Konstrukce nespojitých t-norem pomocí pseudoinverzních funkcí

Matematické základy fuzzy logiky

Tým H2O

FIT VUT v Brně

9. 11. 2023

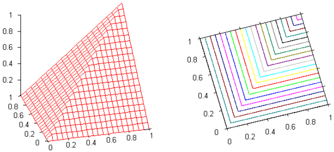
Opakování – t-normy

Definice

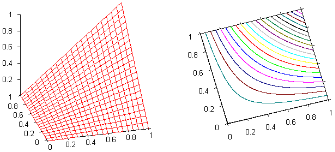
Triangulární norma je funkce $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ *taková, že pro každé* $x, y, z \in [0,1]$ *platí následující axiomy:*

- *komutativita* – $T(x, y) = T(y, x)$,
- *asociativita* – $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$,
- *monotónnost* – $y \leq z \implies T(x, y) \leq T(x, z)$,
- *okrajová podmínka* – $T(x, 1) = x$.

Opakování – základní t-normy

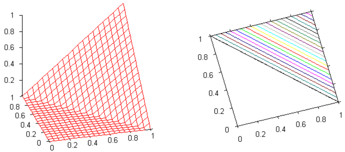


(a) Minimová t-norma

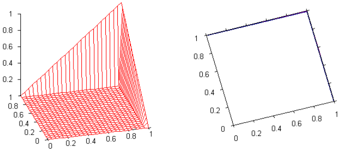


(b) Součinová t-norma

Opakování – základní t-normy



(a) Łukasiewizcova t-norma



(b) Drastický součin

Co s nespojitými t-normami?

Funkce $t : [0, 1] \to [1, 2]$ daná předpisem

$$t(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{pro } x \in [0, 1[\\ 0 & \text{pro } x = 1 \end{cases}$$

je aditivním generátorem drastického součinu, ale není to bijekce.

Pseudoinverzní funkce na příkladech

Příklad

Nechť funkce $f_1 : [0, 1] \to [0, 1]$ je daná předpisem:

$$f_1(x) = x^2$$

Pseudoinverzní funkce na příkladech

Příklad

Nechť funkce $f_1 : [0,1] \to [0,1]$ je daná předpisem:

$$f_1(x) = x^2$$

Protože funkce f_1 je bijekce, její pseudoinverzní funkce $f_1^{(-1)}(x) : [0,1] \to [0,1]$ bude totožná s inverzní funkcí $f_1^{-1}(x)$.

$$f_1^{-1}(x) = f_1^{(-1)}(x) = \sqrt{x}$$

Pseudoinverzní funkce na příkladech

Příklad

Nechť funkce $f_1 : [0,1] \to [0,1]$ je daná předpisem:

$$f_1(x) = x^2$$

Protože funkce f_1 je bijekce, její pseudoinverzní funkce $f_1^{(-1)}(x) : [0,1] \to [0,1]$ bude totožná s inverzní funkcí $f_1^{-1}(x)$.

$$f_1^{-1}(x) = f_1^{(-1)}(x) = \sqrt{x}$$

Složením funkcí f_1 a $f_1^{(-1)}(x)$ je identita na intervalu $[0,1]$.

Pseudoinverzní funkce na příkladech

Příklad

Nechť funkce $f_2 : [0,1] \to [0,1]$ je daná předpisem:

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pro } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{4} & \text{pro } x \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ 3x - 2 & \text{pro } x \in \left]\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

Pseudoinverzní funkce na příkladech

Příklad

Nechť funkce $f_2 : [0,1] \to [0,1]$ je daná předpisem:

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pro } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{4} & \text{pro } x \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ 3x - 2 & \text{pro } x \in \left]\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

Funkce f_2 není injekce, proto k ní neexistuje inverzní funkce. Musíme si pomoci pseudoinverzní funkcí:

Pseudoinverzní funkce na příkladech

Příklad

Nechť funkce $f_2 : [0,1] \to [0,1]$ je daná předpisem:

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{pro } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{4} & \text{pro } x \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ 3x - 2 & \text{pro } x \in \left]\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$$

Funkce f_2 není injekce, proto k ní neexistuje inverzní funkce. Musíme si pomoci pseudoinverzní funkcí:

- na intervalu $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ je f_2 spojitá a injektivní, proto $f_2^{(-1)}$ bude na intervalu $\left[f_2(0), f_2(\frac{1}{2})\right]$ totožná s f_2^{-1},
- obdobně pro interval $\left]\frac{3}{4}, 1\right]$.

