Kombinatorika

Kombinatorika je část diskrétní matematiky, která se zabývá určováním počtu možností, které mohou nastat za určitých předepsaných podmínek. Každé takové situaci musíme nejdříve porozumět, pokud možno ji rozložit na jednodušší situace a ty potom vyřešit pomocí kombinatorických pravidel. Tato pravidla mohou mít podobu vzorců, ovšem důležitější než naučit se vzorce, je naučit se používat kombinatorická pravidla, která jsou jejich základem. Bez porozumění těmto pravidlům nejsme schopni řešit jiné než triviální kombinatorické úvahy.

Základní kombinatorická pravidla jsou pravidlo součtu a pravidlo součinu, mnoho dalších pravidel vzniká jejich kombinováním.

Pravidlo součtu je zřejmé: týká se situací, ve kterých se úkol skládá z provedení úkolu *A* a z provedení úkolu *B*, *přičemž* žádný z *m* způsobů provedení úkolu *A* není totožný se žádným z *n* způsobů provedení úkolu *B* a říká, že potom provést úkol *A* nebo úkol *B* lze $m + n$ způsoby.

Příklad***:*** V knihovně máme 10 detektivek napsaných A.C. Doylem a 11 detektivek, jejichž autorkou je A. Christie. Kolika způsoby můžeme vybrat některou detektivku?

Řešení: Je zcela zřejmé, že je to $m + n = 10 + 11 = 21$ možností.

Poznamenejme, že předpoklad pravidla součtu, podle kterého žádný z *m* způsobů provedení úkolu *A* není totožný se žádným z *n* způsobů provedení úkolu *B* je podstatný. Uvažujme množiny $M = \{a, b, c\}$, $N = \{b, c, d, e\}$. Potom počet možností, jak můžeme vybrat jeden prvek z jejich sjednocení je $5 \neq 3 + 4$, což je součet počtu prvků jednotlivých množin.

Pravidlo součinu: Lze-li úkol *C* rozložit na dvě po sobě následující úlohy *A* a *B* (tedy provést *C* znamená provést nejdříve *A* a potom *B*) a lze-li úkol *A* provést *m* způsoby a úkol *B* provést *n* způsoby, potom úkol *C* lze provést $m \cdot n$ způsoby.

Příklad: Turnaj v tenisu hraje 6 hochů a 5 dívek. Kolik dvojic může figurovat v tabulce pro smíšenou čtyřhru?

Řešení: Jedná se o úvodní příklad, provedeme podrobný rozbor:

Množina hochů = { Adam, Boris, Cyril, David, Emil, Filip }
Množina dívek = { Gerta, Hana, Iva, Jana, Karla }

Množina dvojic, ve kterých je Adam $= \{(A, G),\ (A, H),\ (A, I),\ (A, J), (A, K)\}$,
Množina dvojic, ve kterých je Boris $= \{(B, G),\ (B, H),\ (B, I),\ (B, J), (B, K)\}$,
Množina dvojic, ve kterých je Cyril $= \{(C, G),\ (C, H),\ (C, I),\ (C, J), (C, K)\}$,
$\vdots$
Množina dvojic, ve kterých je Filip $= \{(F, G),\ (F, H),\ (F, I),\ (F, J), (F, K)\}$.

Vidíme, že počet všech dvojic je (počet řádků) x (počet prvků v řádku) $= 6 \times 5 = 30$, což odpovídá našemu pravidlu součinu.

Příklad: Registrační značka vozidla má tvar PKC CCCC, kde P, K a C jsou symboly, přičemž P je některá z číslic 1 – 9, K je písmeno, určující příslušnost ke kraji a C je některá z číslic 0 – 9. Kolik lze v rámci jednoho kraje přidělit registračních značek?

Řešení: Pro 1. místo ve značce je 9 možností, druhé je pevně dané, tedy 1 možnost, a pro každé ze zbývajících čtyř míst je 10 možností. Počet všech možností je $9 \cdot 10^5$, tedy devět set tisíc.

Příklad: Kolik čtyřciferných čísel lze sestavit z cifer 1, 2, 3, 4 tak, aby se žádná cifra neopakovala?

Řešení: Na prvním místě v čísle může stát libovolná cifra, možnosti jsou 4; na druhém místě mohou být všechny cifry kromě té, kterou jsme vybrali v 1. kroku, tedy 3; pro třetí místo už zbyly jen 2, a nakonec už zbývá jen 1. Takže počet takových čísel je $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$.

Když jsme vytvářeli čísla v předchozím příkladu, pouze jsme cifry v čísle přemisťovali – to vede k definici permutace:

Permutace *n* (navzájem různých) objektů je libovolné jejich seřazení, tedy seřazení od prvního k *n*-tému.
Pro počet permutací *n* objektů zřejmě platí $P(n) = n!$, je to zobecnění situace, kterou jsme vyšetřovali v předchozím příkladu. Podstatné zde bylo, že se prvky (cifry v čísle) nesměly opakovat – v původním „seznamu“ byly všechny navzájem různé.

Permutace s opakováním se vyskytne tehdy, máme-li přemisťovat prvky, které nejsou všechny navzájem různé:

Mějme *n* objektů rozdělených do *r* skupin, které mají po řadě $n_1, \dots, n_r$ objektů, tedy $n_1 + \dots + n_r = n$. Objekty v každé ze skupin jsou navzájem nerozlišitelné. Každé seřazení těchto *n* objektů se nazývá ***permutace s opakováním*** (daným parametry $n_1, \dots, n_r$). Pro počet takových permutací platí

$$P'_{n_1,\dots,n_r}(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_r!} \quad (\text{pro } n_1 + \dots + n_r = n).$$

Vznik tohoto vzorce ukážeme na příkladu:

Příklad: Mějme symboly ■, ■, ■, ∇, ∇ . Kolika způsoby je můžeme seřadit?

