Klasické a fuzzy relace

vitapavlik.cz/imf

~~Kočičky~~ Kočička

Co je to relace?

- **relace** {vztah, poměr; pořad, vysílání} – přes moderní evropské jazyky z latinského **relatio** {odnášení, zpráva; vztah, poměr} od **referre** {odnášet, oznamovat, vypravovat} (srov. relativní – poměrný)[1]
- poměr, vztah
- televizní nebo rozhlasové vysílání
- (knižně, zastarale) (zejm. úřední, oficiální) oznámení, zpráva, podání zprávy[2]
  - „Tohoto muže," řekl vrchní štábní lékař z komise, ukazuje na Švejka, „odvedete dolů do kanceláře a počkáte na naši **relaci** a raport." [3]

1: REJZEK, Rejzek. Český etymologický slovník. Třetí vydání. LEDA spol., 2015. ISBN 9788073353933.
2: Wikislovník: Otevřený slovník: relace [online]. [citováno 4. 12. 2023]
3: Jaroslav Hašek: Osudy dobrého vojáka Švejka za světové války.

Kartézský součin

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in X_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

kartézský součin

$$X^n = \prod_{i=1}^{n} X$$

kartézská mocnina

René Descartes[1]

1. Encyclopædia Britannica, René Descartes (online)

Relace × Vztah

Relace v teorii množin × v logice

- Množina uspořádaných n-tic
  - „jsou spolu v relaci”
- Predikát
  - atomická formule predikátové logiky
  - term

Red Bull RB19[1]

Vlastnosti klasických binárních relací

Binární relace $R \subseteq A^2$ je

- **Reflexivní**, když $\forall a \in A : (a, a) \in R$
- **Symetrická**, když $\forall a, b \in A : (a, b) \in R \to (b, a) \in R$
- **Tranzitivní**, když

$$\forall a, b, c \in A : ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \to (a, c) \in R$$

- **Antisymetrická**, když $\forall a, b \in A : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \to a = b$
- **Asymetrická**, když $\forall a, b \in A : (a, b) \in R \to (b, a) \notin R$

Poznámka: ekvivalence a uspořádání

Fuzzy relace

Exaktní definice (klasická relace)

- ↯ = { (a, b) $\in$ U^2 : a je alespoň o 50 větší než b}
  - 2 ↯ 1 ✗
  - 200 ↯ 1 ✓

Vágní definice (fuzzy relace)

- △ = { (a, b) $\in$ U^2 : a je mnohem vetší než b}
  - 2 △ 1
  - 200 △ 1

Fuzzy relace

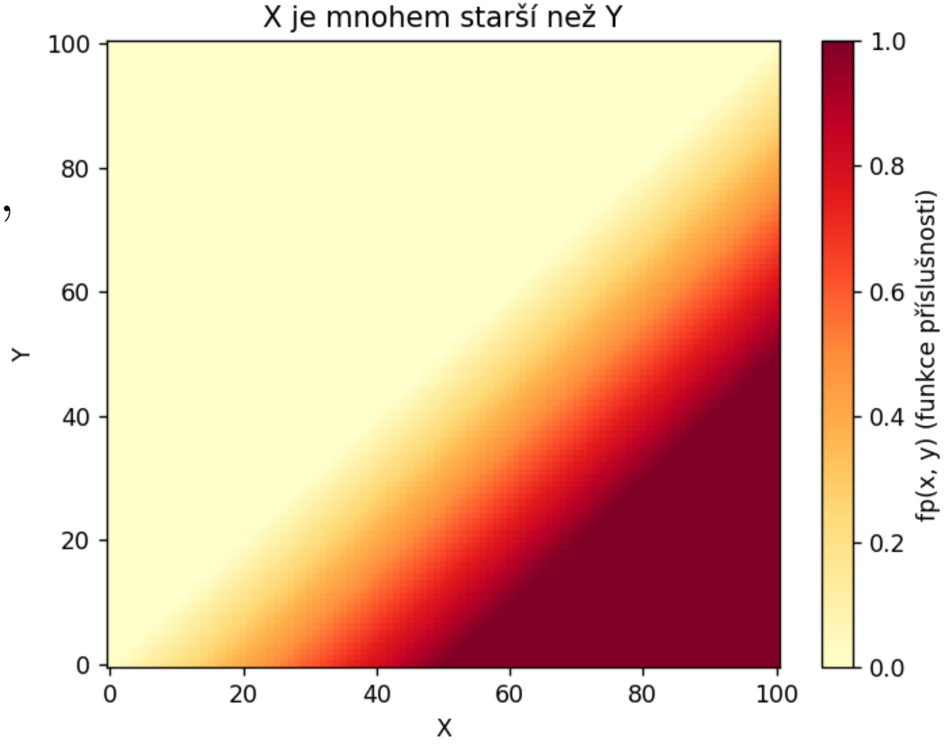
- Mějme univerza $U_1, U_2, \ldots, U_n$
- Mějme fuzzy množiny $A_1 \in \mathcal{F}(U_1), A_2 \in \mathcal{F}(U_2), \ldots, A_n \in \mathcal{F}(U_n)$
- Fuzzy relace R je fuzzy množina $R \in \mathcal{F}(U_1 \times U_2 \times \ldots U_n)$
- Kartézský součin $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ je opět fuzzy množina $K \in \mathcal{F}(U_1 \times U_2 \times \ldots U_n)$

