Fuzzy implikace

Skažená niva se S

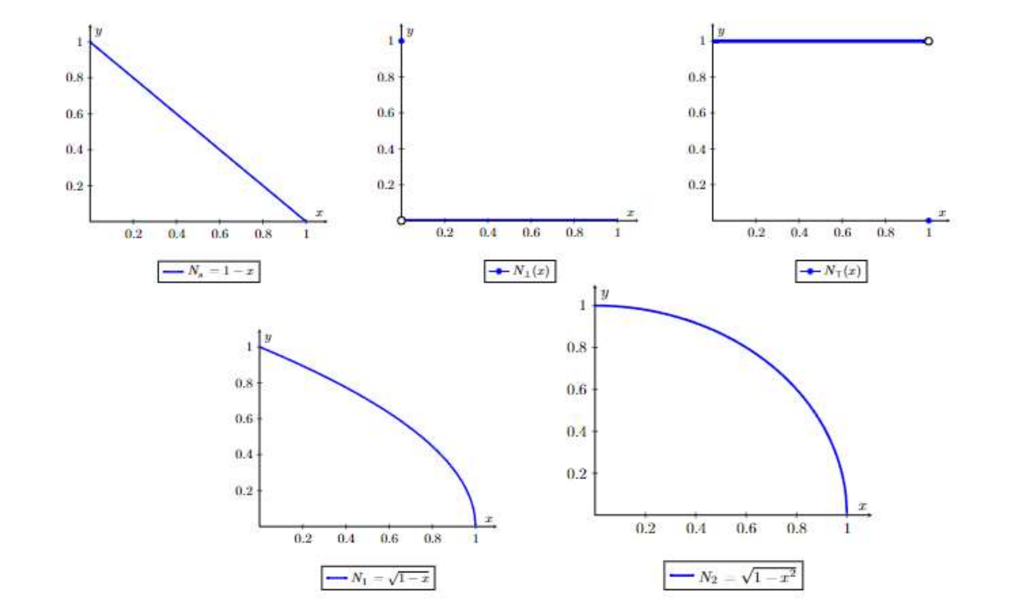
Fuzzy negace

Definice 1.

Fuzzy negací nazýváme každou funkci

$N:[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ s vlastnostmi:

- $N(0) = 1, N(1) = 0,$
- $\forall\ x, y \in [0, 1]\colon x < y \Rightarrow N(x) \geq N(y).$

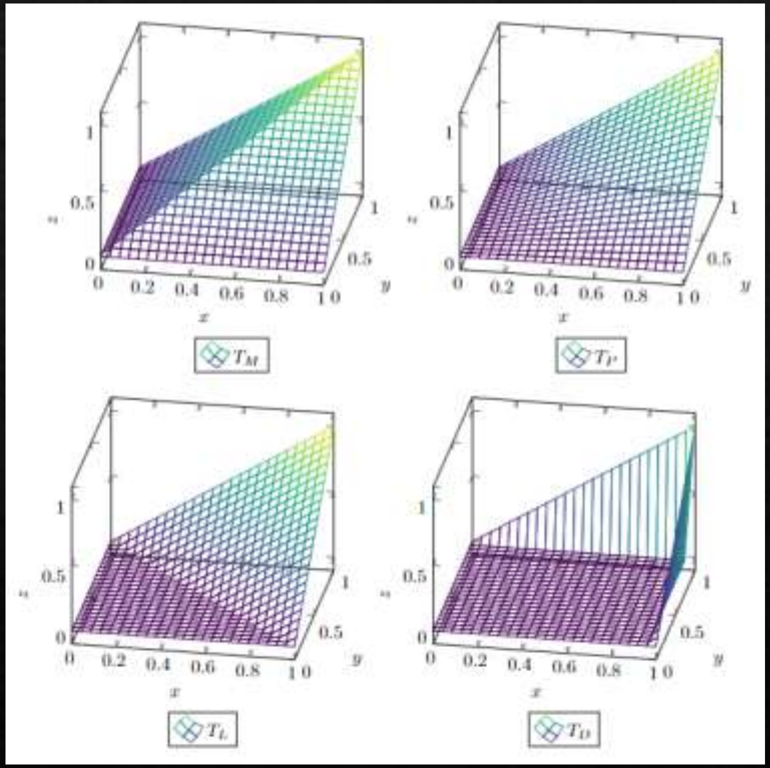


T-normy

Definice 2.

