TEORIE *FUZZY* GRAFŮ

Tým Euler

Motivace

Matematický popis reálného světa zas o něco přesněji

- Modelování transportu
- Sociální sítě
- Akcelerace decision making procedur v LLM
- Detekce rakovinotvorných buněk

Co je to Fuzzy Graf?

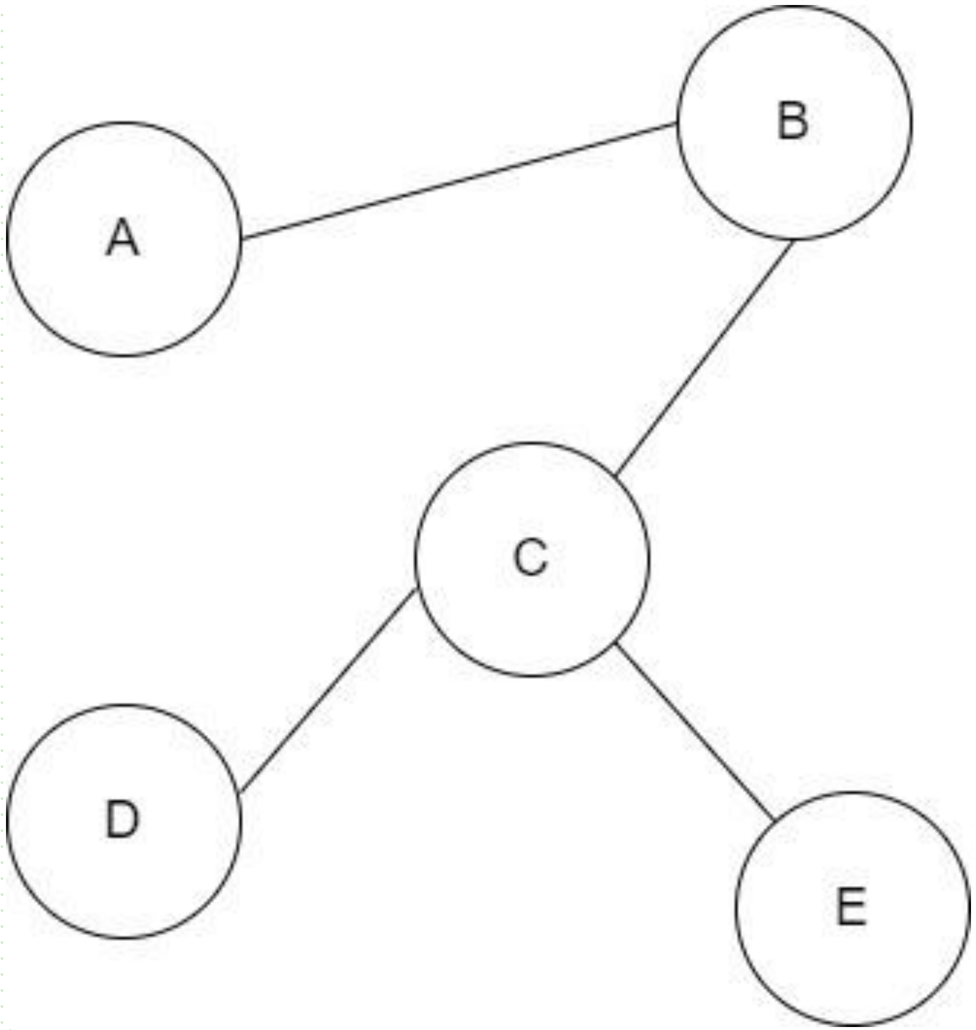
Trojice (V, σ, μ)

