Základy fuzzy množín

1. júla 2023

"vágny"

- v slovenčine nejasný, hmlistý, rozmazaný, neostrý

"vágny"

- v slovenčine nejasný, hmlistý, rozmazaný, neostrý
- v angličtine *fuzzy*

"vágny"

- v slovenčine nejasný, hmlistý, rozmazaný, neostrý
- v angličtine *fuzzy*
- Lotfi A. Zadeh: Fuzzy sets. Information & Control **8** (1965) 338-353

Od klasických množín k fuzzy množinám

- X základná množina prvkov, *základný priestor* alebo *univerzum*.

Od klasických množín k fuzzy množinám

- X základná množina prvkov, *základný priestor* alebo *univerzum.*
- A je ľubovoľná podmnožina univerza X.

Od klasických množín k fuzzy množinám

- X základná množina prvkov, *základný priestor* alebo *univerzum.*
- A je ľubovoľná podmnožina univerza X.
- **klasický prípad:** o každom prvku univerza vieme jednoznačne rozhodnúť, či do množiny A patrí alebo nepatrí.

Od klasických množín k fuzzy množinám

- X základná množina prvkov, *základný priestor* alebo *univerzum.*
- A je ľubovoľná podmnožina univerza X.
- **klasický prípad:** o každom prvku univerza vieme jednoznačne rozhodnúť, či do množiny A patrí alebo nepatrí.
  - charakteristická funkcia množiny alebo indikátor množiny

Od klasických množín k fuzzy množinám

- X základná množina prvkov, *základný priestor* alebo *univerzum.*
- A je ľubovoľná podmnožina univerza X.
- **klasický prípad:** o každom prvku univerza vieme jednoznačne rozhodnúť, či do množiny A patrí alebo nepatrí.
  - charakteristická funkcia množiny alebo indikátor množiny
  - $$\chi_A : X \to \{0,1\}, \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Od klasických množín k fuzzy množinám

- X základná množina prvkov, *základný priestor* alebo *univerzum.*
- A je ľubovoľná podmnožina univerza X.
- **klasický prípad:** o každom prvku univerza vieme jednoznačne rozhodnúť, či do množiny A patrí alebo nepatrí.
  - charakteristická funkcia množiny alebo indikátor množiny
  - $$\chi_A : X \to \{0,1\}, \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$
  - Hodnota charakteristickej funkcie $\chi_A(x)$ je teda pravdivostná hodnota výroku "$x \in A$," t.j.,
  $$\chi_A(x) = t(x \in A).$$

Príklad

Nech $A = \{x \in R; |x| \leq 2\}$. *Nerovnosť* $|x| \leq 2$, *ktorou je množina* A *určená, spĺňajú reálne čísla, pre ktoré platí* $-2 \leq x \leq 2$, *teda množina* A *je interval* $A = [-2, 2]$. *Charakteristická funkcia množiny* A *je*

$$\chi_A : X \to \{0,1\}, \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \textit{ak } x \in [-2,2] \\ 0, & x \in]-\infty, -2[\ \cup \ ]2, \infty[. \end{cases}$$

Príklad (Zuzkine "umelecké diela")

- **fuzzy prípad**

- **fuzzy prípad**
  - A fuzzy podmnožina

- **fuzzy prípad**
  - A fuzzy podmnožina
  - $\mu_A : X \to [0, 1]$ funkcia príslušnosti fuzzy podmnožiny

- **fuzzy prípad**
  - A fuzzy podmnožina
  - $\mu_A : X \to [0,1]$ funkcia príslušnosti fuzzy podmnožiny
  - $\mu_A(x)$ stupeň príslušnosti prvku x do fuzzy podmnožiny A skúmanej vlastnosti

- **fuzzy prípad**
  - A fuzzy podmnožina
  - $\mu_A : X \to [0,1]$ funkcia príslušnosti fuzzy podmnožiny
  - $\mu_A(x)$ stupeň príslušnosti prvku x do fuzzy podmnožiny A skúmanej vlastnosti
  - $$A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X\}$$

- **fuzzy prípad**
  - A fuzzy podmnožina
  - $\mu_A : X \to [0, 1]$ funkcia príslušnosti fuzzy podmnožiny
  - $\mu_A(x)$ stupeň príslušnosti prvku x do fuzzy podmnožiny A skúmanej vlastnosti
  - $$A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X\}$$
  - $\mathcal{F}(X)$ systém všetkých fuzzy množín

Definícia

Nech $A, B \in \mathcal{F}(X)$.

- Nosič *fuzzy množiny* A *je (klasická) množina* $Supp(A)$*,*

$$Supp(A) = \{x \in X; \mu_A(x) > 0\}.$$

Definícia

Nech $A, B \in \mathcal{F}(X)$.

- Nosič *fuzzy množiny* A *je (klasická) množina* $Supp(A)$,

$$Supp(A) = \{x \in X; \mu_A(x) > 0\}.$$

- Výška *fuzzy množiny* A *je číslo* $hgt(A)$, *definované vzťahom*

$$hgt(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x).$$

Definícia

Nech $A, B \in \mathcal{F}(X)$.