Triangulární norma je binární operace na jednotkovém intervale [0,1], t.j. funkce T: $[0,1]^2 \to [0,1]$ taková, že pro každé $x, y, z \in [0,1]$ jsou splněné následující axiomy:

- *Komutativnost: T(x, y) = T(y, x)*
- *Asociativita: T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)*
- *Monotónnost:* $T(x,y) \geq T(x,z)$, *pokud* $y \geq z$
- *Okrajová podmínka: T(x, 1) = x*

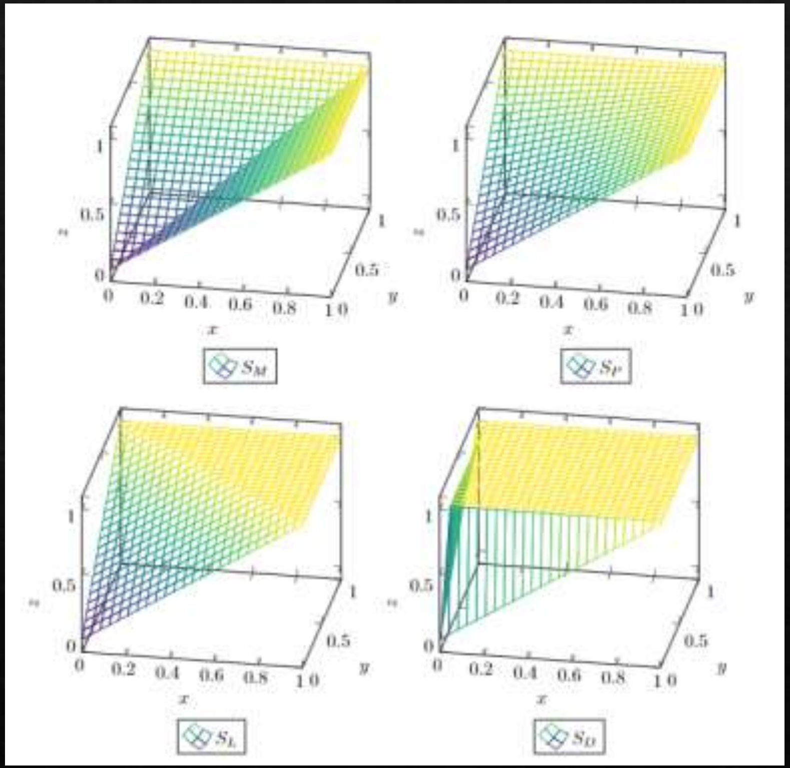


T-konormy

Definice 3.

T-konorma je binární operace na intervalu [0,1], t.j. funkce $S\colon [0,1]^2 \to [0,1]$ *taková, že pro každé* $x, y, z \in [0,1]$ *jsou splněny následující axiomy:*

- *Komutativnost: S(x, y) = S(y, x)*
- *Asociativita: S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)*
- *Monotónnost:* $S(x, y) \leq S(x, z)$ *pokud* $y \leq z$
- *Okrajová podmínka: S(x,0) = x*



Implikace?

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Implikace → fuzzy implikace?

$$p \Rightarrow q$$

$$\neg p \vee q$$

$$\neg p \vee (p \wedge q)$$

Implikace → fuzzy implikace?

$$p \Rightarrow q$$

$$\neg p \vee q$$

$$\neg p \vee (p \wedge q)$$

$$I(x, y) = S(N(x), y)$$

$$I(x, y) = S\big(N(x), T(x, y)\big)$$

Fuzzy implikace?

Definice 4.