V – Množina vrcholů tvořících graf

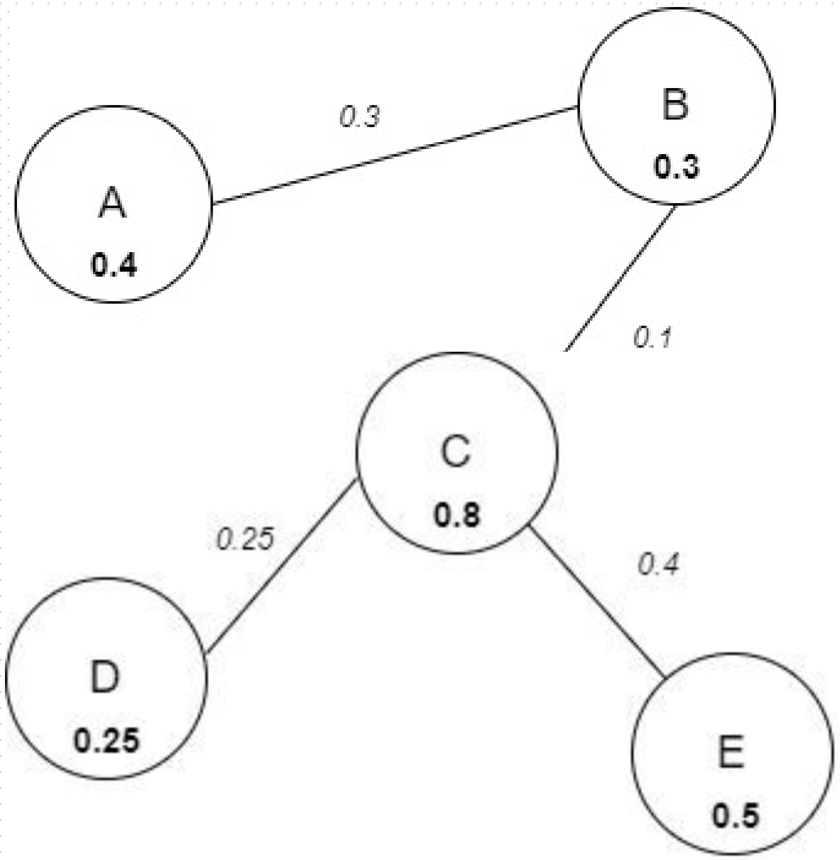
σ – V -> [0,1]

μ – E -> [0,1]

$\forall$ x, y ∈ V, μ(x y) ≤ σ(x) ∧ σ(y)



Fuzzy Podgrafy



Částečný Fuzzy Podgraf

- $G = (V, \sigma, \mu)$
- $H = (V, \tau, \nu)$
- H je podgrafem G pokud $\tau \subseteq \sigma$ a $\nu \subseteq \mu$