- Nosič *fuzzy množiny* A *je (klasická) množina* $Supp(A)$,

$$Supp(A) = \{x \in X; \mu_A(x) > 0\}.$$

- Výška *fuzzy množiny* A *je číslo* $hgt(A)$, *definované vzťahom*

$$hgt(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x).$$

- Jadro *fuzzy množiny* A *je (klasická) množina* $Core(A)$,

$$Core(A) = \{x \in X; \mu_A(x) = 1\}.$$

Definícia

Nech $A, B \in \mathcal{F}(X)$.

- *Fuzzy množina* A *je* normálna, *ak existuje* $x \in X$ *také, že* $\mu_A(x) = 1$. *(V opačnom prípade je subnormálna.)*

Definícia

Nech $A, B \in \mathcal{F}(X)$.

- *Fuzzy množina* A *je* normálna, *ak existuje* $x \in X$ *také, že* $\mu_A(x) = 1$. *(V opačnom prípade je subnormálna.)*
- *Fuzzy množiny* A, B *sa rovnajú, ak* $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ *pre každé* $x \in X$. *Budeme písať'* $A = B$.

Definícia

Nech $A, B \in \mathcal{F}(X)$.

- *Fuzzy množina* A *je* normálna, *ak existuje* $x \in X$ *také, že* $\mu_A(x) = 1$. *(V opačnom prípade je subnormálna.)*
- *Fuzzy množiny* A, B *sa rovnajú, ak* $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ *pre každé* $x \in X$. *Budeme písať'* $A = B$.
- Inklúzia fuzzy množín:

$$A \subseteq B, \text{ ak } \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ pre každé } x \in X.$$

Príklad

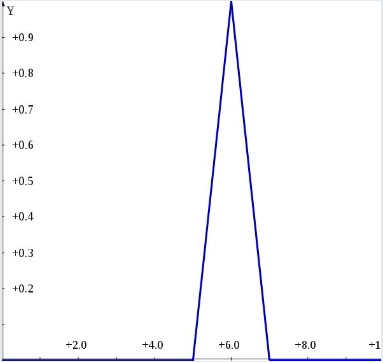
Budeme modelovať fuzzy podmnožinu A reálnych čísel:"asi šesť".

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x-5, & \textit{ak } x \in [5,6], \\ 7-x, & \textit{ak } x \in [6,7], \\ 0, & \textit{inak}, \end{cases}$$

Príklad

Budeme modelovat' fuzzy podmnožinu A reálnych čísel:"asi šest"'.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x - 5, & \textit{ak } x \in [5,6], \\ 7 - x, & \textit{ak } x \in [6,7], \\ 0, & \textit{inak}, \end{cases}$$

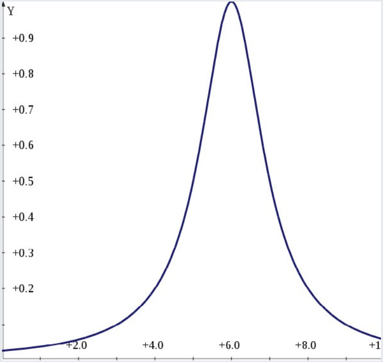


Príklad

$$\mu_A(x) = \frac{1}{(x-6)^2+1}.$$

Príklad

$$\mu_A(x) = \frac{1}{(x-6)^2+1}.$$



Definícia (Štandardné operácie)

Nech X *je základný priestor,* $A, B \in \mathcal{F}(X)$.

- Štandardný prienik fuzzy množín A, B *je fuzzy množina* $A \cap B \in \mathcal{F}(X)$ *s funkciou príslušnosti*

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Definícia (Štandardné operácie)

Nech X *je základný priestor,* $A, B \in \mathcal{F}(X)$.

- Štandardný prienik fuzzy množín A, B *je fuzzy množina* $A \cap B \in \mathcal{F}(X)$ *s funkciou príslušnosti*

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

- Štandardné zjednotenie fuzzy množín A, B *je fuzzy množina* $A \cup B \in \mathcal{F}(X)$ *s funkciou príslušnosti*

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

Definícia (Štandardné operácie)

Nech X *je základný priestor,* $A, B \in \mathcal{F}(X)$.

- Štandardný prienik fuzzy množín A, B *je fuzzy množina* $A \cap B \in \mathcal{F}(X)$ *s funkciou príslušnosti*

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

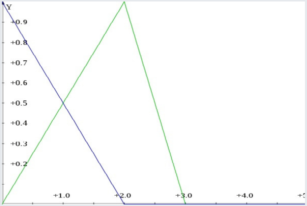
- Štandardné zjednotenie fuzzy množín A, B *je fuzzy množina* $A \cup B \in \mathcal{F}(X)$ *s funkciou príslušnosti*

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)).$$

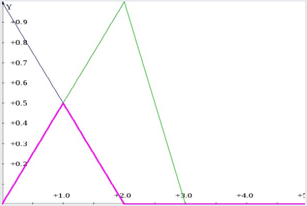
- Štandardným doplnkom fuzzy množiny A *je fuzzy množina* $\overline{A} \in \mathcal{F}(X)$ *s funkciou príslušnosti*