Funkce $I: [0,1]^2 \to [0,1]$ *se nazývá fuzzy implikace, pokud splňuje pro všechna* $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in [0,1]$*, následující podmínky:*

1. $I(x_1, y) \geq I(x_2, y), pokud\ x_1 \leq x_2 \quad (I(\cdot, y)\ je\ klesající)$
2. $I(x, y_1) \leq I(x, y_2), pokud\ y_1 \leq y_2 \quad (I(x, \cdot)\ je\ rostoucí)$
3. $I(0,0) = 1$
4. $I(1,1) = 1$
5. $I(1,0) = 0$

$(I(0,1) = 1)$

Fukce od $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]^{\mathbf{2}}$ do $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$	1.	2.	3.	4.	5.
$I_1(x, y) = \max(1 - x, \min(x, y))$	×	✓	✓	✓	✓
$I_{2(x,y)} = \max(y, \min(1 - x, 1 - y))$	✓	×	✓	✓	✓
$I_3(x, y) = \begin{cases} 0, & pokud\ y < 1 \\ 1, & pokud\ y = 1 \end{cases}$	✓	✓	×	✓	✓
$I_4(x, y) = \begin{cases} 1, & pokud\ x = 0 \\ 0, & pokud\ x > 0 \end{cases}$	✓	✓	✓	×	✓
$I_5(x, y) = 1$	✓	✓	✓	✓	×

Základní vlastnosti fuzzy implikací

Definícia. Hovoríme, že implikátor $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ spĺňa:

(NP) ľavý princíp neutrality, ak

$$I(1, y) = y; \quad y \in [0,1],$$

(EP) princíp zámeny, ak

$$I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z)) \text{ pre každé } x, y, z \in [0,1],$$

