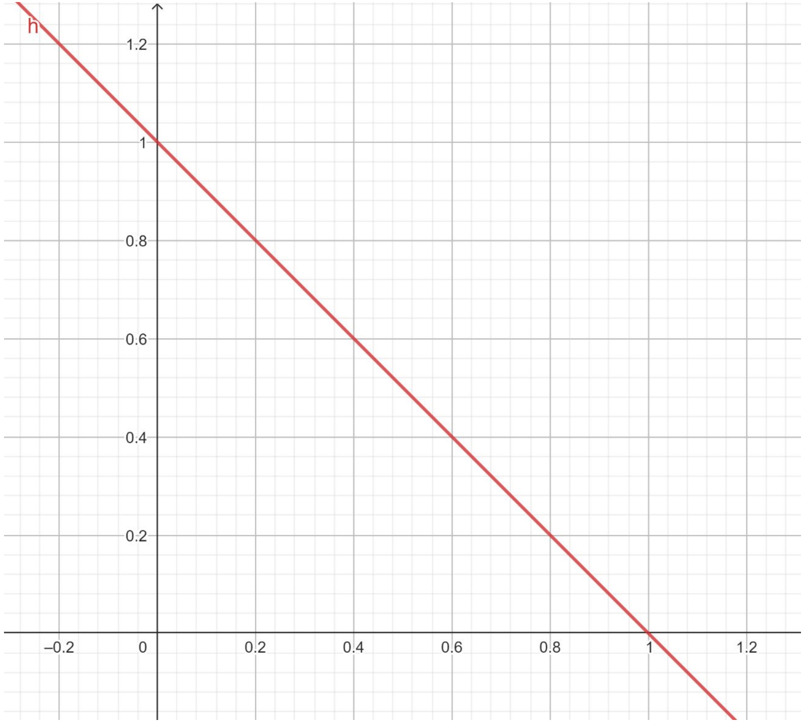


$g(x)=x$

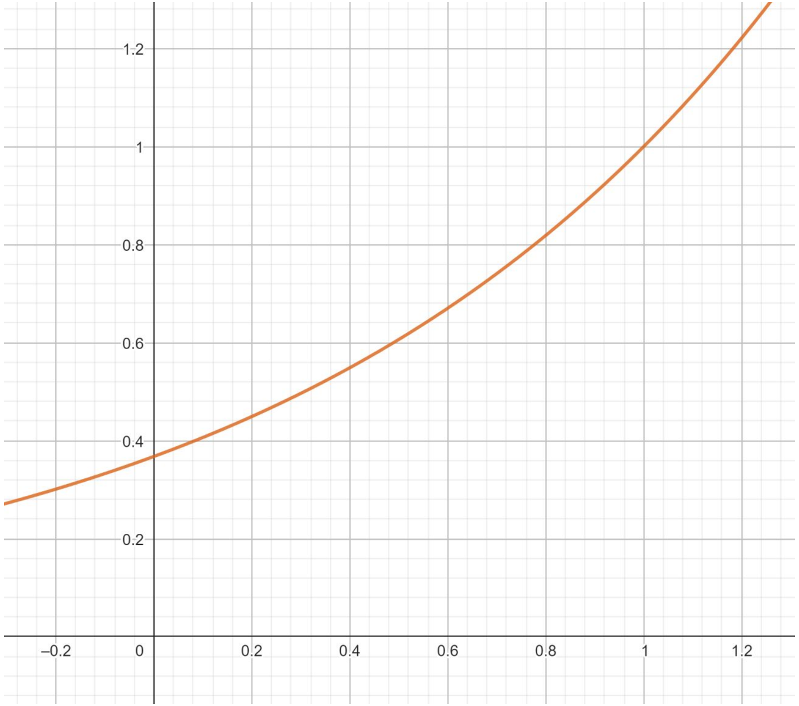


Aditivní a multiplikativní generátor Lukasiewiczovy T-normy

$f(x)=1-x$



$g(x)=e^{-(1-x)}$



Př. 1)

Nechť $g(x) = 2(1-x)$. Pro kterou t-normu je funkce g aditivní generátor?

Př. 3)

Nechť *g* je aditivní generátor spojité t-normy a c ∈ R+.

V jakém vztahu budou t-normy generované generátory *g* a *c.g*?

Striktnost a nilpotentnost

Triangularní norma T je **striktní** právě tehdy, když pro každý její

aditvní generátor platí **$f(0) = +\infty$**.

(Pro všechny **multiplikatvní generátory** platí **$g(0) = 0$**.)

Triangularní norma T je **nilpotentní** právě tehdy, když pro každý její

aditvní generátor platí **$f(0) < +\infty$**.