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

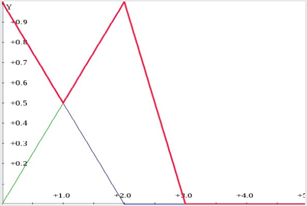
Príklad



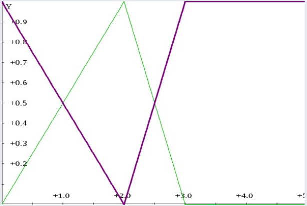
A, B



$A \cap B$



$A \cup B$



$\overline{B}$

Zadanie fuzzy množín

- vertikálna reprezentácia fuzzy množín - pomocou funkcie príslušnosti

Zadanie fuzzy množín

- vertikálna reprezentácia fuzzy množín - pomocou funkcie príslušnosti
- horizontálna reprezentácia fuzzy množín - pomocou tzv. $\alpha-$rezov

Definícia

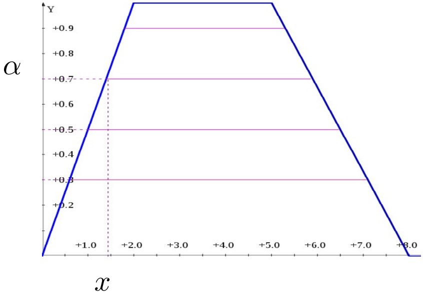
Nech A je fuzzy podmnožina univerza X a nech $\alpha \in [0,1]$. Potom α-rezom fuzzy množiny A *sa nazýva množina*

$$A^{\alpha} = \{x \in X; \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Definícia

Nech A *je fuzzy podmnožina univerza* X *a nech* $\alpha \in [0, 1]$. *Potom* α-rezom fuzzy množiny A *sa nazýva množina*

$$A^{\alpha} = \{x \in X; \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$



Tvrdenie (Klir, Yuan)

Nech $\left(A^{(\alpha)}\right)_{\alpha\in]0,1]}$ *je systém* $\alpha-$*rezov fuzzy množiny* $A \in \mathcal{F}(X)$. *Potom pre každé* $x \in X$ *platí:*

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha\in]0,1]} \min(\alpha, \chi_{A^{(\alpha)}}(x)).$$

Dá sa ukázať, že hodnotu $\mu_A(x)$ určíme ako supremum všetkých tých čísel α, do ktorých $\alpha-$rezov dané x patrí, teda

$$\mu_A(x) = \sup_{x\in A^{(\alpha)}} \alpha.$$

Modelovanie operácií na fuzzy množinách

- $x \in \overline{A} \iff \neg(x \in A)$
- $x \in A \cap B \iff (x \in A \wedge x \in B)$
- $x \in A \cup B \iff (x \in A \vee x \in B)$

Modelovanie operácií na fuzzy množinách

- $x \in \overline{A} \iff \neg(x \in A)$
- $x \in A \cap B \iff (x \in A \wedge x \in B)$
- $x \in A \cup B \iff (x \in A \vee x \in B)$
- $\chi_A(x) = t(x \in A)$

Modelovanie operácií na fuzzy množinách

- $x \in \overline{A} \iff \neg(x \in A)$
- $x \in A \cap B \iff (x \in A \wedge x \in B)$
- $x \in A \cup B \iff (x \in A \vee x \in B)$
- $\chi_A(x) = t(x \in A)$
- $\chi_{\overline{A}}(x) = t(\neg(x \in A))$
- $\chi_{A \cap B}(x) = t(x \in A \wedge x \in B)$
- $\chi_{A \cup B}(x) = t(x \in A \vee x \in B)$

Fuzzy negácia

Definícia

Unárny operátor $N : [0,1] \to [0,1]$ *sa nazýva* negátor*, ak pre ľubovoľné* $a, b \in [0,1]$ *platí*

- *(i)* $a < b \Rightarrow N(b) \leq N(a)$,
- *(ii)* $N(0) = 1, N(1) = 0$.

Fuzzy negácia

Definícia

Unárny operátor $N : [0,1] \to [0,1]$ *sa nazýva* negátor, *ak pre ľubovoľné* $a, b \in [0,1]$ *platí*

- *(i)* $a < b \Rightarrow N(b) \leq N(a)$,
- *(ii)* $N(0) = 1, N(1) = 0$.

- Duálny negátor $N^d : [0,1] \to [0,1]$ k negátoru N, je daný predpisom $N^d(x) = 1 - N(1-x)$.

Fuzzy negácia

Definícia

Unárny operátor $N : [0,1] \to [0,1]$ *sa nazýva* negátor, *ak pre ľubovoľné* $a, b \in [0,1]$ *platí*

- *(i)* $a < b \Rightarrow N(b) \leq N(a)$,
- *(ii)* $N(0) = 1, N(1) = 0$.

- Duálny negátor $N^d : [0,1] \to [0,1]$ k negátoru N, je daný predpisom $N^d(x) = 1 - N(1-x)$.
- Negátor N sa nazýva *striktný negátor* vtedy a len vtedy, keď zobrazenie N je spojité a klesajúce.

Fuzzy negácia

Definícia

Unárny operátor $N : [0,1] \to [0,1]$ *sa nazýva* negátor, *ak pre ľubovoľné* $a, b \in [0,1]$ *platí*

- *(i)* $a < b \Rightarrow N(b) \leq N(a)$,
- *(ii)* $N(0) = 1, N(1) = 0$.

- Duálny negátor $N^d : [0,1] \to [0,1]$ k negátoru N, je daný predpisom $N^d(x) = 1 - N(1-x)$.
- Negátor N sa nazýva *striktný negátor* vtedy a len vtedy, keď zobrazenie N je spojité a klesajúce.
- Negátor N sa nazýva *involutívny negátor* ak platí $(N')' = N$.

