Komplexní čísla

Úvod

Komplexní čísla byla zavedena (mimo jiné) proto, aby každá algebraická rovnice měla nějaké řešení (základní věta algebry říká, že algebraická rovnice $P_n(x)=0$, kde $P_n(x)$ je libovolný polynom n-tého stupně, má právě n ne nutně různých řešení), což ovšem, jak víme, neplatí, omezíme-li se na obor reálných čísel $\mathbf{R}$ - například rovnice $x^2+1=0$ reálné řešení nemá. Podívejme se na jinou situaci:

Cardanův vzorec pro řešení rovnice $x^3=ax+b$ má tvar

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

který má v reálném oboru smysl zřejmě pouze pro $\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3\geq 0$.

Uvažujme rovnici $x^3=15x+4$, která má zřejmě řešení $x=4$: $4^3=15\cdot 4+4=16\cdot 4$.
Cardanův vzorec pro tuto rovnici v $\mathbf{R}$ použít nelze, dostáváme zde druhou odmocninu ze záporného čísla:

$$x=\sqrt[3]{\frac{4}{2}+\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{15}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{4}{2}-\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{15}{3}\right)^3}}=$$

$$=\sqrt[3]{2+\sqrt{4-125}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{4-125}}=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=$$

$$=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=\quad *$$

Připusťme možnost počítání se symbolem $\sqrt{-1}$;
obě třetí odmocniny, které ve výpočtu vystupují, určit přímo neumíme - využijeme následujícího postupu: platí-li $a^3=b$, potom $a=\sqrt[3]{b}$:

$$\left(2\pm\sqrt{-1}\right)^3=2^3\pm 3\cdot 4\cdot\sqrt{-1}+3\cdot 2\cdot\left(\sqrt{-1}\right)^2\pm\left(\sqrt{-1}\right)^3=8\pm 12\sqrt{-1}-6\mp\sqrt{-1}=2\pm 11\sqrt{-1},$$

tedy $\underline{\sqrt[3]{2\pm 11\sqrt{-1}}=2\pm\sqrt{-1}}$. Jestliže tedy budeme pokračovat na místě hvězdičky, dostaneme

$*=2+\cancel{\sqrt{-1}}+2-\cancel{\sqrt{-1}}=\underline{\underline{4}}$, což je naše (předem uhodnuté) řešení.

Takže jsme pomocí počítání s (dosud nedefinovaným) symbolem $\sqrt{-1}$ řešením rovnice v oboru reálných čísel dostali správné reálné řešení (počítání s tímto symbolem je tedy užitečné).

Definujeme tedy ***imaginární jednotku*** i jako číslo, jehož druhá mocninou je -1, tedy $i^2=-1$.
Ale protože platí také $(-i^2)=(-1)^2(i)^2=-1$, má odmocnina z -1 dvě hodnoty, platí
$\sqrt{-1}=\pm i$ – v oboru komplexních čísel jsou odmocniny víceznačné.

Čísla tvaru $2i,\frac{i}{2},\dots,ki,\dots\quad k\in\mathbb{R}$ jsou ***ryze imaginární.***

Komplexním číslem pak rozumíme výraz

$$z = x + y \cdot i, \quad x, y \in \mathbf{R}$$

- součet reálného a ryze imaginárního čísla. Přitom x se nazývá ***reálná složka***, y ***imaginární složka*** čísla z, píšeme

$$x = \mathrm{Re}\, z,\ y = \mathrm{Im}\, z.$$

Komplexní čísla, jejichž imaginární složka je nulová, ztotožníme s reálnými čísly.

Dále definujeme:
Číslo ***komplexně sdružené*** k číslu z:

$$\bar{z} = x - yi$$

Absolutní hodnotu komplexního čísla definujeme předpisem

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

S komplexními čísly počítáme jako s obvyklými dvojčleny – polynomy prvního stupně.
Platí následující pravidla:

Rovnost komplexních čísel – komplexní čísla jsou stejná, mají-li stejnou reálnou i imaginární část:

$$x_1 + y_1 i = x_2 + y_2 i \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \ \wedge \ y_1 = y_2$$

***Sčítání* (*odčítání*) –** jako u polynomů prvního stupně – sečteme (odečteme) zvlášť reálné části, vznikne reálná část výsledku, a podobně pro imaginární části:

$$(x_1 \pm y_1 i) + (x_2 \pm y_2 i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 + \pm) i$$

Násobení – opět jako násobení dvojčlenů (každý s každým), přičemž vezmeme v úvahu, že $i^2 = -1$

$$(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2 \cdot i^2 =$$
$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_2 y_1 + x_1 y_2) \cdot \mathrm{i}$$

Dělení komplexních čísel vyžaduje nejdříve úpravu – příslušný zlomek rozšíříme číslem ve jmenovateli, abychom se ve jmenovateli zbavili imaginární jednotky:

$$\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \cdot \frac{x_2 - y_2 i}{x_2 - y_2 i} = \frac{x_1 x_2 - x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \cdot \mathrm{i}$$