(IP) princíp identity, ak

$$I(x, x) = 1; \quad x \in [0,1],$$

(OP) vlastnosť usporiadania

$$x \leq y \iff I(x,y) = 1; \quad x, y \in [0,1],$$

(CP) kontrapozitivitu vzhľadom na daný negátor N, ak

$$I(x,y) = I(N(y), N(x)); \quad x, y \in [0,1].$$

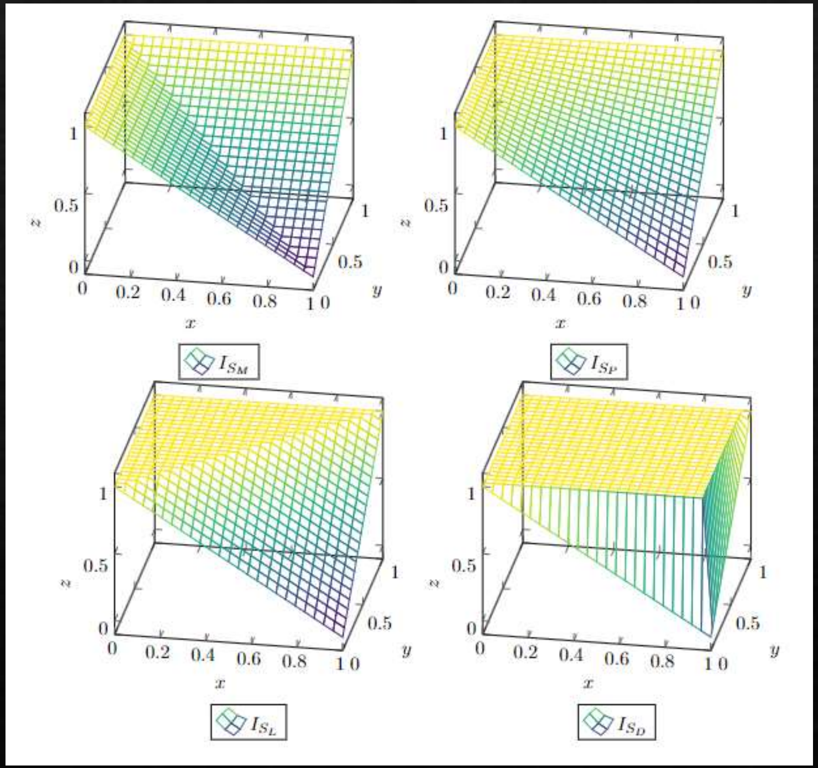
Základní implikátory

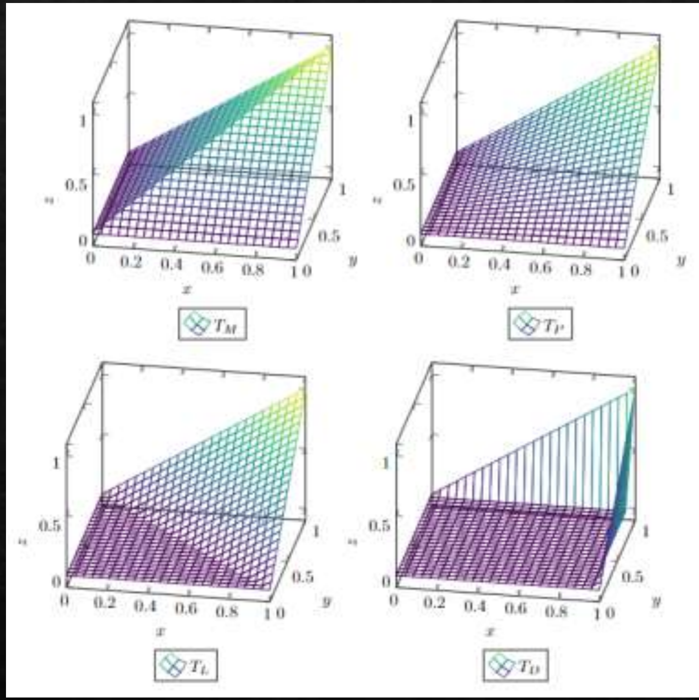
$$I_{S_M}(x,y) = max(1-x,y),$$

$$I_{S_P}(x,y) = 1 - x + x.y,$$

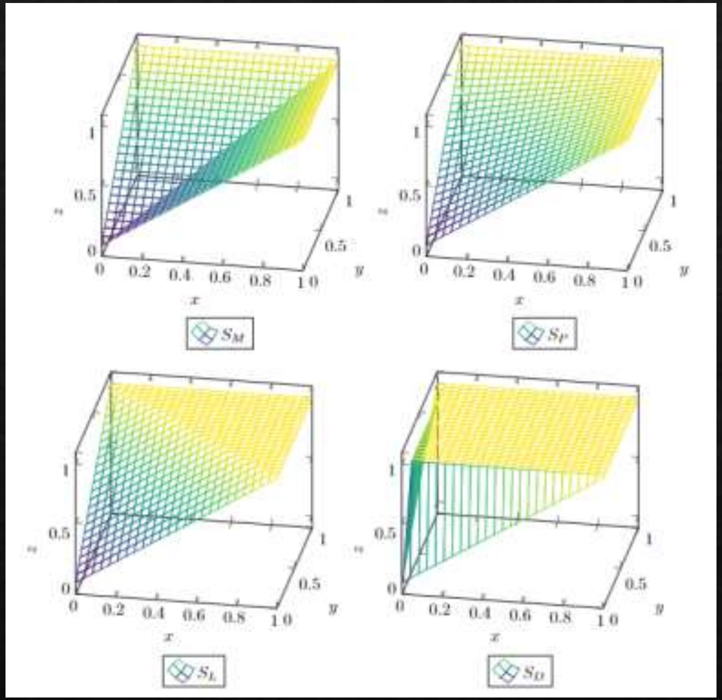
$$I_{S_L}(x,y) = min(1-x+y,1),$$

$$I_{S_D}(x,y) = \begin{cases} 1-x, & pokud\ y = 0, \\ y, & pokud\ x = 1, \\ 1, & jinak. \end{cases}$$