Fuzzy relace – značení

$a \vartriangle b$	$a \overset{0,7}{\vartriangle} b$
klasické	fuzzy

Příklad: „mnohem starši, než”

$$\mu_{R_2}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x-y \leq 0, \\ \frac{x-y}{50}, & \text{ak } 0 < x-y \leq 50, \\ 1, & \text{ak } x-y > 50. \end{cases}$$



Reflexivita fuzzy relací

Fuzzy relace je

- Reflexivní, když $\forall x \in X; \mu_R(x,x) = 1$
- Ireflexivní, když $\forall x \in X; \mu_R(x,x) = 0$
- Antireflexivní, když $\forall x \in X; \mu_R(x,x) \neq 1$

Symetričnost fuzzy relací

Fuzzy relace je

- Symetrická, pokud $\forall x, y \in X; \mu_R(x,y) = \mu_R(y,x)$
- T-antisymetrická, pokud

$$\forall x, y \in X;\ x \neq y \implies T(\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)) = 0$$

- T-asymetrická, pokud $\forall x, y \in X; T(\mu_R(x,y), \mu_R(y,x)) = 0$

Tranzitivita fuzzy relací

Fuzzy relace je T-tranzitivní, když

$$\forall x, y, z \in X; T(\mu_R(x,z), \mu_R(z,y)) \leq \mu_R(x,y)$$

Skládání (kompozice) fuzzy relací

- Standardní skládání (sup-min skládání)
  - uvažujme R ∈$\mathcal{F}$(X × Y) a P ∈$\mathcal{F}$(Y × Z)

$$\mu_{P \circ_T R}(x, z) = \sup_{y \in Y} \min(\mu_P(x, y), \mu_R(y, z))$$

- sup-T skládání

$$\mu_{P \circ_T R}(x, z) = \sup_{y \in Y} T(\mu_P(x, y), \mu_R(y, z))$$

Fuzzy podobnost/fuzzy rovnost

- SIM = {(x,y): x a y jsou si podobné}
- SIM je fuzzy relace
- SIM je reflexivní
- SIM je symetrická
- SIM souvisí se vzdáleností – metrikou
  - co je metrika?

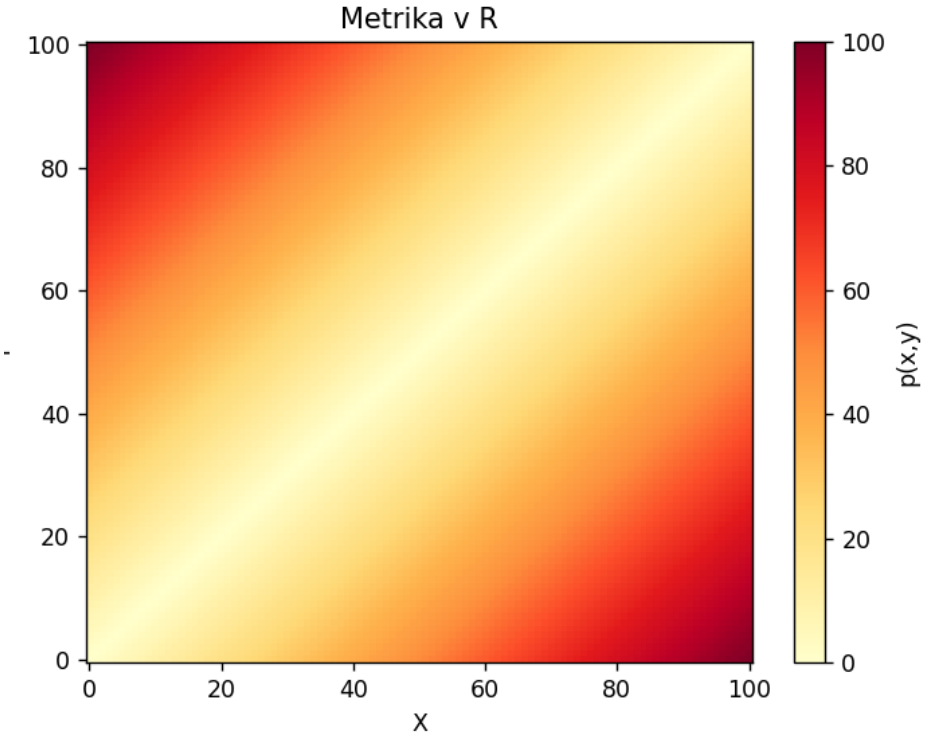
Metrika (pseudometrika)