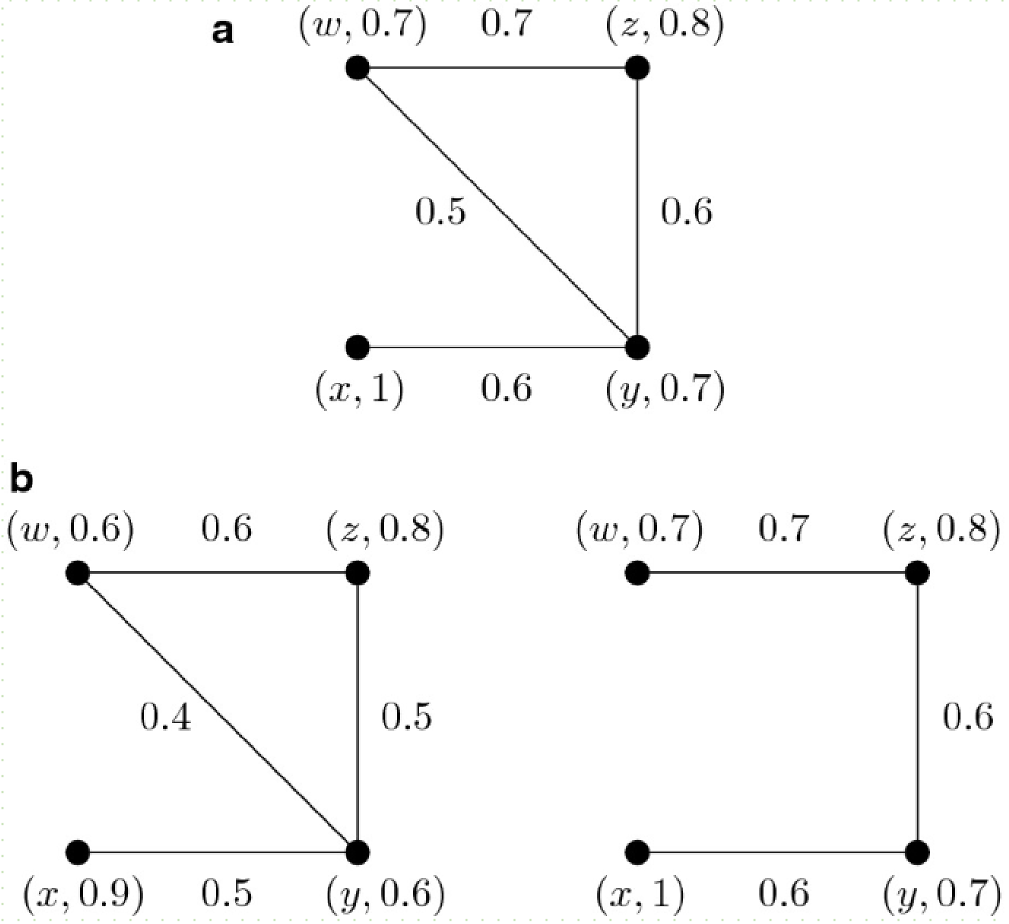
Indukovaný Fuzzy Podgraf

- $H = (P, \tau, \nu)$
- $P \subseteq V$, $\tau(x) = \sigma(x)$ pro všechny $x \in P$ a $\nu(x\ y) = \mu(x\ y)$ pro všechny $x, y \in P$

(Vznikne smazáním jednoho, či více uzlů z původního grafu)

Spanning Fuzzy Podgraf = Kostra

- G = (V, σ, μ)
- H = (V, τ , ν)
- Pak Graf H nazýváme kosterním podgrafem G, pokud τ = σ
- ν ⊆ μ