Pseudoinverzní funkce na příkladech

Příklad

Nechť funkce $f_3 : [0,1] \to [0,1]$ je daná předpisem:

$$f_3(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{x}{3} + \frac{2}{3} & \text{pro } x \in \left]\frac{1}{4}, 1\right] \end{cases}$$

Pseudoinverzní funkce na příkladech

Příklad

Nechť funkce $f_3 : [0,1] \to [0,1]$ je daná předpisem:

$$f_3(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{x}{3} + \frac{2}{3} & \text{pro } x \in \left]\frac{1}{4}, 1\right] \end{cases}$$

Funkce f_3 je injekce, proto k ní existuje inverzní funkce.
Avšak f_3 není bijekce, proto ani její inverzní funkce není definovaná na celém intervalu $[0,1]$.

Pseudoinverzní funkce na příkladech

Příklad

Nechť funkce $f_3 : [0,1] \to [0,1]$ je daná předpisem:

$$f_3(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{x}{3} + \frac{2}{3} & \text{pro } x \in \left]\frac{1}{4}, 1\right] \end{cases}$$

Funkce f_3 je injekce, proto k ní existuje inverzní funkce.
Avšak f_3 není bijekce, proto ani její inverzní funkce není definovaná na celém intervalu $[0,1]$.

- Na intervalu $\left[f_3(0), f_3(\frac{1}{4})\right] \cup \left]f_3(\frac{1}{4}), f_3(1)\right]$ bude $f_3^{(-1)}$ totožná s f_3^{-1},
- pro zbytek definičního oboru $f_3^{(-1)}$ provedeme monotónní rozšíření.

Pseudoinverzní funkce neklesajících funkcí

Definice

Nechť $f : [a, b] \to [c, d]$ *je neklesající funkce. Potom pro každé* $y \in [c, d]$ *je předpisem*

$$f^{(-1)}(y) = sup(x \in [a, b]; f(x) < y)$$

definovaná pseudoinverzní funkce $f^{(-1)}$ *k funkci* f*.*

Pseudoinverzní funkce neklesajících funkcí

Nechť $f : [a, b] \to [c, d]$ je neklesající funkce. Potom:

- pseudoinverzní funkce $f^{(-1)}$ je neklesající a spojitá zleva,
- rovnost $\left(f^{(-1)}\right)^{(-1)}(x) = f(x)$ platí právě tehdy, když funkce f je spojitá zleva a $f(a) = c$,
- je-li funkce f bijekce, pak $f^{(-1)}(x) = f^{-1}(x)$,
- je-li funkce f rostoucí, pak její pseudoinverzní funkce je spojitá,
- pro každé $x \in [a, b]$ platí: $f^{(-1)} \circ f(x) \leq x$,
- je-li funkce f rostoucí, pak $f^{(-1)} \circ f(x) = x$.
- je-li funkce f surjekce, pak $f \circ f^{(-1)}(x) = x$.

Pseudoinverzní funkce nerostoucích funkcí

Definice

Nechť $f : [a, b] \to [c, d]$ *je nerostoucí funkce. Potom pro každé* $y \in [c, d]$ *je předpisem*

$$f^{(-1)}(y) = sup(x \in [a, b]; f(x) > y)$$

definovaná pseudoinverzní funkce $f^{(-1)}$ *k funkci* f.

Pseudoinverzní funkce nerostoucích funkcí

Nechť $f : [a, b] \to [c, d]$ je nerostoucí funkce. Potom:

- pseudoinverzní funkce $f^{(-1)}$ je nerostoucí a spojitá zprava,
- rovnost $\left(f^{(-1)}\right)^{(-1)}(x) = f(x)$ platí právě tehdy, když funkce f je spojitá zprava a $f(a) = c$,
- je-li funkce f bijekce, pak $f^{(-1)}(x) = f^{-1}(x)$,
- je-li funkce f klesající, pak její pseudoinverzní funkce je spojitá,
- pro každé $x \in [a, b]$ platí: $f^{(-1)} \circ f(x) \leq x$,
- je-li funkce f klesající, pak $f^{(-1)} \circ f(x) = x$.
- je-li funkce f surjekce, pak $f \circ f^{(-1)}(x) = x$.

Aditivní generátor

Definice

Aditivní generátor t-normy T je klesající funkce $f : [0,1] \to [0,\infty]$, která je zprava spojitá v bodě 0, $f(1) = 0$ a pro všechna $(x,y) \in [0,1]^2$ platí

$$f(x) + f(y) \in H(f) \cup [f(0), \infty],$$

přičemž t-norma T je daná předpisem

$$T(x,y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y)).$$

Aditivní generátor

Příklad

Funkce f daná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{pro } x \in [0, 1[, \\ 0 & \text{pro } x = 1 \end{cases}$$

je aditivním generátorem drastického součinu.