Fuzzy negácia

Definícia

Unárny operátor $N : [0,1] \to [0,1]$ *sa nazýva* negátor, *ak pre ľubovoľné* $a, b \in [0,1]$ *platí*

- *(i)* $a < b \Rightarrow N(b) \leq N(a)$,
- *(ii)* $N(0) = 1, N(1) = 0$.

- Duálny negátor $N^d : [0,1] \to [0,1]$ k negátoru N, je daný predpisom $N^d(x) = 1 - N(1-x)$.
- Negátor N sa nazýva *striktný negátor* vtedy a len vtedy, keď zobrazenie N je spojité a klesajúce.
- Negátor N sa nazýva *involutívny negátor* ak platí $(N')' = N$.
- Striktný negátor je silný práve vtedy, keď je involutívny.

Príklad

- $N_s(a) = 1 - a$ *silný negátor, štandardný negátor,*
- $N(a) = 1 - a^2$ *striktný, ale nie silný negátor,*
- $N(a) = \sqrt{1 - a^2}$ *silný negátor,*

Príklad

- $N_s(a) = 1 - a$ *silný negátor, štandardný negátor,*
- $N(a) = 1 - a^2$ *striktný, ale nie silný negátor,*
- $N(a) = \sqrt{1 - a^2}$ *silný negátor,*
- $N_{G_1}(1) = 0, N_{G_1}(a) = 1$ *ak* $a < 1$ *nespojitý negátor, najväčší negátor, duálny Gödelov negátor,*
- $N_{G_2}(0) = 1, N_{G_2}(a) = 0$ *ak* $a > 0$ *nespojitý negátor, najmenší negátor, Gödelov negátor,*

Konjunkcia

Definícia

Neklesajúce zobrazenie $C : [0,1]^2 \to [0,1]$ *sa nazýva* konjunktor, *ak pre ľubovoľné* $a, b \in [0,1]$ *platí*

- $C(a,b) = 0$ *ak* $a = 0,$ *alebo* $b = 0,$
- $C(1,1) = 1.$

Modelovanie konjunkcie-triangulárne normy

Definícia

Triangulárna norma (t-norma) *je binárna operácia na jednotkovom intervale* $[0,1]$, *t.j. funkcia* $T:[0,1]^2 \to [0,1]$ *taká, že pre každé* $x,y,z \in [0,1]$ *sú splnené nasledujúce axiómy:*

- *(T1)* $T(x,y) = T(y,x)$ Komutatívnosť
- *(T2)* $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$ Asociatívnosť
- *(T3) ak* $y \leq z$, *tak* $T(x,y) \leq T(x,z)$ Monotónnosť
- *(T4)* $T(x,1) = x$. Okrajová podmienka

Príklad

- *Funkcia* $F_1 : [0,1]^2 \to [0,1]$ *daná predpisom*

$$F_1(x,y) = x,$$

splĺňa (T2), (T3) a (T4), ale nesplĺňa (T1).

- *Funkcia* $F_2 : [0,1]^2 \to [0,1]$ *daná predpisom*

$$F_2(x,y) = x.y.\max(x,y),$$

splĺňa (T1), (T3) a (T4), ale nesplĺňa (T2).

Príklad

- *Funkcia* $F_3 : [0,1]^2 \to [0,1]$ *daná predpisom*

$$F_3(x,y) = \begin{cases} 0.5, & \textit{ak } (x,y) \in]0,1[^2, \\ \min(x,y), & \textit{inak,} \end{cases}$$

splĺňa (T1), (T2) a (T4), ale nesplĺňa (T3).

- *Funkcia* $F_4 : [0,1]^2 \to [0,1]$ *daná predpisom*

$$F_4(x,y) = \frac{1}{2},$$

splĺňa (T1), (T2) a (T3), ale nesplĺňa (T4).

Príklad

Základné štyri t-normy sú:

- Minimová t-norma $T_M : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$T_M(x,y) = \min(x,y).$$

- Súčinová t-norma $T_P : [0,1]^2 \to [0,1]$

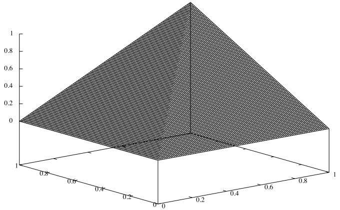
$$T_P(x,y) = x.y.$$

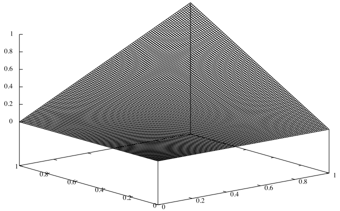
- Łukasiewiczova t-norma $T_L : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$T_L(x,y) = \max(x+y-1,0).$$

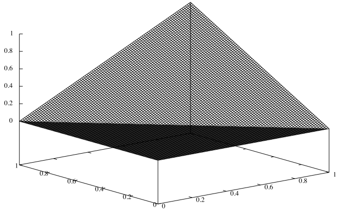
- Drastický súčin $T_D : [0,1]^2 \to [0,1]$

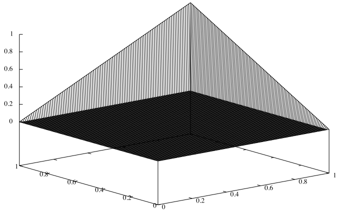
$$T_D(x,y) = \begin{cases} \min(x,y), & \textit{ak } \max(x,y) = 1, \\ 0, & \textit{inak.} \end{cases}$$


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

T_M T_P


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

T_L T_D

Definícia

- *Ak pre t-normy* T_1 *a* T_2 *je pre každý bod* $(x, y) \in [0, 1]^2$ *splnená nerovnosť* $T_1(x, y) \leq T_2(x, y)$, *hovoríme, že* T_1 *je* slabšia *ako* T_2, *alebo* T_2 *je* silnejšia *ako* T_1 *a píšeme* $T_1 \leq T_2$.