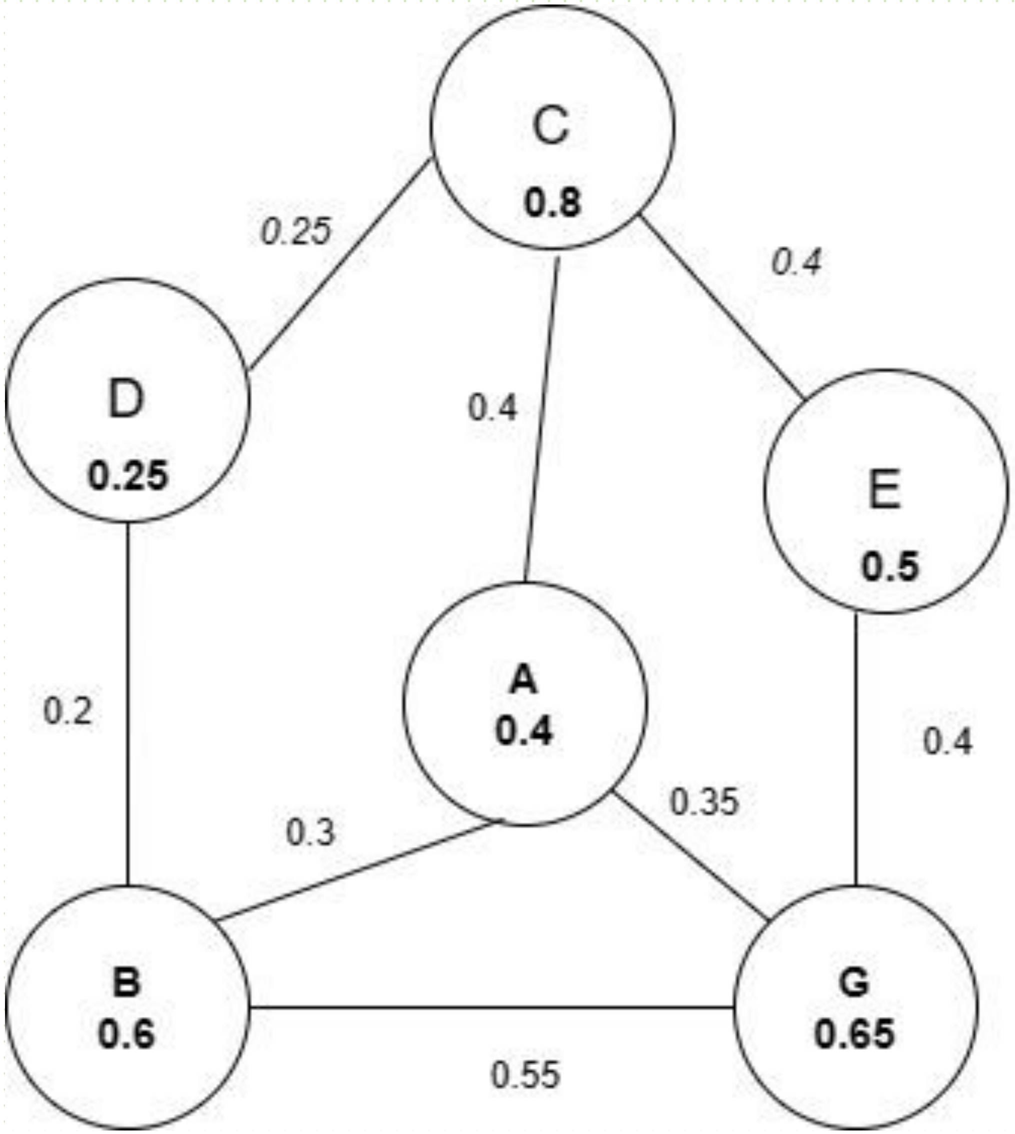


Cesty Grafem

- Cesta = Posloupnost vrcholů $x_0, x_1, \ldots, x_n : \mu(x_{i-1}x_i) > 0, i = 1, \ldots, n$
- Délku cesty popisuje n
- Průměr cesty = nejdelší cesta mezi x_x a x_y
- Síla cesty = $\Lambda_{i=1}^{n} \mu(x_{i-1}x_i)$
- Nejsilnější cesta mezi jakýmikoli vrcholy grafu = $\mu\infty(x, y)$
- Cyklus = $x_0 = x_n$ a $n \geq 3$

Fuzzy Mosty

- $G = (\sigma, \mu)$
- x, y jsou dva odlišné vrcholy
- G° = podgraf G vzniklý vymazáním hrany xy
- ($G° = (\sigma, \mu)$, $\mu°(xy) = 0$ a $\mu° = \mu$ pro všechny ostatní hrany)
- xy je fuzzy mostem jestli $\mu°\infty(u, v) < \mu\infty(u, v)$ pro nějaké u, v ležící v $\sigma°$. Smazání xy redukuje sílu propojení mezi nějakými páry vrcholů v G
- xy je fuzzy mostem jestli existují vrcholy u a v, tak, že xy je hrana každé nejsilnější cesty mezi nimi



Fuzzy Cutvertices

- Odstraněním tohoto vrcholu zaniknou vazby spojující vrchol s ostatními
- Pokud odstraněním w (u != w != v) vzniká $\mu^{\circ\infty}(u, v) < \mu^{\infty}(u, v)$
- W je fuzzy cutvertex, pokud existuje u,v takové, že w je na každé nejsilnější cestě z u do v
- Graf bez cutvertices = neoddělitelný/ blok

Maximální kostra grafu

- Jedná se o podgraf, takový, že $\mu\infty(u, v)$ je síla jedinečné cesty mezi u – v pro všechny uzly u, v na něm ležící
- Uzel w fuzzy grafu G je fuzzy cutvertex pouze pokud je vnitřním uzlem všech možných maximálních koster grafu G