1. Axiom nezápornosti: $\rho(x, y) \geq 0$
2. Axiom totožnosti: $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
3. Axiom symetrie: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
4. Trojúhelníková nerovnost: $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

- Poznámka: pseudometriku získáme, když v axiomu 2 vynecháme implikaci zleva doprava
- Metrický prostor: dvojice (M, p)

Příklad: metrika v R

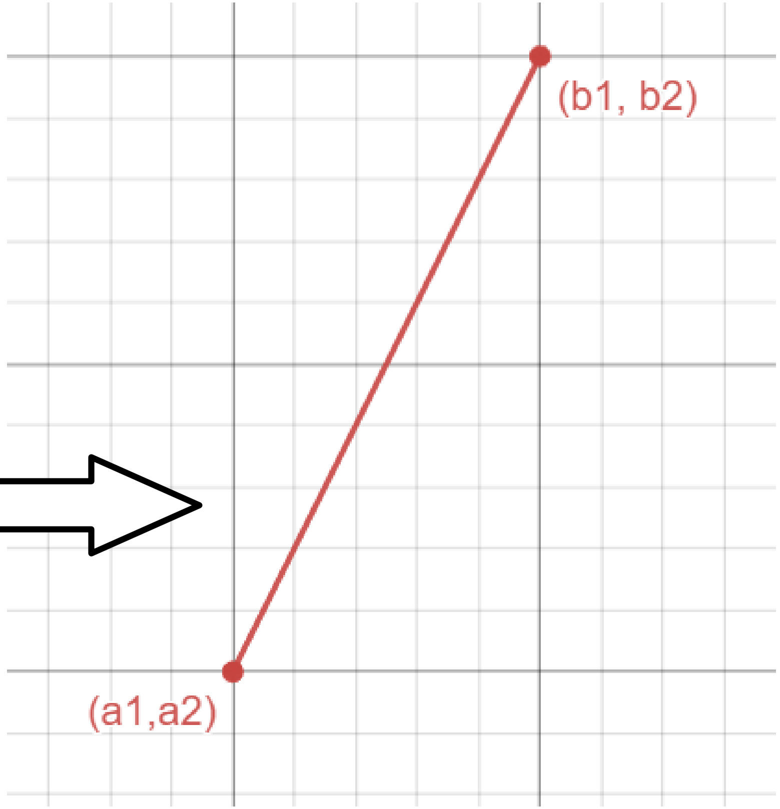
- p(x,y) = |x - y|



Příklad: euklidovská metrika v R^n

$$p(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$$p(a, b) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$



Souvislost SIM a pseudometriky

$$\forall x, y, z, u \in X : d(x, y) \leq d(z, u) \iff \mu_{SIM}(x, y) \geq \mu_{SIM}(z, u)$$

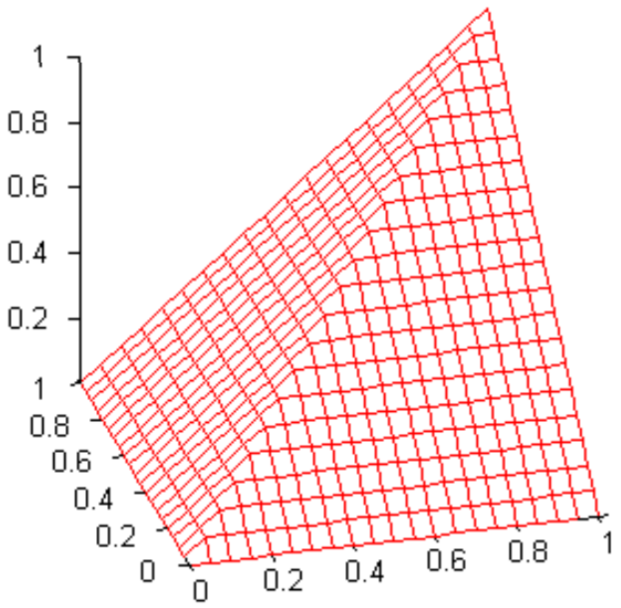
Úlohy pro tým Kočičky

1. Platí následující tvrzení? Jestliže je relace T_M−tranzitivní, je také T_P−tranzitivní.
2. Předchozí tvrzení správně zovšeobecněte pro libovolné dvě t-normy.
3. Nechť T je spojitá t-norma a nechť funkce d_T je dán a následovně

$$d_T(x,y) = \begin{cases} S(x,y) - T(x,y) & x \neq y, \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

   Je funkce d_T metrika?

Minimová t-norma



Minimová T-norma[1]

1. BĚHOUNEK. Libor. Formální fuzzy logika (dostupné online)

Reference

- Vilém Novák – Fuzzy množiny a jejich aplikace
  - dostupné v knihovně FIT
- Wikipedie: Metrický prostor