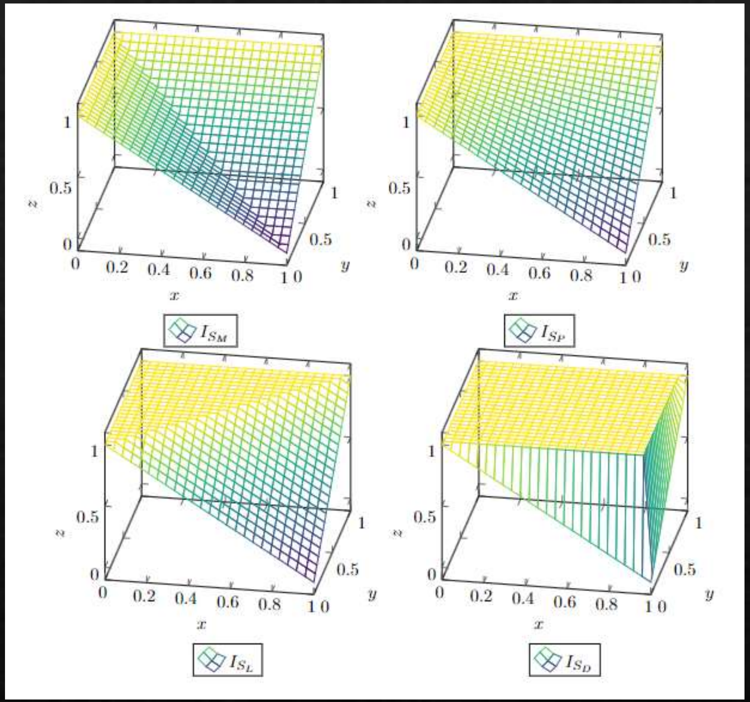




T_M
T_P
T_L
T_D



S_M
S_P
S_L
S_D



I_{S_M}
I_{S_P}
I_{S_L}
I_{S_D}

Kvantová implikace

$$\neg p \vee (p \wedge q)$$

$$I(x, y) = S\big(N(x), T(x, y)\big)$$

$$N_{I_{T,S,N}}(x) = N(x)$$

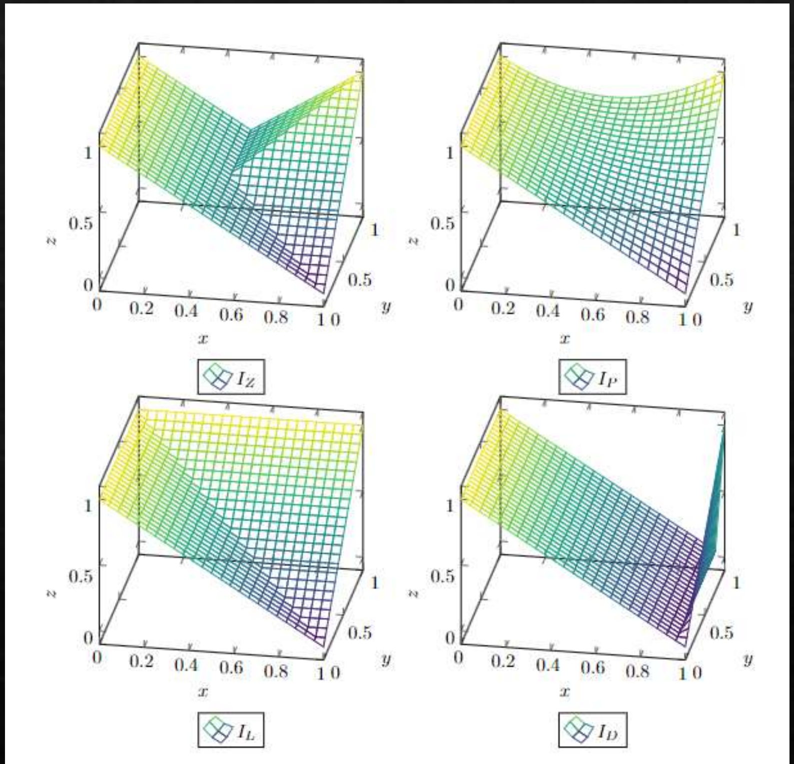
Základní QL-implikátory

$$I_Z(x,y) = \max\big(1 - x, \min(x,y)\big),$$

$$I_P(x,y) = 1 - x + x^2 y,$$

$$I_L(x,y) = \max(1 - x, y),$$