Definícia

- *Ak pre t-normy* T_1 *a* T_2 *je pre každý bod* $(x,y) \in [0,1]^2$ *splnená nerovnosť* $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$, *hovoríme, že* T_1 *je* slabšia *ako* T_2, *alebo* T_2 *je* silnejšia *ako* T_1 *a píšeme* $T_1 \leq T_2$.
- *Ak pre t-normy* T_1 *a* T_2 *platí, že* $T_1 \leq T_2$ *a* $T_1 \neq T_2$, *t.j. ak* $T_1 \leq T_2$, *ale* $T_1(x_0,y_0) < T_2(x_0,y_0)$ *pre nejaký bod* $(x_0,y_0) \in [0,1]^2$, *tak* $T_1 < T_2$.

Definícia

Hovoríme, že t-norma T je spojitá, *ak funkcia $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ je spojitá v každom bode $(x, y) \in [0,1]^2$.*

Definícia

Hovoríme, že t-norma T je spojitá, *ak funkcia $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ je spojitá v každom bode $(x,y) \in [0,1]^2$.*

Tvrdenie (Klement, Mesiar, Pap)

Triangulárna norma je spojitá práve vtedy, keď je spojitá v prvej súradnici, t.j. pre každé $y \in [0,1]$ je funkcia jednej premennej

$$T(.,y) : [0,1]^2 \to [0,1]$$

spojitá.

Definícia

Hovoríme, že t-norma T *je* spojitá zľava (resp. sprava), *ak pre každé* $y \in [0,1]$ *a pre ľubovoľnú neklesajúcu (resp. nerastúcu) postupnosť* $(x_n)_{n\in N}$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n, y) = T(\lim_{n\to\infty} x_n, y).$$

Definícia

Hovoríme, že t-norma T je spojitá zľava (resp. sprava), *ak pre každé $y \in [0,1]$ a pre ľubovoľnú neklesajúcu (resp. nerastúcu) postupnosť $(x_n)_{n \in N}$ platí*

$$\lim_{n \to \infty} T(x_n, y) = T(\lim_{n \to \infty} x_n, y).$$

Tvrdenie (Klement, Mesiar, Pap)

Triangulárna norma je spojitá zľava (resp. sprava) *práve vtedy, keď je spojitá zľava (resp. sprava) v prvej súradnici, t.j. ak pre každé $y \in [0,1]$ a pre každú postupnosť $(x_n)_{n \in N} \in [0,1]^N$ platí*

$$\sup T(x_n, y) = T(\sup x_n, y),$$

resp.

$$(\inf T(x_n, y) = T(\inf x_n, y)) .$$

Algebraické vlastnosti t-noriem

Definícia

Ak T je t-norma, $x \in [0,1]$ a $n \in N$, tak

$$x_T^{(n)} = \begin{cases} x, & \text{ak } n = 1, \\ T(x, x_T^{(n-1)}), & \text{ak } n > 1. \end{cases}$$

Definícia

Hovoríme, že t-norma T *je* archimedovská, *ak pre všetky body* $(x, y) \in]0, 1[^2$ *existuje* $n \in N$ *také, že*

$$x_T^{(n)} < y.$$

Definícia

Hovoríme, že t-norma T *je* archimedovská, *ak pre všetky body* $(x, y) \in]0, 1[^2$ *existuje* $n \in N$ *také, že*

$$x_T^{(n)} < y.$$

Tvrdenie (Klement, Mesiar, Pap)

Triangulárna norma T je archimedovská práve vtedy, keď pre každé $x \in]0, 1[$ *je*

$$\lim_{n \to \infty} x_T^{(n)} = 0.$$

Tvrdenie (Klement, Mesiar, Pap)

- *Ak t-norma T je archimedovská, tak pre každé $x \in \,]0,1[$ platí $T(x,x) < x$.*
- *Ak je t-norma T spojitá sprava, potom je archimedovská práve vtedy, keď pre každé $x \in \,]0,1[$ platí $T(x,x) < x$.*

Definícia

- *Hovoríme, že t-norma T je* striktne monotónna, *ak je rastúca na* $]0,1]^2$ *ako funkcia* $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ *alebo ekvivaletne,*

$$\textit{ak} \quad x \in \,]0,1] \quad \textit{a} \quad y < z, \quad \textit{tak} \quad T(x,y) < T(x,z).$$

- *Hovoríme, že t-norma T je* združene striktne monotónna, *ak platí:*

$$\textit{ak} \quad x < x' \quad \textit{a} \quad y < y', \quad \textit{tak} \quad T(x,y) < T(x',y').$$

- *Hovoríme, že t-norma T je* striktná, *ak je spojitá a striktne monotónna.*

Definícia

Prvok $x \in]0,1[$ *nazveme* deliteľ nuly *danej t-normy* T, *ak existuje* $y \in]0,1[$ *také, že* $T(x,y) = 0$.
Hovoríme, že $x \in]0,1[$ *je* nilpotentný prvok danej t-normy T, *ak existuje* $n \in N$ *také, že* $x_T^{(n)} = 0$.

