Triangulárne normy

Tím Perla

Konjunktor

- Neklesajúce zobrazenie $C : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ sa nazýva konjunktor, ak pre ľubovoľné $a, b \in [0, 1]$ platí:
- $C(a, b) = 0$ ak $a = 0$, alebo $b = 0$,
- $C(1, 1) = 1$.

Triangulárna norma

- Triangulárna norma (t-norma) je binárna operácia na jednotkovom intervale [0, 1]
  T : [0, 1]2 → [0, 1]
- Pre každé x,y,z ∈ [0, 1] platia nasledujúce axiómy:

1. T1 Komutatívnosť

   T(x, y) = T(y, x)

2. T2 Asociatívnosť

   T(x, T(y, z)) = T(T(x,y), z)

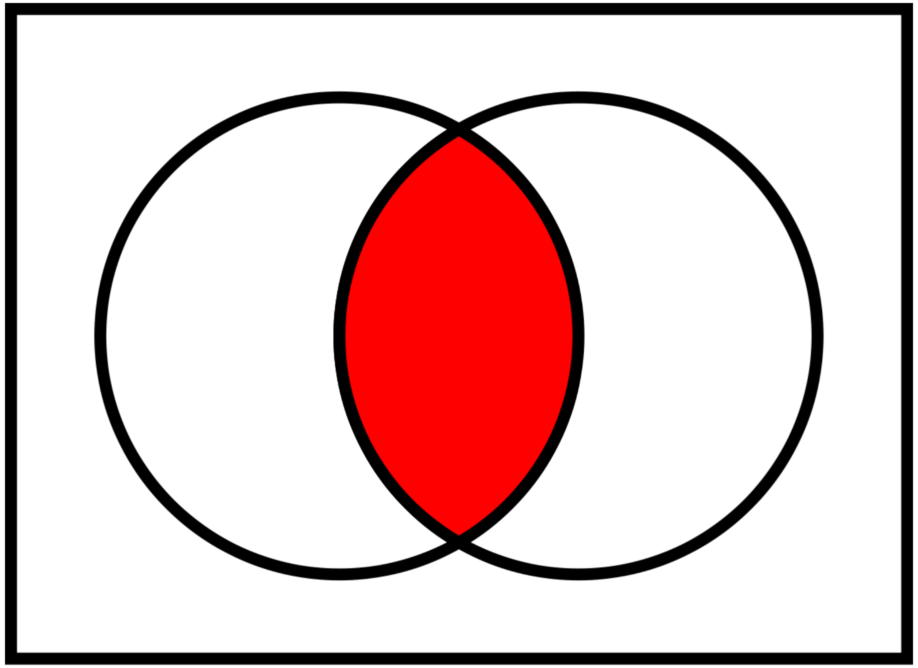
3. T3 Monotónnosť

   Ak y <= z, tak T(x, y) <= T(x, z)