$$I_D(x,y) = \begin{cases} y, & pokud\ x = 1, \\ 1 - x, & jinak. \end{cases}$$



(S,N)-implikace

$$\neg p \lor q$$

$$I(x, y) = S(N(x), y)$$

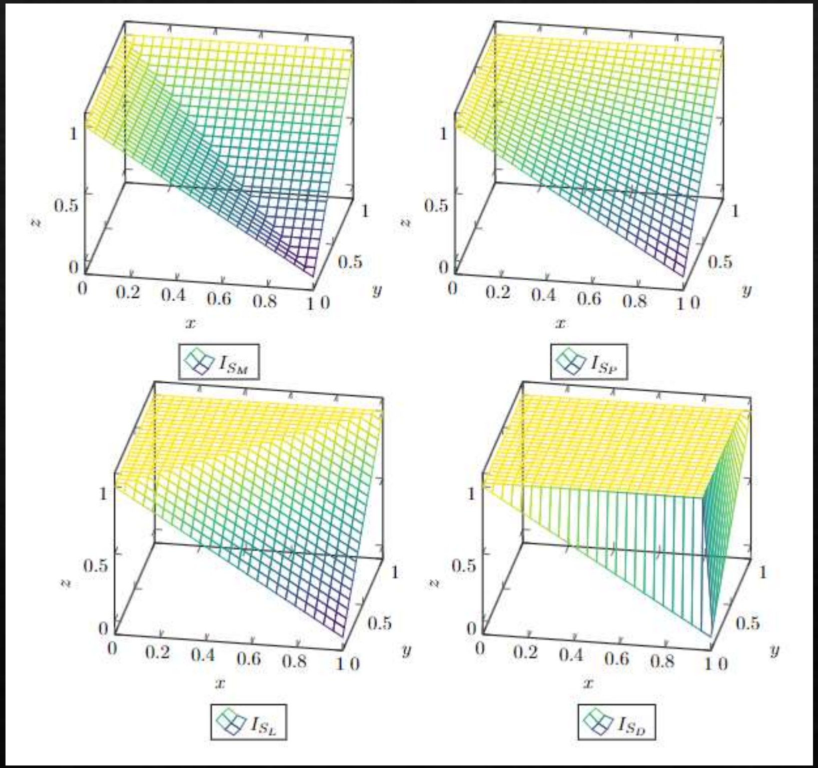
Základní (S,N)-implikátory

$$I_{S_M}(x,y) = max(1-x,y),$$

$$I_{S_P}(x,y) = 1-x+x.y,$$

$$I_{S_L}(x,y) = min(1-x+y,1),$$

$$I_{S_D}(x,y) = \begin{cases} 1-x, & pokud\ y=0, \\ y, & pokud\ x=1, \\ 1, & jinak. \end{cases}$$

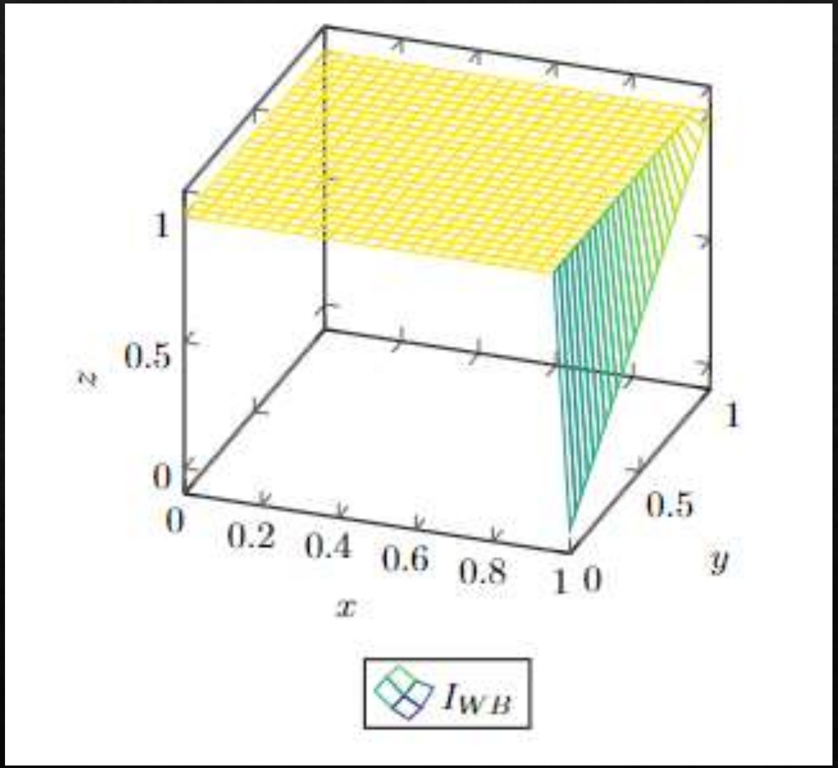


Srovnání (S,N)- a QL-implikací

Teorém 1.