Definícia

Prvok $x \in]0,1[$ *nazveme* deliteľ nuly *danej t-normy* T*, ak existuje* $y \in]0,1[$ *také, že* $T(x,y) = 0$.
Hovoríme, že $x \in]0,1[$ *je* nilpotentný prvok danej t-normy T*, ak existuje* $n \in N$ *také, že* $x_T^{(n)} = 0$.

Definícia

Hovoríme, že t-norma T *je* nilpotentná*, ak je spojitá a každé* $x \in]0,1[$ *je jej nilpotentným prvkom.*

Tvrdenie (Klement, Mesiar, Pap)

Nech T je spojitá archimedovská t-norma. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné :

- *T je nilpotentná.*
- *Existuje aspoň jeden nilpotentný prvok danej t-normy T.*
- *T nie je striktná.*
- *T má deliteľa nuly.*

Konštrukcie triangulárnych noriem

- *Ordinálne súčty:*
  Nech $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ je trieda t-noriem a nech $(]a_\alpha, e_\alpha[)_{\alpha\in A}$ je trieda po dvojiciach disjunktných otvorených podintervalov intervalu $[0,1]$. Potom funkcia $T:[0,1]^2\to[0,1]$ daná predpisom

$$T(x,y)=\begin{cases} a_\alpha+(e_\alpha-a_\alpha).T_\alpha\left(\frac{x-a_\alpha}{e_\alpha-a_\alpha},\frac{y-a_\alpha}{e_\alpha-a_\alpha}\right), & \text{ak } (x,y)\in]a_\alpha,e_\alpha[^2\\ \min(x,y), & \text{inak,}\end{cases}$$

  je t-normou, ktorú nazývame *ordinálnym súčtom* sčítancov $\langle a_\alpha, e_\alpha, T_\alpha\rangle$, $\alpha\in A$.

- *Aditívne a multiplikatívne generovanie:*
  - Nech funkcia $f : [0,1] \to [0,\infty]$ je spojitá a klesajúca, pričom $f(1) = 0$, potom predpisom

    $$T_{<f>}(x,y) = f^{-1}(\min(f(x) + f(y), f(0)))$$

    je daná t-norma a funkcia f sa nazýva *aditívný generátor* t-normy $T_{<f>}$.

- *Aditívne a multiplikatívne generovanie:*
  - Nech funkcia $f : [0, 1] \to [0, \infty]$ je spojitá a klesajúca, pričom $f(1) = 0$, potom predpisom
$$T_{<f>}(x, y) = f^{-1}(\min(f(x) + f(y), f(0)))$$
je daná t-norma a funkcia f sa nazýva *aditívny generátor* t-normy $T_{<f>}$.
  - Nech funkcia $g : [0, 1] \to [0, 1]$ je spojitá a rastúca, pričom $g(1) = 1$, potom predpisom
$$T^{<g>}(x, y) = g^{-1}(\max(g(x).g(y), g(0)))$$
je daná t-norma a funkcia g sa nazýva *multiplikatívny generátor* t-normy $T^{<g>}$.

- $\varphi-$*transformácie:* Ak φ je rastúca bijekcia uzavretého jednotkového intervalu, potom predpisom

$$T_\varphi(x,y) = \varphi^{-1}(T(\varphi(x),\varphi(y)))\text{pre } (x,y) \in [0,1]$$

je daná t-norma, ktorú nazývame $\varphi-$*transformáciou t-normy* T.

Konštrukcie spojitých archimedovských triangulárnych noriem

Príklad

Dané sú funkcie $f:[0,1]\to[0,+\infty]$ *a* $g:[0,1]\to[0,1]$

$$f(x) = -\ln x \qquad a \qquad g(x) = x.$$

$$f^{-1}(x) = e^{-x} \qquad a \qquad g^{-1}(x) = x.$$

Konštrukcie spojitých archimedovských triangulárnych noriem

Príklad

Dané sú funkcie $f : [0,1] \to [0,+\infty]$ *a* $g : [0,1] \to [0,1]$

$$f(x) = -\ln x \qquad a \qquad g(x) = x.$$

$$f^{-1}(x) = e^{-x} \qquad a \qquad g^{-1}(x) = x.$$

$$P_{<f>}(x,y) = f^{-1}(f(x) + f(y)),$$

$$P^{<g>}(x,y) = g^{-1}(g(x).g(y)).$$

Konštrukcie spojitých archimedovských triangulárnych noriem

Príklad

Dané sú funkcie $f : [0,1] \to [0,+\infty]$ *a* $g : [0,1] \to [0,1]$

$$f(x) = -\ln x \qquad a \qquad g(x) = x.$$

$$f^{-1}(x) = e^{-x} \qquad a \qquad g^{-1}(x) = x.$$

$$P_{<f>}(x,y) = f^{-1}(f(x) + f(y)),$$
$$P^{<g>}(x,y) = g^{-1}(g(x).g(y)).$$

$$P_{<f>}(x,y) = e^{-(-\ln x - \ln y)} = e^{(\ln x + \ln y)} = e^{\ln x.y} = x.y = T_P(x,y),$$
$$P^{<g>}(x,y) = g^{-1}(x.y) = x.y = T_P(x,y).$$