Multiplikativní generátor

Definice

Multiplikativní generátor t-normy T je rostoucí funkce $I : [0,1] \to [0,1]$, která je zprava spojitá v bodě 0, $I(1) = 1$ a pro všechna $(x,y) \in [0,1]^2$ platí

$$I(x) \cdot I(y) \in H(I) \cup [0, I(0)],$$

přičemž t-norma T je daná předpisem

$$T(x,y) = I^{(-1)}(I(x) \cdot I(y)).$$

Vlastnost pseudoinverzních funkcí

Lemma

(Hliněná, Biba) Nechť c je kladné reálné číslo. Potom pro monotónní funkci $f : [0,1] \to [0,\infty]$ *platí*

$$(c \cdot f)^{(-1)}(x) = f^{(-1)}\left(\frac{x}{c}\right)$$

φ-transformace

Definice

Je-li φ rostoucí bijekce uzavřeného jednotkového intervalu, pak předpisem

$$T_\varphi(x, y) = \varphi^{-1}(T(\varphi(x), \varphi(y)))$$

je daná t-norma, kterou nazýváme φ-transformací t-normy T.

Triangulární subnormy

Definice

Triangulární subnorma je funkce $V : [0,1]^2 \to [0,1]$ *taková, že pro každé* $x, y, z \in [0,1]$ *platí následující axiomy:*

- *komutativita* – $V(x,y) = V(y,x)$,
- *asociativita* – $V(x, V(y,z)) = V(V(x,y),z)$,
- *monotónnost* – $y \leq z \implies V(x,y) \leq V(x,z)$,
- *okrajová podmínka* – $V(x,y) \leq min(x,y)$.

Triangulární subnormy

Věta

(Klement, Mesiar, Pap) Nechť $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ je neklasající funkce na intervalu $[0,1]$ a spojitá na na otevřeném intervalu $]0,1[$ a nechť V je t-subnorma. Potom binární operace daná předpisem

$$V_\varphi(x,y) = \varphi^{(-1)}\left[V(\varphi(x),\varphi(y))\right]$$

je t-subnorma.

T-normy a t-subnormy se liší v okrajové podmínce. Chceme-li, aby výsledkem transformace byla t-norma, musíme dodefinovat hodnoty v bodech $(x,1),(1,x)$ pro $x \in [0,1]$.

Triangulární subnormy

Věta

(Klement, Mesiar, Pap) Nechť $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ *je neklasající funkce na intervalu* $[0,1]$ *a spojitá na na otevřeném intervalu* $]0,1[$ *a nechť* T *je t-norma, resp. t-subnorma. Potom operátor* T_φ *daný předpisem*

$$T_\varphi(x,y) = \begin{cases} \mathit{min}(x,y) & \text{pokud } \mathit{max}(x,y) = 1, \\ \varphi^{(-1)}\left[T(\varphi(x),\varphi(y))\right] & \text{jinak,} \end{cases}$$

je t-norma.

Invarianty φ-transformace drastického součinu

Věta

(Smutná) Nechť $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ *je neklesající funkce a nechť operace* $(T_D)_\varphi : [0,1]^2 \to [0,1]$ *je daná předpisem*

$$(T_D)_\varphi(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{pokud } \max(x,y) = 1, \\ \varphi^{(-1)}\left[T_D(\varphi(x),\varphi(y))\right] & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom $(T_D)_\varphi = T_D$ *právě tehdy, když* $\varphi^{(-1)}(1) = 1$ *nebo* $\varphi^{(-1)}(1) = 0$.

Invarianty φ-transformace minimové t-normy

Věta

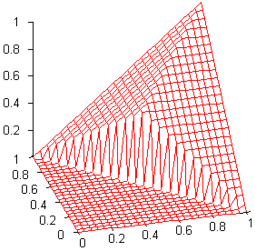
(Smutná) Nechť $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ *je neklesající funkce a nechť operace* $(T_D)_\varphi : [0,1]^2 \to [0,1]$ *je daná předpisem*

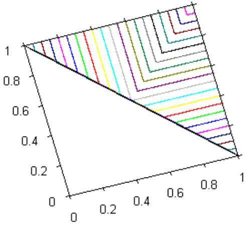
$$(T_M)_\varphi(x,y) = \begin{cases} \mathit{min}(x,y) & \mathit{pokud}\ \mathit{max}(x,y) = 1, \\ \varphi^{(-1)}\left[T_M(\varphi(x),\varphi(y))\right] & \mathit{jinak}. \end{cases}$$

Potom $(T_M)_\varphi = T_M$ *právě tehdy, když* φ *je rostoucí funkce.*

Nilpotentní minimum

$$T_{nM}(x,y) = \begin{cases} min(a,b) & \text{pokud } a+b>1, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$





Obrázek: Nilpotentní minimum

Úlohy

- Najděte invariant φ-transformace pro nilpotentní minimum.
- Nechť φ je neklesající funkce na $[0,1]$. V jakém vztahu budou funkce T_φ a $T_{\varphi^{(-1)}}$? Úlohu vyřešte pro T_D.
- Nechť φ je neklesající funkce na $[0,1]$. V jakém vztahu budou funkce T_φ a $T_{\varphi^{(-1)}}$? Úlohu vyřešte pro nilpotentní minimum.