CFG – Complete Fuzzy Graph

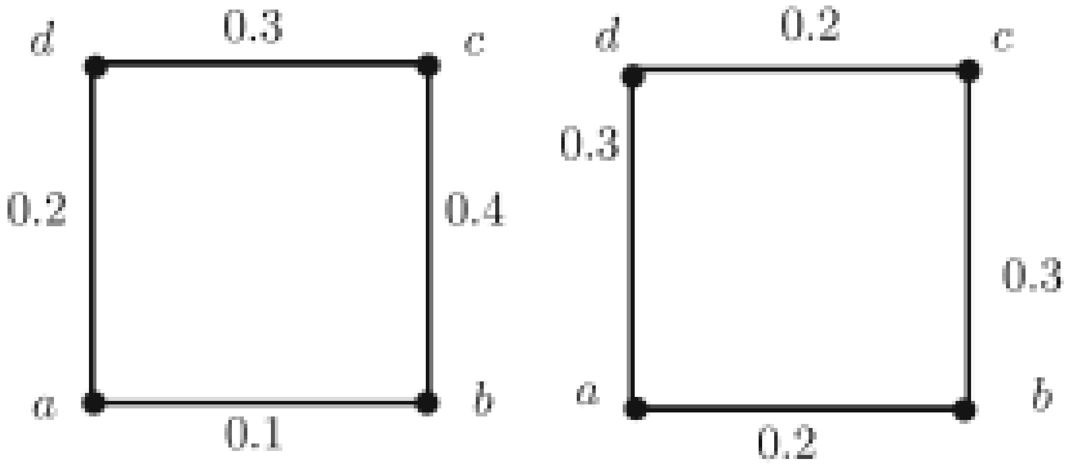
- $G = (\sigma, \mu)$, $\mu(uv) = \sigma(u) \wedge \sigma(v)$ $\forall$ $u, v \in \sigma*$
- CFG(G) => $\mu\infty = \mu$ a G nemá žádné fuzzy cutvertices
- $\mu^2(u, v) = \vee z \in \sigma^* \{\mu(uz) \wedge \mu(zv)\} = \vee\{\sigma(u) \wedge \sigma(v) \wedge \sigma(z)\} = \sigma(u) \wedge \sigma(v) = \mu(uv)$
- Podobně tak $\mu^3(u, v) = \mu(uv)$ až $\mu^k (u, v) = \mu(uv)$ ($k \in Z$)
- $\mu\infty(u, v) = \sup\{\mu^k (u, v) \mid$ pro všechna $k \geq 1, k \in Z\} = \mu(uv)$
- Nemá cutvertices, má maximálně jeden fuzzy most

Fuzzy Les a Fuzzy Stromy

- $G = (\sigma,\mu)$ je fuzzy lesem, pokud má fuzzy spanning podgraf $F = (\sigma, \nu)$, který je lesem, kde všechny hrany (x,y), které nejsou v $F = \nu(x\ y) = 0$ platí $\mu(x, y) < \nu\infty\ (x, y)$
- Tedy pokud je (x,y) v G ale není v F, tak existuje v F cesta mezi x a y, která je silnější jak $\mu(x, y)$
- Propojený les se nazývá stromem

Fuzzy Cykly

- G je cyklem jesti (Supp(σ), Supp(μ)) je cyklem.
- G je fuzzy cyklem, jestli (Supp(σ), Supp(μ)) je cyklem a neexistuje jedinečné xy ∈ Supp(μ) takové, že μ(x y) = ∧{μ(uv) | uv ∈ Supp(μ)}
- *(Supp = nemá nulovou hodnotu membership value)*



Fuzzy Cut Sets

- Pokud je G graf, tak může být asociován s dvourozměrným polem nad polem skalárů $Z^2 = \{0, 1\}$ kde sčítání a násobení jsou modulo 2
- Množina vrcholů V(G) = {v1, v2,...,vn} a množina hran E(G) = {e1, e2,..., em} A0-řetězec G je lineární kombinace $\sum \epsilon i \ vi$ vrcholů
- 1-řetězec je lineární kombinace $\sum \epsilon i \ ei,$ v obou případech i ∈ Z2.
- Boundary operator ∂ je lineární funkce mapující 1-řetězce do 0-řetězců taková, že e = x y, tak ∂(e) = x + y.
- Coboundary operator δ je lineární funkce mapující 0-řetězce do 1-řetězců taková, že δ(v) = $\sum \epsilon i \ ei$ pokud je ei vycházející z v.