Príklad

Dané sú funkcie $f : [0,1] \to [0,1]$ *a* $g : [0,1] \to [0,1]$

$$f(x) = 1 - x \qquad a \qquad g(x) = e^{-(1-x)}$$

a ich inverzné funkcie

$$f^{-1}(x) = 1 - x \qquad a \qquad g^{-1}(x) = 1 + \ln x.$$

Príklad

Dané sú funkcie $f : [0,1] \to [0,1]$ *a* $g : [0,1] \to [0,1]$

$$f(x) = 1 - x \qquad a \qquad g(x) = e^{-(1-x)}$$

a ich inverzné funkcie

$$f^{-1}(x) = 1 - x \qquad a \qquad g^{-1}(x) = 1 + \ln x.$$

$$L_{<f>}(x,y) = f^{-1}(\min(f(x) + f(y), f(0))),$$
$$L^{<g>}(x,y) = g^{-1}(\max(g(x).g(y), g(0))).$$

Príklad

Dané sú funkcie $f : [0,1] \to [0,1]$ *a* $g : [0,1] \to [0,1]$

$$f(x) = 1 - x \qquad a \qquad g(x) = e^{-(1-x)}$$

a ich inverzné funkcie

$$f^{-1}(x) = 1 - x \qquad a \qquad g^{-1}(x) = 1 + \ln x.$$

$$L_{<f>}(x,y) = f^{-1}(\min(f(x) + f(y), f(0))),$$
$$L^{<g>}(x,y) = g^{-1}(\max(g(x).g(y), g(0))).$$

$$L_{<f>}(x,y) = T_L(x,y),$$
$$L^{<g>}(x,y) = T_L(x,y).$$

Tvrdenie (Ling)

Funkcia $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ *je spojitá archimedovská t-norma práve vtedy, keď existuje spojitá, klesajúca funkcia* $f : [0,1] \to [0,\infty]$, *taká, že* $f(1) = 0$ *a pre každé* $x, y \in [0,1]$ *je*

$$T(x,y) = f^{-1}(\min(f(x) + f(y), f(0))).$$

Funkcia f *sa nazýva* aditívny generátor t-normy T *a je jednoznačne určená až na kladnú násobnú konštantu.*

Tvrdenie (Klement, Mesiar, Pap)

Funkcia $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ *je spojitá archimedovská t-norma práve vtedy, keď existuje spojitá, rastúca funkcia* $g : [0,1] \to [0,1]$*, taká, že* $g(1) = 1$ *a pre každé* $x, y \in [0,1]$ *je*

$$T(x,y) = g^{-1}(\max(g(x).g(y), g(0))).$$

Funkcia g *sa nazýva* multiplikatívny generátor t-normy T *a je jednoznačne určená až na kladnú mocninu.*

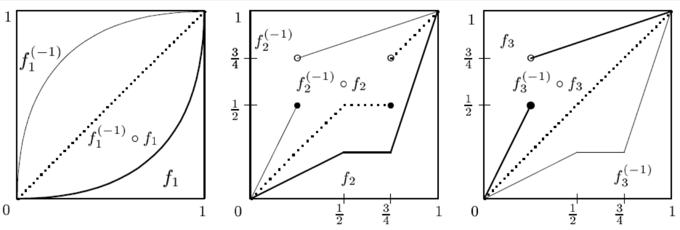
Príklad

Ling: *funkcia* $t : [0, 1] \to [1, 2]$,

$$t(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{ak } x \in [0, 1[, \\ 0, & \text{ak } x = 1, \end{cases}$$

je aditívnym generátorom drastického súčinu.

Príklad



$f_1^{(-1)}$
$f_1^{(-1)} \circ f_1$
f_1
$f_2^{(-1)}$
$f_2^{(-1)} \circ f_2$
f_2
f_3
$f_3^{(-1)} \circ f_3$
$f_3^{(-1)}$
0
1
$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$

Definícia

Nech $f : [a, b] \to [c, d]$ *je neklesajúca funkcia, potom pre každé* $y \in [c, d]$ *je predpisom*

$$f^{(-1)}(y) = \sup(x \in [a, b]; f(x) < y)$$

definovaná pseudoinverzná funkcia $f^{(-1)}$ *k danej funkcii* f.

Definícia

Nech $f : [a, b] \to [c, d]$ *je nerastúca (nekonštantná) funkcia, potom pre každé* $y \in [c, d]$ *je predpisom*

$$f^{(-1)}(y) = \sup(x \in [a, b]; f(x) > y)$$

definovaná pseudoinverzná funkcia $f^{(-1)}$ *k danej funkcii* f.