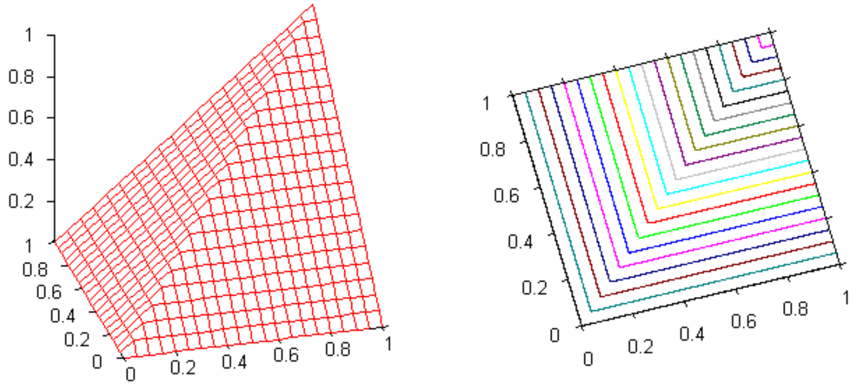
4. T4 Okrajová podmienka

   T(x, 1) = x

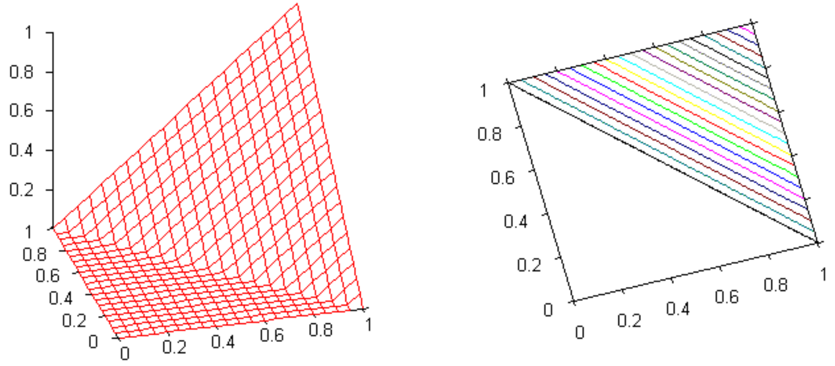
   T(0, x) = T(x, 0) = 0



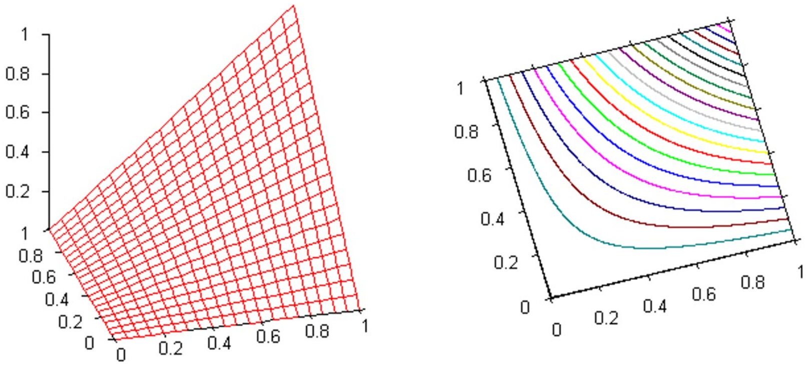
Najznámejšie t-normy



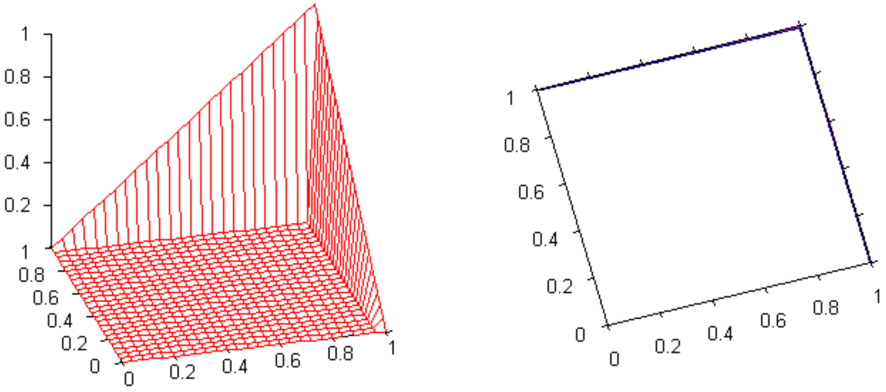
Minimová t-norma: $T_M(x, y) = \min(x, y)$