(Pro všechny **multiplikatvní** generátory platí **$g(0) > 0$**.)

Věta. (Klement, Mesiar, Pap): Funkce $T : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ je **striktní** t-norma právě tehdy, když existuje **roustoucí bijekce** $\boldsymbol{\varphi}$: $[0, 1]^2 \to [0, 1]$, taková, že $T = (T_P)_\varphi$, t.j., že pro každé $x, y \in [0, 1]$ je

$$\mathbf{T(x, y) = \varphi^{-1}(T_P\,(\varphi(x), \varphi(y)))}.$$

Věta. (Klement, Mesiar, Pap): Funkcia $T : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ je **nilpotentní** t-norma právě tehdy, když existuje **rastoucí bijekce** $\boldsymbol{\varphi}$: $[0, 1]^2 \to [0, 1]$, taková, že $T = (T_P)_\varphi$, t.j., že pro každé $x, y \in [0, 1]$ je

$$\mathbf{T(x, y) = \varphi^{-1}(T_L\,(\varphi(x), \varphi(y)))}.$$

Př. 2)

Popište vztahy mezi aditivními a multiplikativními generátory spojitých t-norem.

Vztahy mezi aditivním a multiplikativním generátorem

Pokud f: [0, 1] → [0, 1] je aditivní generátor spojité archimedovské t-normy T,

tak g : [0, 1] → [0; 1] daná předpisem **g(x) =** $\mathbf{e^{-f(x)}}$

je **multiplikatvní generátor** t-normy T.

Pokud g: [0, 1] → [0, 1] je multiplikatvní generátor spojité archimedovské t-normy T,

tak f : [0, 1] → [0, 1] daná předpisem **f(x) = -ln(g(x))**

je **aditvní generátor** t-normy T.

Některé známé t-normy

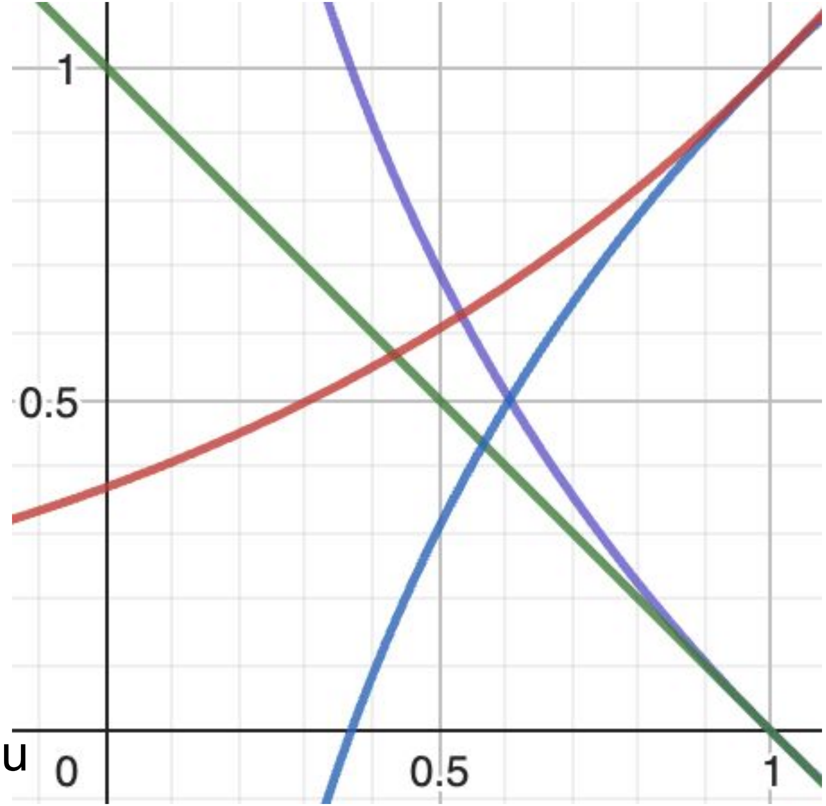
Minimová t-norma

Není archimedovská => generátory neexistují

Łukasiewiczova t-norma T_L

$f(x) = 1-x$ $\quad$ $f^{-1}(x) = 1-x$

$g(x) = e^{-(1-x)}$ $\quad$ $g^{-1}(x) = 1+\ln(x)$



Taky funguje pro součinovou a drastickou t-normu, protože jsou archimedovské.