Definícia

Aditívny generátor t-normy T *je klesajúca funkcia* $f : [0,1] \to [0,\infty]$, *ktorá je sprava-spojitá v bode* 0, $f(1) = 0$ *a pre všetky* $(x,y) \in [0,1]^2$ *je splnené*

$$f(x) + f(y) \in H(f) \cup [f(0), \infty],$$

pričom t-norma T *je daná predpisom:*

$$T(x,y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y)).$$

Definícia

Multiplikatívny generátor t-normy T *je rastúca funkcia* $l : [0,1] \to [0,1]$, *ktorá je sprava-spojitá v bode* $0, l(1) = 1$ *a pre všetky* $(x,y) \in [0,1]^2$ *je splnené*

$$l(x).l(y) \in H(l) \cup [0, l(0)],$$

pričom t-norma T *je daná predpisom:*

$$T(x,y) = l^{(-1)}(l(x).l(y)).$$

Fuzzy disjunkcia

Definícia

Neklesajúce zobrazenie $D : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ *sa nazýva* disjunktor, *ak pre ľubovoľné* $a, b \in [0, 1]$ *platí*

- $D(a, b) = 1 \quad$ *ak* $\quad a = 1, \quad$ *alebo* $\quad b = 1,$
- $D(0, 0) = 0.$

Disjunktory-triangulárne konormy

Definícia

Ak T *je t-norma, tak jej duálna t-konorma* $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ *je daná predpisom*

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y).$$

Disjunktory-triangulárne konormy

Definícia

Ak T je t-norma, tak jej duálna t-konorma $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ je daná predpisom

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y).$$

Definícia

Triangulárna konorma *(*t-konorma*) je binárna operácia na intervale $[0,1]$, t.j. funkcia $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ taká, že pre každé $x, y, z \in [0,1]$ sú splnené nasledujúce axiómy:*

(S1) $S(x,y) = S(y,x)$ Komutatívnosť

(S2) $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z)$ Asociatívnosť

(S3) ak $y \leq z$, *tak* $S(x,y) \leq S(x,z)$ Monotónnosť

(S4) $S(x,0) = x$. Okrajová podmienka

Príklad

Základné štyri t-konormy sú:

- *Maximová konorma* $S_M : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$S_M(x,y) = \max(x,y).$$

- *Pravdepodobnostný súčet* $S_P : [0,1]^2 \to [0,1]$

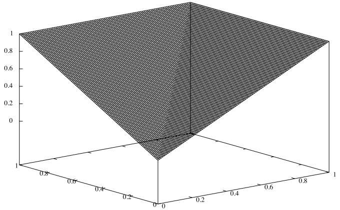
$$S_P(x,y) = x + y - x.y.$$

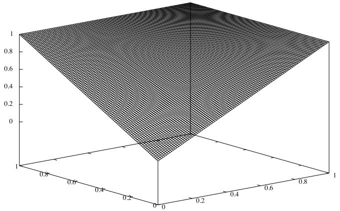
- *Łukasiewiczova konorma* $S_L : [0,1]^2 \to [0,1]$

$$S_L(x,y) = \min(x+y,1).$$

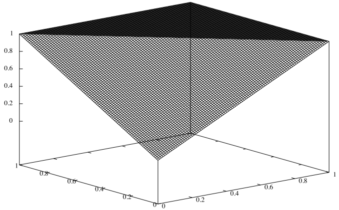
- *Drastický súčet* $S_D : [0,1]^2 \to [0,1]$

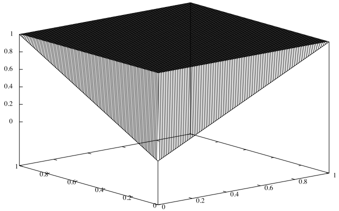
$$S_D(x,y) = \begin{cases} \max(x,y), & \textit{ak } \min(x,y) = 0, \\ 1, & \textit{inak.} \end{cases}$$


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

S_M S_P





S_L S_D

Uninormy

Definícia

Uninorma *je binárna operácia na intervale* $[0,1]$*, t.j. funkcia* $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ *taká, že pre každé* $x, y, z \in [0,1]$ *sú splnené nasledujúce axiómy:*

(S1) $U(x,y) = U(y,x)$ Komutatívnosť

(S2) $U(x, U(y,z)) = U(U(x,y), z)$ Asociatívnosť

(S3) ak $y \leq z,$ *tak* $U(x,y) \leq U(x,z)$ Monotónnosť

(S4) $\exists e \in [0,1] : U(x,e) = x.$ Existencia neutrálneho prvku

Kopuly

Definícia

Kopula je funkcia $C : [0,1]^2 \to [0,1]$, *ktorá spĺňa nasledujúce podmienky:*

- $C(x,0) = C(0,x) = 0,$
- $C(x,1) = C(1,x) = x,$
- $C(x_1,y_1) - C(x_2,y_1) - C(x_1,y_2) + C(x_2,y_2) \geq 0,$
  $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2.$

Tvrdenie

Ak C *je kopula, potom platí*

$$0 \leq C(x_2,y_2) - C(x_1,y_1) \leq x_2 - x_1 + y_2 - y_1,$$

pre $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2.$

Tvrdenie

Triangulárna norma T je kopulou práve vtedy, keď spĺňa Lipschitzovskú podmienku:

$$T(x_2, y) - T(x_1, y) \leq x_2 - x_1,$$

pre $x_1 \leq x_2$.

Definícia

Duálna kopula ku kopule C je daná vzťahom

$$C^d(x, y) = x + y - C(x, y).$$