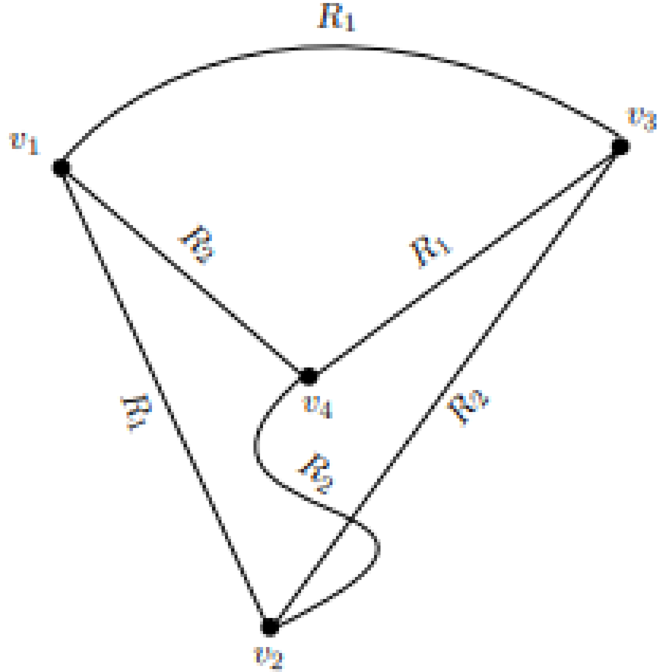
Fuzzy Cut Sets

- 1-řetězec s boundary funkcí 0 je zvaný cyklový vektor G, který může být vyobrazen jako množina hranou oddělených cyklů
- Množina všech takových cyklů se nazývá cyklový prostor G
- Cut Set je množina všech hran, jejichž oddělání vyúsťuje v rozpojený graf
- Cocycle je minimální cutset

Fuzzy Grafové Struktury

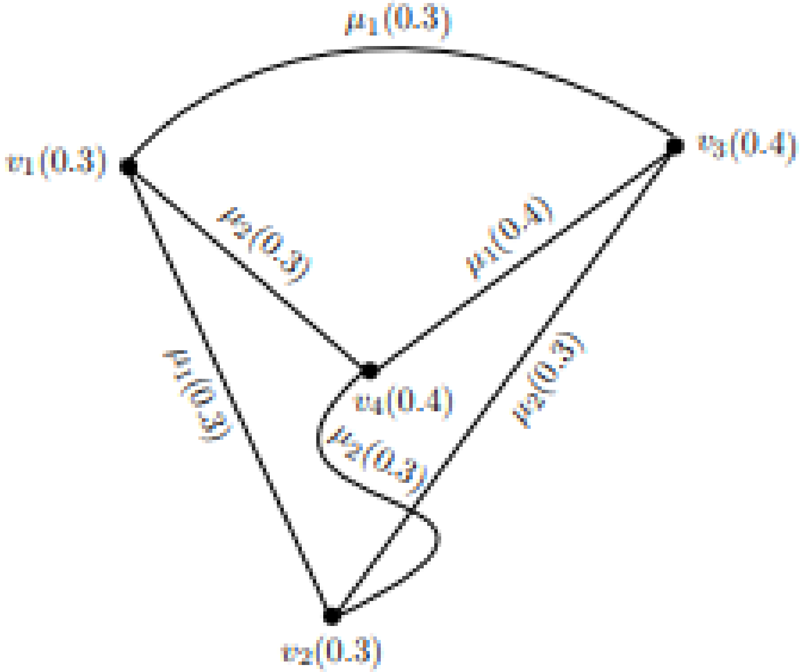
- Grafová struktura *GS G = (V, R1, R2, … ,Rn)* se skládá z množiny vrcholů V s relacemi *R1 – Rn* na V, které jsou vzájemně disjunktní
- Každá relace *Ri, 1 <= i <= n* je symetrická a není reflexivní

$$R_2 = \{v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4\} \qquad R_1 = \{v_1v_3, v_1v_2, v_3v_4\}$$



Fuzzy Grafové Struktury

- σ je fuzzy množina nad *V* a *μ1, μ2, . . . , μn* je fuzzy množina nad *R1, R2, . . . , Rn*
- Pokud $0 \leq \mu i(vu) \leq \sigma(v) \wedge \sigma(u)$ $\forall u, v \in V, i = 1, 2, . . . , n$, tak $G = (\sigma, \mu 1, \mu 2, . . . , \mu n)$ je Fuzzy Grafová Struktura (FGS) grafu G∗



$$\sigma(v_1) = 0.3, \sigma(v_2) = 0.3, \sigma(v_3) = 0.4, \sigma(v_4) = 0.4.$$

$$\mu_1(v_1v_3) = 0.3, \mu_1(v_1v_2) = 0.3, \mu_1(v_3v_4) = 0.4,$$

$$\mu_2(v_1v_4) = 0.3, \mu_2(v_2v_3) = 0.3, \mu_2(v_2v_4) = 0.3.$$

Fuzzy Grafové Struktury

Nechť jsou $G_1 = (\sigma_1, \mu'_0, \mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'n)$ a $G_2 = (\sigma_2, \mu''_1, \mu''_2, \ldots, \mu''_n)$ dvě grafové fuzzy struktury s vnitřními „crisp" grafovými strukturami $G^*_1 = (V_1, R'_1, R'_2, \ldots, R'_n)$ a $G^*_2 = (V_2, R''_1, R''_2, \ldots, R''_n)$.