A teď obecněji…

Podmínky:

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty] \text{ a } g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$f_p(x) = -p. \ln x, \; g_p(x) = x^p$$

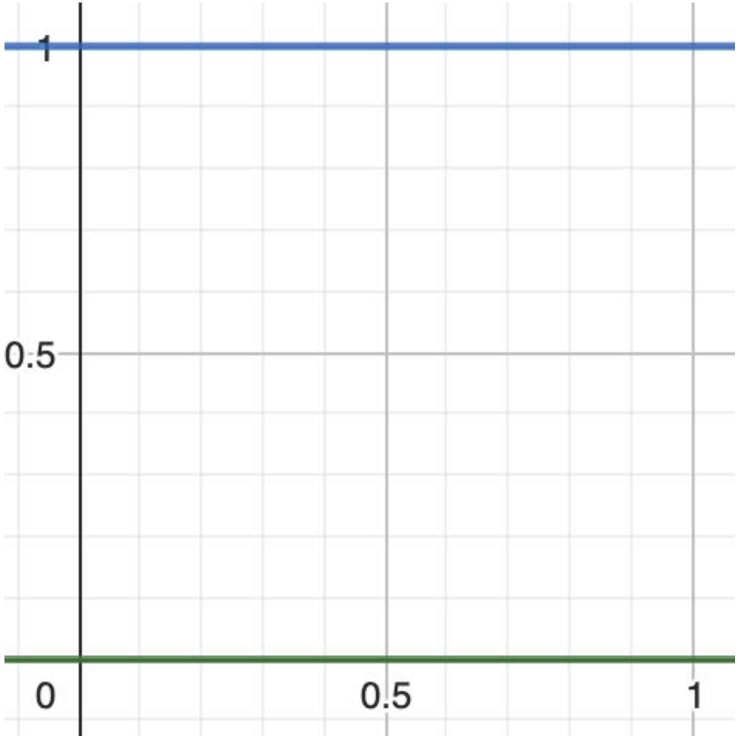
Jaké by mělo být to p?

p = 0

$f(x) = -0\ln(x) = 0$
$g(x) = x^0 = 1$

$f^{-1}(x) =$ neex.
$g^{-1}(x) =$ neex.

TAK TAKHLE NE!