Lukasiewiczova t-norma: $T_L(x,y) = \max(x + y - 1, 0)$



Súčinová t-norma: $T_P(x, y) = xy$

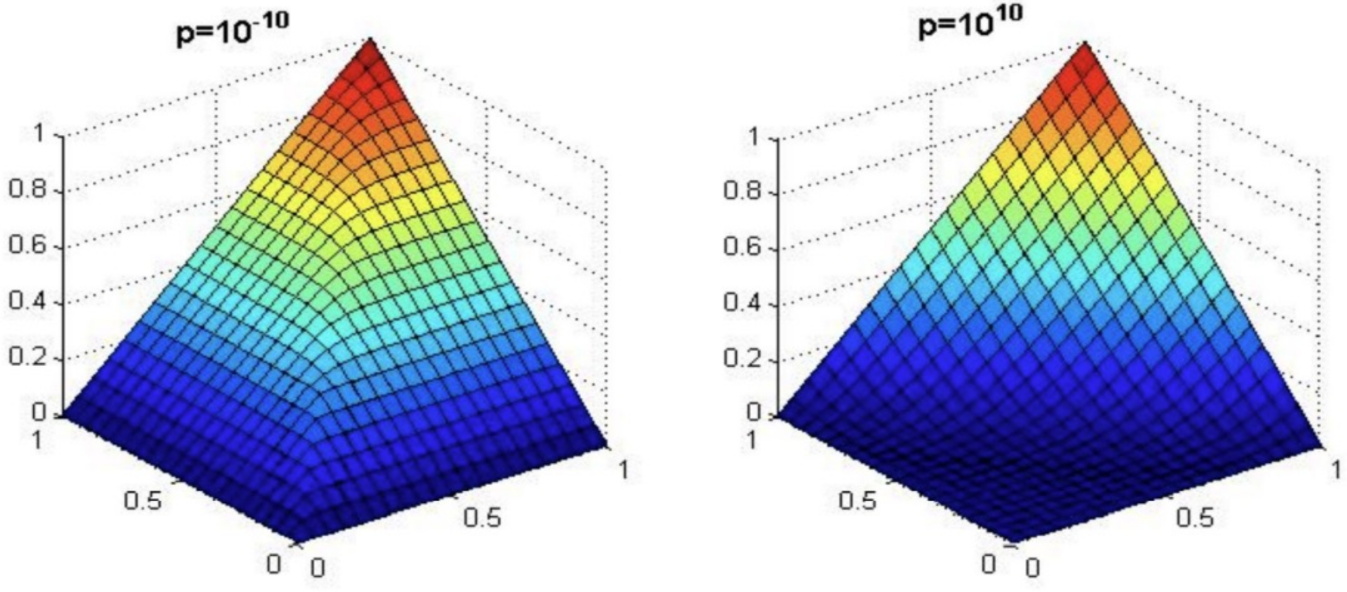


Drastický súčin: $T_D(x, y) = \begin{cases} \min(x, y), & ak \max(x, y) = 1 \\ 0, & inak \end{cases}$

Parametrické triedy t-noriem

- *Frankova*

$$T_p^F(x,y) = \begin{cases} T_{MIN}(x,y), & \textit{jestliže } p=0, \\ T_P(x,y), & \textit{jestliže } p=1, \\ T_L(x,y), & \textit{jestliže } p=\infty, \\ log_p\left(1+\frac{(p^x-1)(p^y-1)}{(p-1)}\right), & \textit{jinak.} \end{cases}$$

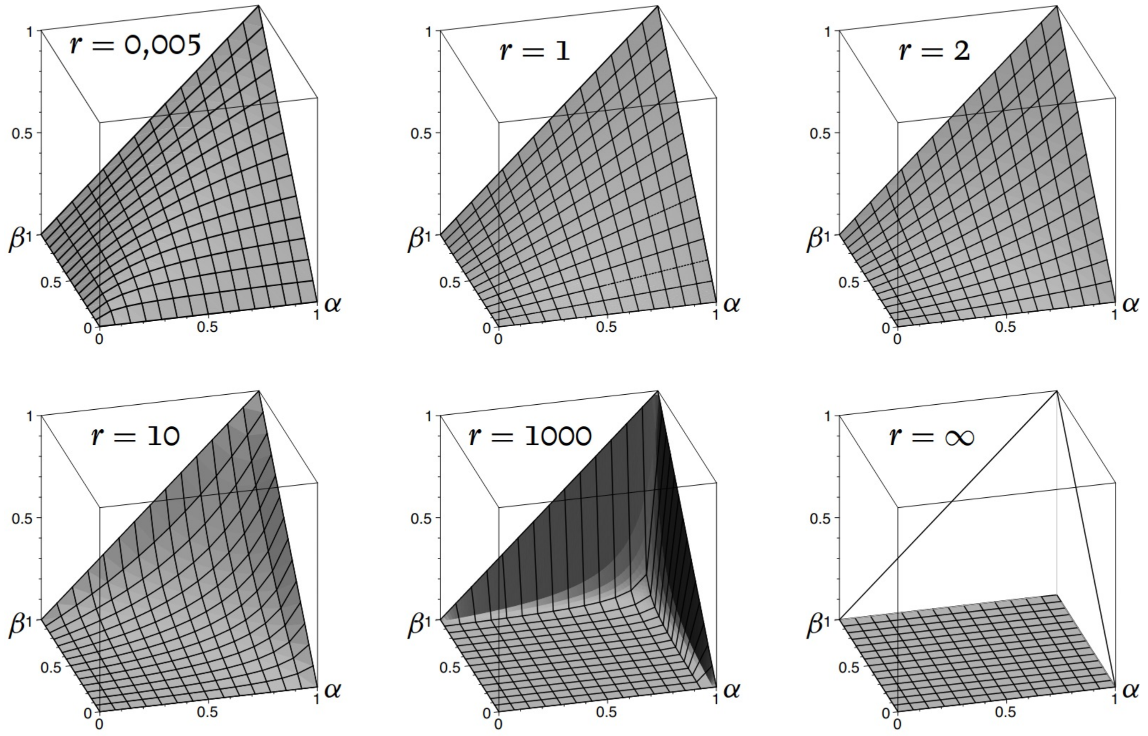


Parametrické triedy t-noriem

- *Hamacherova*

$$T_r^H(x,y) = \frac{xy}{r + (1-r)(x+y-xy)}$$

$$T_r^H(x,y) = \begin{cases} T_D(x,y) & ak\ r = \infty \\ 0 & ak\ r = x = y = 0 \\ \dfrac{xy}{r + (1-r)(x+y-xy)} & inak \end{cases}$$