$G_1 * G_2 = (\sigma, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ se nazývá **maximální** fuzzy grafovou strukturou s vnitřní „crisp" grafovou strukturou $G^* = (V, R_1, R_2, \ldots, R_n)$, kde:

- $V = V_1 \times V_2$
- $R_i = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) / u_1 = u_2,\ v_1 v_2 \in R''_i$ nebo $v_1 = v_2,\ u_1 u_2 \in R'_i\}$. Množina fuzzy vrcholů σ a fuzzy relací μ_i v maximálním produktu $G1 * G2 = (\sigma, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ je definovaná jako:

$$\sigma = \sigma_1 * \sigma_2,\ \boldsymbol{\sigma(u, v) = \sigma_1(u) \vee \sigma_2(v)},\ \text{pro všechna } (u, v) \in V = V_1 \times V_2$$

$$\mu_i = \mu'_i * \mu''_i,$$

$$\mu_i((u_1, v_1)(u_2, v_2)) = \begin{cases} \sigma_1(u_1) \vee \mu''_i(v_1 v_2), & u_1 = u_2, v_1 v_2 \in R''_i, \\ \sigma_2(v_1) \vee \mu'_i(u_1 u_2), & v_1 = v_2, u_1 u_2 \in R'_i, \end{cases}$$

Fuzzy Grafové Struktury

- Fuzzy Grafová Struktura $G = (\sigma, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n)$ je μ_i-silná pokud $\mu_i(v_1v_2) = \sigma(v_1) \land \sigma(v_2)$, pro všechny $v_1v_2 \in R_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Jestli G je μ_i -silná $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pak G se nazývá silná fuzzy grafová struktura
- Maximální produkt dvou silných grafových struktur je též silnou grafovou strukturou

Fuzzy Grafové Struktury

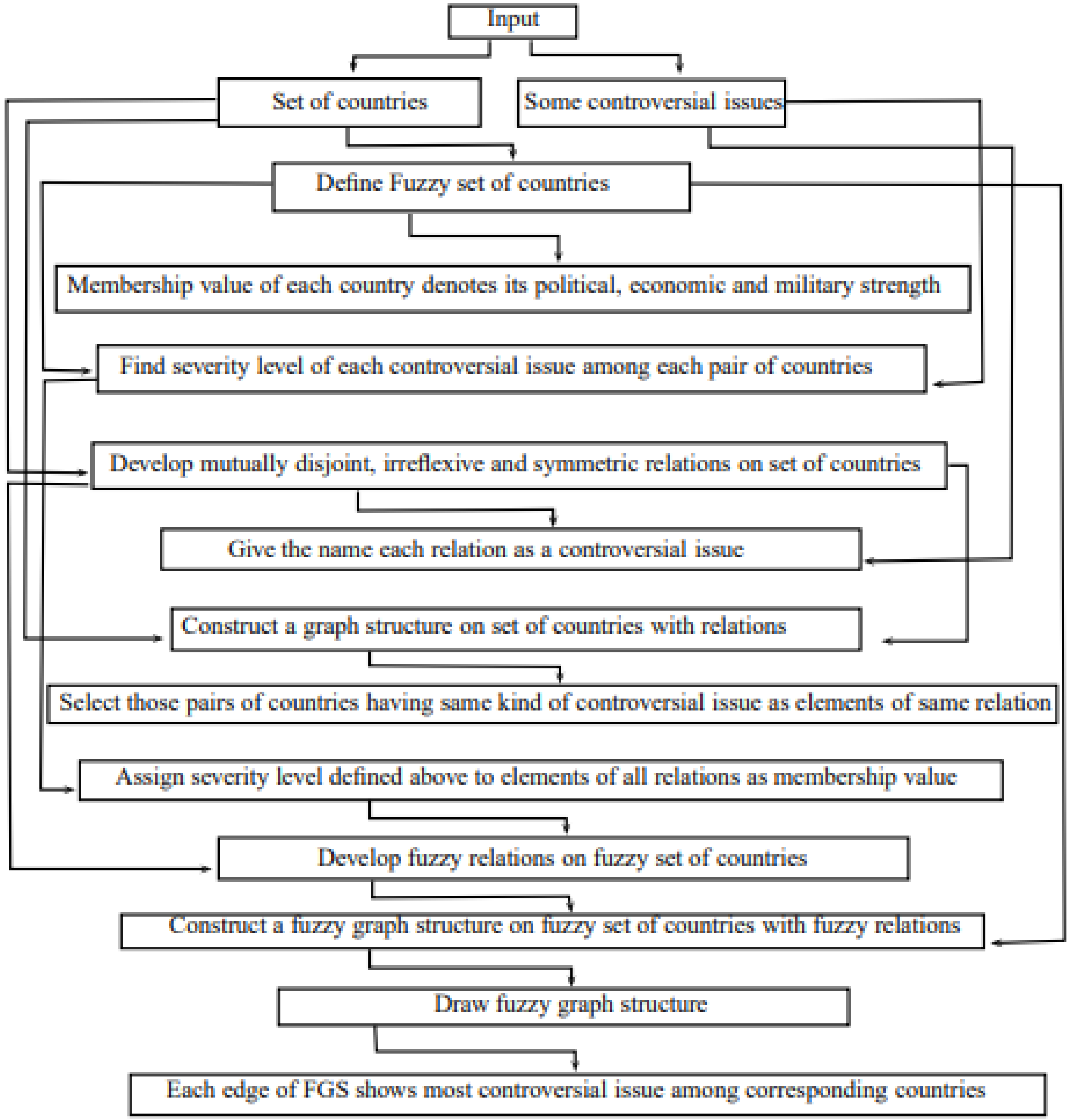
- Stupeň vrcholu maximálního produktu G1 * G2 dvou fuzzy grafových struktur G1 = (σ1, μ‘0, μ‘1 , μ‘ 2 , . . . , μ‘ n) a G2 = (σ2, μ‘‘1 , μ‘‘2 , . . . , μ‘‘n) je dán vztahem:

$$d_{G_1 * G_2}(u_i, v_j) = \sum_{u_i u_k \in R_i', v_j = v_l} \mu_i'(u_i u_k) \vee \sigma_2(v_j) + \sum_{v_j v_l \in R_j'', u_i = u_k} \mu_j''(v_j v_l) \vee \sigma_1(u_i).$$

- μ‘ i – stupeň vrcholu je dán:

$$\mu_i - d_{G_1 * G_2}(u_i, v_j) = \sum_{u_i u_k \in R_i', v_j = v_l} \mu_i'(u_i u_k) \vee \sigma_2(v_j) + \sum_{v_j v_l \in R_i'', u_i = u_k} \mu_i''(v_j v_l) \vee \sigma_1(u_i)$$

A co s tím?!


Input
Set of countries
Some controversial issues
Define Fuzzy set of countries
Membership value of each country denotes its political, economic and military strength
Find severity level of each controversial issue among each pair of countries
Develop mutually disjoint, irreflexive and symmetric relations on set of countries
Give the name each relation as a controversial issue
Construct a graph structure on set of countries with relations
Select those pairs of countries having same kind of controversial issue as elements of same relation
Assign severity level defined above to elements of all relations as membership value
Develop fuzzy relations on fuzzy set of countries
Construct a fuzzy graph structure on fuzzy set of countries with fuzzy relations
Draw fuzzy graph structure
Each edge of FGS shows most controversial issue among corresponding countries

Zdroje

- Fuzzy Graph Theory, Sunil Mathew, John N. Mordeson, Davender S. Malik: https://doi.org/10.1007/978-3-319-71407-3
- Rosenfeld, Azriel (1975). *Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes || FUZZY GRAPHS††The support of the Office of Computing Activities, National Science Foundation, under Grant GJ-32258X, is gratefully acknowledged, as is the help of Shelly Rowe in preparing this paper.. , (), 77–95.* doi:10.1016/b978-0-12-775260-0.50008-6
- Sitara, M.; Akram, M.; Yousaf Bhatti, M. Fuzzy Graph Structures with Application. *Mathematics* 2019, *7*, 63. https://doi.org/10.3390/math7010063

Děkuji za pozornost!