QL – implikace $I_{T,\,S,N}$, *kde S je kladná t-konorma, je součsně i (S,N) – implikací. Ve skutečnosti* $I_{T,\,S,N} = I_{WB}$.

$$I_{WB} = \begin{cases} 1, & pokud\ x < 1, \\ y, & pokud\ x = 1. \end{cases}$$



Reziduální implikace

$$A' \cup B \equiv (A \backslash \mathrm{B})' \equiv \bigcup \{C \subseteq X \mid A \cap C \subseteq B\}$$

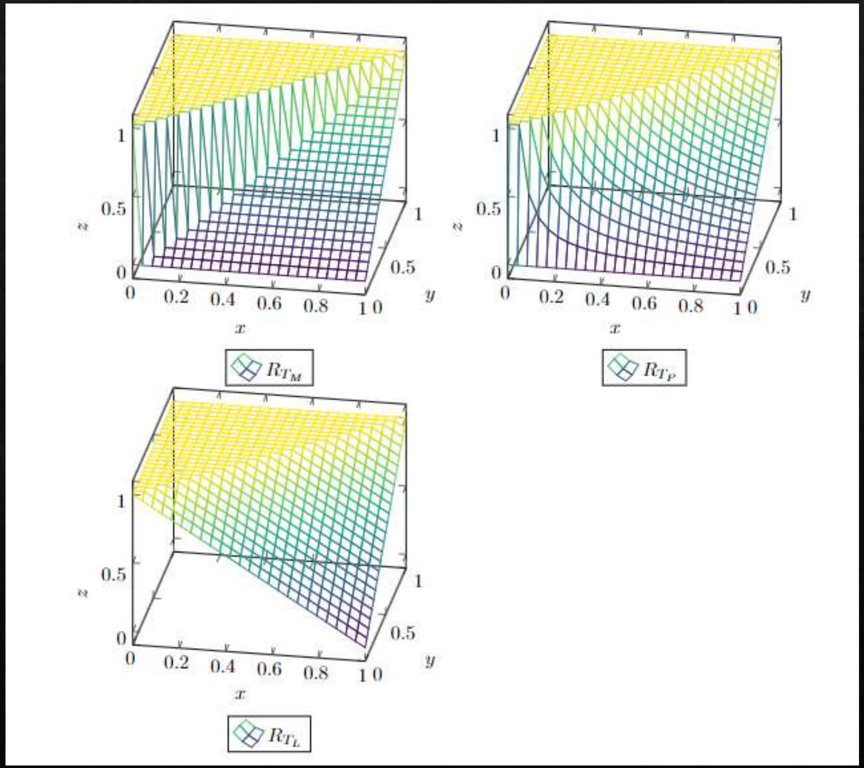
$$R_T(x, y) = \sup\{z \in [0,1] \, ; \, T(x, z) \leq y\}$$

Základní R-implikátory

$$R_{T_M}(x,y) = \begin{cases} 1, & pokud\ x \leq y, \\ y, & jinak \end{cases}$$

$$R_{T_P}(x,y) = \min\left(\frac{y}{x}, 1\right),$$

$$R_{T_L}(x,y) = min(1 - x + y, 1).$$



Ekvivalence pro R-implikace

T-norma T je zleva spojitá,

T a I_T splňují následující princip reziduality:

$$T(x,t) \leq y \equiv I_T(x,y) \geq t,$$

supremum v předchozí rovnici je celkové maximum, tedy platí:

$$I_T(x,y) = \max\{z \in [0,1]\ ;\ T(x,z) \leq y\}.$$

Ekvivalence pro R-implikace

T-norma T je hraničně spojitá,

I_T splňuje vlastnost uspořádání.

Ekvivalence pro R-implikace

$I : [0,1]^2 \to [0,1]$ je R-implikace generovaná z t-normy spojité zleva,

I splňuje následující vlastnosti:

- $I(x\,, y_1) \geq I(x, y_2), pokud\ y_1 \leq y_2 \quad (I(x,\ \cdot\,)\ je\ rostoucí),$
- princip záměny,
- vlastnost uspořádání.

1. Nechť $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ je t-norma a $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ je rostoucí bijekce, potom T_φ je také t-norma. Vyšetřete residuální implikace, které vzniknou pomocí $(T_M)_\varphi$.

2. Nechť $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ je t-norma a $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ je neklesající funkce, potom T_φ je také t-norma. Vyšetřete residuální implikace, které vzniknou pomocí $(T_M)_\varphi$.