Ďalšie známe parametrické triedy t-noriem

- Schweizer-Sklarova
- Yagerova
- Dombiho
- Sugeno-weberova
- Aczél-Alsinova

- Ak pre t-normy T_1 a T_2 je pre každý bod $(x, y) \in [0, 1]^2$ splnená nerovnosť $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$, hovoríme, že T_1 je slabšia ako T_2

$$T_1 \leq T_2$$

$$T_D < T_L < T_P < T_M$$

- pre ľubovoľnú t-normu T a pre každé a ∈ [0, 1] platí: T(a, a) ≤ a

- idempotentný prvok *a* t-normy T: $T(a, a) = a$

$$(\forall a \in [0, 1] : T(a, a) = a) \iff T = T_M$$

- 0 a 1 su triviálne idempotentné prvky – sú idempotentné pre ľubovoľnú t-normu

- Triangulárna norma je spojitá práve vtedy, keď je spojitá v prvej súradnici, t.j. pre každé y ∈ [0, 1] je funkcia jednej premennej spojitá

$$T(., y) : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$$

- Triangulárna norma je spojitá zľava práve vtedy, keď je spojitá zľava v prvej súradnici, t.j. ak pre každé y ∈ [0, 1] a pre každú postupnosť $(x_n)_{n \in N} \in [0, 1]^N$ platí

$$\sup T(x_n, y) = T(\sup x_n, y)$$

- Pozn.: spojitá sprava - infimum

- Asociatívnosť umožňuje rozšíriť každú t-normu T na n–árnu operáciu na jednotkovom intervale

Ak T je t-norma, x ∈ [0, 1] a n ∈ N, tak

$$x_T^{(n)} = \begin{cases} x, & ak\ n = 1 \\ T\left(x, x_T^{(n-1)}\right), & ak\ n > 1 \end{cases}$$

Algebraické vlastnosti - archimedovská t-norma

- t-norma T je archimedovská, ak pre všetky body $(x, y) \in]0, 1[^2$ existuje $n \in N$ také, že

$$x_T^{(n)} < y$$

- t-norma T je archimedovská práve vtedy, keď pre každé $x \in]0, 1[$ je

$$\lim_{n \to \infty} x_T^{(n)} = 0$$

- definovanie archimedovskosti spojitých t-noriem pomocou diagonálnej nerovnosti:

$$T(x, x) < x, \text{ pre } x \in]0, 1[$$

- T_M archimedovská nie je

2. Najděte příklad spojité t-normy, která není Archimedovská (vymyslete konstrukci pro třídu takových t-norem).

Algebraické vlastnosti - monotónnosť

- t-norma T je striktne monotónna, ak je rastúca na $]0, 1]^2$ ako funkcia $T : [0, 1]^2 \to [0, 1]$

$$\text{ak } x \in\ ]0, 1] \text{ a } y < z, \quad \text{tak } T(x, y) < T(x, z)$$

- t-norma T je združene striktne monotónna, ak platí:

$$\text{ak } x < x_0 \text{ a } y < y_0, \quad \text{tak } T(x, y) < T(x_0, y_0)$$

- t-norma T je striktná ak je spojitá a striktne monotónna

deliteľ nuly & nilpotentný prvok

- Prvok x ∈]0, 1[je deliteľ nuly danej t-normy T, ak existuje y ∈]0, 1[také, že T(x, y) = 0
- Prvok x ∈]0, 1[je nilpotentný prvok danej t-normy T, ak existuje n ∈ N také, že $x_T^{(n)} = 0$
- t-norma bez deliteľov nuly sa nazýva pozitívna
- T_P, T_M nemajú deliteľa nuly, ani nilpotentný prvok
- každé x ∈]0, 1[je deliteľom nuly aj nilpotentným prvkom T_D, T_L

1. Které z následujících tvrzení je pravdivé?

   - Ak $x \in (0, 1)$ je nilpotentní prvek t-normy T, tak je také dělitelem nuly v dané t-normě T.
   - Ak $x \in (0, 1)$ je dělitelem nuly v t-normě T, tak je také nilpotentním prvkem dané t-normy T.

   Svoje tvrzení podložte konkrétním příkladem $x \in (0, 1)$ a t-normy T.

Nech T je spojitá archimedovská t-norma. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné :

- T je nilpotentná
- Existuje aspoň jeden nilpotentný prvok danej t-normy T
- T nie je striktná
- T má delitel’a nuly

3. Zjistěte, pro které t-normy T a involutivní negátory n platí

$$\max\left(T(x,y), T(x,n(y))\right) \leq x.$$

4. Zjistěte, pro které t-normy a negátory platí

$$S_P(T(x,y), T(x,n(y))) \leq x,$$

přičemž $S_P(x,y) = x + y - x.y$.