$p = -3$

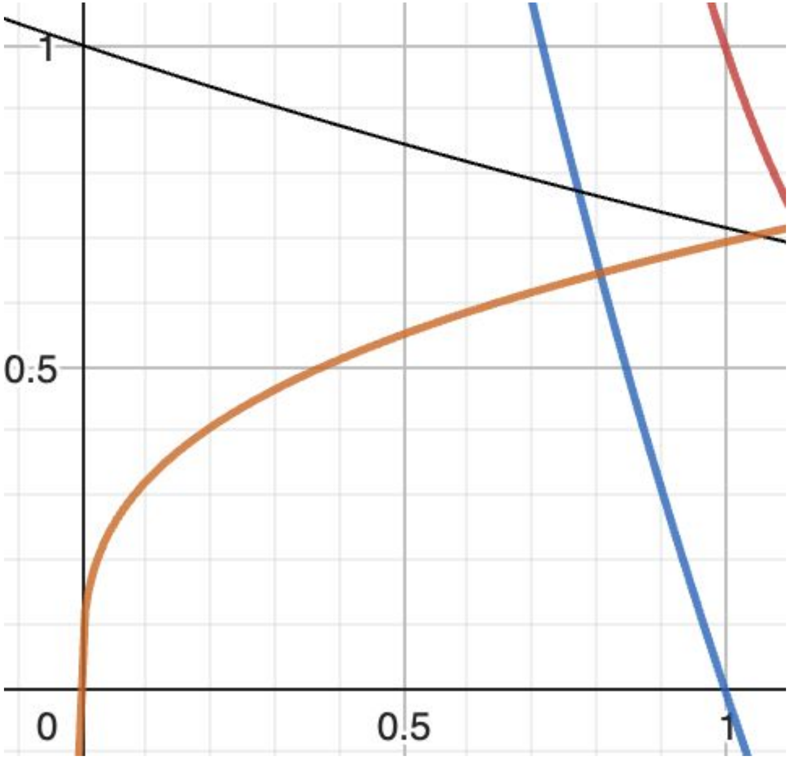
$f(x) = -3\ln(x)$

$g(x) = x^{-3}$

$f^{-1}(x) = e^{-x/3}$

$g^{-1}(x) = (x/3)^{1/3}$

Tudy vlak nejede…



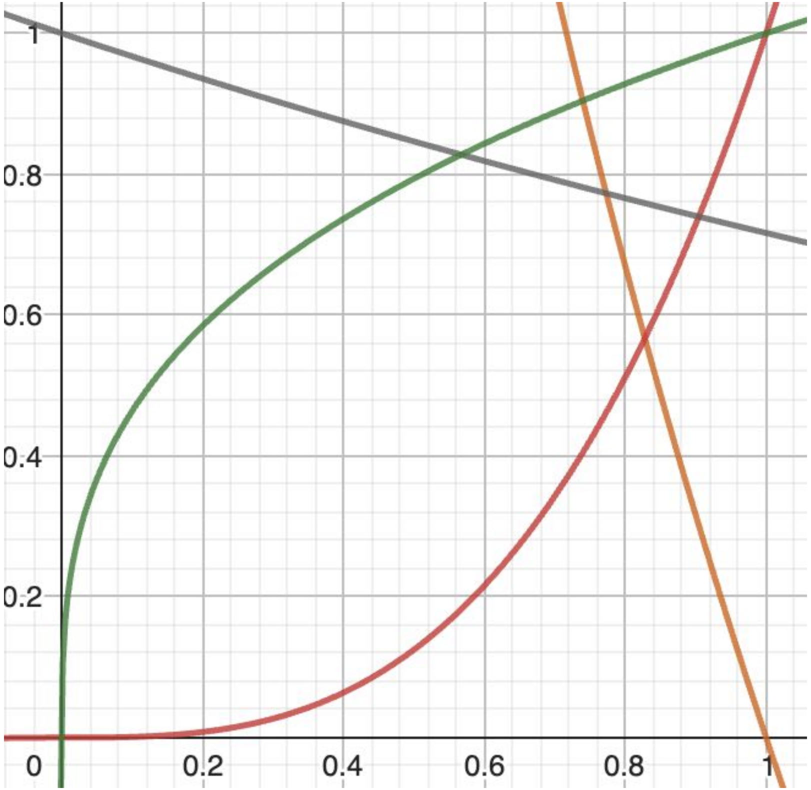
$p = 3$

$f(x) = -3\ln(x)$

$g(x) = x^3$

$f^{-1}(x) = e^{-x/3}$

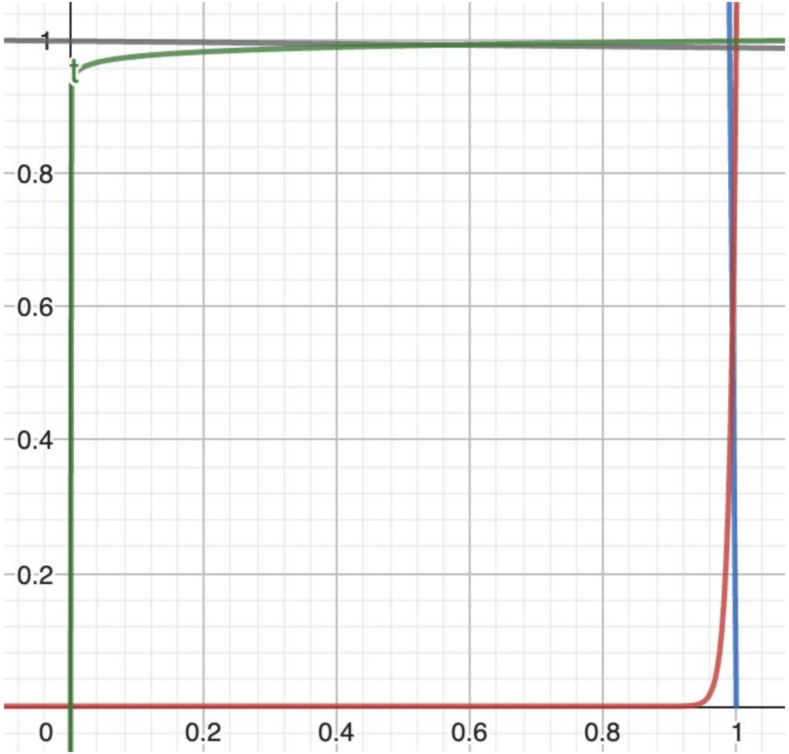
$g^{-1}(x) = x^{1/3}$



$p = 99$

$f(x) = -99\ln(x)$
$g(x) = x^{99}$

$f^{-1}(x) = e^{-x/99}$
$g^{-1}(x) = x^{1/99}$



$$f_p(x) = -p.\ln x,\ g_p(x) = x^p$$

p > 0 ✅ => $P_{<f_p>}(x, y) = P^{<g_p>}(x, y)$

p < 0 ❌

p = 0 ❌

Př. 4)

Nechť g,f jsou multiplikativní generátory spojitých t-norem. V jakém vztahu budou t-normy generované generátorem g, f a $g \circ f$?