Řešení: Uvažujme nejdříve, že čtverečky i trojúhelníčky jsou navzájem rozlišitelné, tedy že máme symboly $■_1, ■_2, ■_3, ∇_1, ∇_2$. V takovém případě je počet přemístění roven počtu permutací, tedy $P(5)$. Přemístění čtverečků mezi sebou neumíme rozlišit, těch je $P(3) = 3!$, stejně tak vzájemné přemístění trojúhelníčků, kterých je $P(2) = 2!$. Přemisťování čtverečků a trojúhelníčků probíhá nezávisle na sobě, proto je

$$P(5) = P'(5) \cdot 3! \cdot 2! \text{ a odtud } P'_{3,2}(5) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = 10.$$

O správnosti se můžeme přesvědčit vypsáním všech možností, kterých je skutečně deset:
■, ■, ■, ∇, ∇ , ■, ■, ∇, ■, ∇ , ■, ■, ∇, ∇, ■ , ■, ∇, ■, ■, ∇ , ■, ∇, ■, ∇, ■ ,
■, ∇, ∇, ■, ■ , ∇, ■, ■, ■, ∇ , ∇, ■, ■, ∇, ■ , ∇, ■, ∇ , ■, ■, ∇, ∇, ■, ■, ■ .

Variace *k*-té třídy *z n* prvků $(0 \leq k \leq n)$ je každá uspořádaná *k*-tice různých prvků vybraná ze základní *n*-prvkové množiny tak, že na pořadí vybraných prvků záleží.
Přitom pro počet těchto variací platí

$$V_k(n) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Příklad: Vznik vzorce demonstrujeme na tomto příkladu:
Běžeckého závodu se účastnilo 10 závodníků. Kolika způsoby mohli obdržet zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili?

Řešení:

Zlatou medaili mohl obdržet libovolný ze závodníků … 10 možností
stříbrnou medaili libovolný ze zbývajících … 9 možností
a bronzovou analogicky libovolný ze zbývajících … 8 možností.

podle pravidla o součinu dostáváme počet možností $= 10 \cdot 9 \cdot 8 = V_3(10)$.

k-členná ***variace s opakováním*** z *n* prvků je uspořádaná *k*-tice sestavená z těchto prvků.

Pro počet těchto variací $V'_k(n)$ platí $V'_k(n) = n^k$.

Platnost tohoto vztahu plyne bezprostředně z pravidla součinu – každý z *k* vybíraných prvků se dá vybrat *n* způsoby.

Příklad: Kolik pěticiferných čísel se dá sestavit pouze z cifer 6, 7, 8, 9? Kolik z nich je menších než 90 000?

Řešení:

Počet možných cifer …. $k = 5$
počet možností výběru každé cifry …. $n = 4$

počet možných pěticiferných čísel …. $V'_5(4) = 4^5 = 1\,024$.

Ve druhé situaci nemůže na prvním místě stát devítka, máme tedy tři možnosti výběru; na zbývajících čtyřech místech může být libovolná z cifer 6, 7, 8, 9, počet těchto možností je zřejmě $V'_4(4) = 4^4$. Celkový počet možností dostaneme z kombinatorického pravidla součinu a je roven

$$3 \cdot 4^4 = 3 \cdot 256 = \underline{768}.$$

Kombinace *k*-té třídy *z n* prvků $(0 \leq k \leq n)$ je každá uspořádaná *k*-tice různých prvků vybraná ze základní *n*-prvkové množiny tak, že na pořadí vybraných prvků nezáleží.

Tedy variace $V_k(n)$ vznikne z kombinace $K_k(n)$ tím způsobem, že současně s každou kombinací přibydou do výběru ještě všechny permutace vybraných prvků, tedy pomocí pravidla součinu

$$V_k(n) = k! \cdot K_k(n) \text{ neboli } K_k(n) = \frac{V_k(n)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} =: \binom{n}{k}$$

Poslední výraz čteme *n nad k* a nazýváme ***kombinační číslo***.

Pro kombinační čísla zřejmě platí $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n!}{k\cdot!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$

Příklad: Uvažujme čtyřprvkovou množinu $\{a, b, c, d\}$. Kolik má tříprvkových podmnožin?

Řešení:
Pro názornost všechny tyto podmnožiny vypíšeme: $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$ – vidíme, že jsou čtyři a zřejmě jde o kombinace třetí třídy ze čtyř prvků:

$$K_3(4) = \frac{4!}{(4-3)!\cdot 3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 4\ .$$

Jak určíme počet všech podmnožin *n*-prvkové množiny?
Každá množina má jako podmnožinu prázdnou množinu, ta je pochopitelně jedna; přičemž vlastně vybíráme 0 prvků z *n*-prvkové množiny, takový výběr je jeden a je roven

$$K_0(n) = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \binom{n}{0} = 1 \text{ v případě, že položíme } 0! = 1.$$

Potom podle kombinatorického pravidla součtu je počet podmnožin *n*-prvkové množiny roven

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Binomická věta: Pro reálné číslo *x* a nezáporné celé *n* platí

$$(1 + x)^n = \sum_{n=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} x^0 + \binom{n}{1} x^1 + \binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^n.$$

(Ověřit – dokázat toto tvrzení můžeme matematickou indukcí nebudeme provádět.)

Položíme-li v předchozím vztahu $x = 1$, dostaneme

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

Tedy počet všech podmnožin *n*-prvkové množiny je roven 2^n.