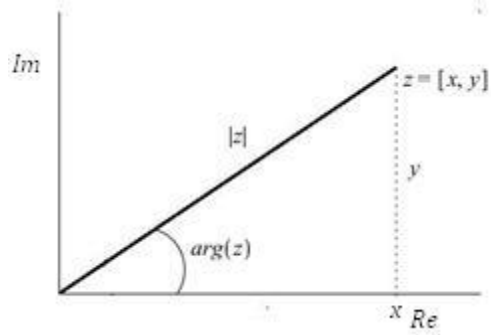
Pro komplexně sdružená čísla platí následující vztahy:

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x, \qquad z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \qquad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Komplexní čísla znázorňujeme jako body v rovině, které říkáme ***Gaussova rovina*** nebo ***rovina komplexních čísel***. Vodorovná osa souřadnic se nazývá ***reálná osa***, svislá ***imaginární osa***.



Komplexní číslo $x + yi$ znázorňujeme jako bod $[x, y]$. Přitom zřejmě (podle Pythagorovy věty) je $|z|$ rovna vzdálenosti bodu $[x, y]$ od počátku souřadnic.

Úhel φ (v oboukové míře), který svírá průvodič obrazu čísla z s kladným směrem reálné osy, se nazývá ***argument*** komplexního čísla z a značí se $\arg z$

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & x > 0 \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi & x < 0, y > 0 \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi & x < 0, y < 0 \\ \pm\dfrac{\pi}{2} & x = 0, \begin{matrix} y > 0 \\ y < 0 \end{matrix} \end{cases}$$

Nechť $z = x + y\,i,\ \varphi = \arg z$. Výraz

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

se nazývá ***goniometrický tvar*** komplexního čísla z. Je vhodný pro násobení a umocňování komplexních čísel:

$$z_1 z_2 = (|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1))(|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)) =$$
$$= |z_1||z_2|\,(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^n = (|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Poslední vztah se nazývá ***Moivreova věta***.

Řešení rovnice $a^n = z$, kde a a z jsou komplexní čísla a n je celé, je dáno právě všemi čísly

$$\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,\dots,n-1.$$

Souhrn těchto n čísel nazýváme ***n-tou odmocninou*** z čísla z.

Jestliže bychom chtěli vzorce pro počítání s komplexními čísly odvodit, bylo by třeba použít několikrát součtové vzorce pro goniometrické funkce. Mnohem výhodnější (a názorné) odvození je použitím tzv. ***Eulerova vztahu*** $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, pomocí kterého dostaneme ***exponenciální tvar*** komplexního čísla

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$$

Výpočty v exponenciálním tvaru plynou z pravidel pro počítání s exponenciálními funkcemi.

Poznamenejme, že na rozdíl od reálných čísel nemůžeme komplexní čísla porovnávat podle velikosti:

$i > 0 \mid \cdot i$ $\qquad$ $i < 0 \mid \cdot$

$i^2 = -1 > 0 \ \ spor$ $\qquad$ $i^2 = -1 > 0 \ \ spor$

Množinu komplexních čísel nelze uspořádat.

Řešené příklady

(Poznámka: V předmětech z elektrotechniky se obvykle imaginární jednotka značí písmenem j, aby se odlišila od označení okamžité hodnoty proudu, která se označuje písmenem i. Tak je třeba chápat značení v následujících příkladech; snad nebude docházet k nedorozumění.)

1) Vyjádřete výrazy $a+b$, $b-a$, $a\cdot b$, $\dfrac{b}{a}$, a^2, $-a$, $\overline{a}$ v algebraickém tvaru,

je-li $a = 2\sqrt{3} - 2j$, $b = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} j$.

Řešení:

$$a+b = 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} + \left(-2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) j = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{3}-1}{2} + \frac{-4+\sqrt{3}}{2} j}}$$

$$b-a = -\frac{1}{2} - 2\sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right) j = \underline{\underline{-\frac{1+4\sqrt{3}}{2} + \frac{4+\sqrt{3}}{2} j}}$$

$$a\cdot b = (2\sqrt{3} - 2j)\cdot\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} ji\right) = -\sqrt{3} + \sqrt{3} + (1+3)j = \underline{\underline{4j}}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} j}{2\sqrt{3} - 2j} = \frac{1}{4}\cdot\frac{-1+\sqrt{3}j}{\sqrt{3}-j} = \frac{1}{4}\cdot\frac{-1+\sqrt{3}j}{\sqrt{3}-j}\cdot\frac{\sqrt{3}+j}{\sqrt{3}+j} = \frac{1}{4}\cdot\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}+(3-1)j}{4} = \underline{\underline{\frac{-\sqrt{3}+j}{8}}}$$

$$a^2 = (2\sqrt{3} - 2j)^2 = 4(\sqrt{3} - j)^2 = 4(3 - 2\sqrt{3}j - 1) = \underline{\underline{8(1-\sqrt{3}j)}}$$

$$\overline{a} = \underline{\underline{2\sqrt{3} + 2j}}$$

2) Najděte algebraický tvar komplexních čísel

a) $(1+j)\cdot j$ $\qquad$ b) $\dfrac{2+j}{1-j}$ $\qquad$ c) $(-1+j)^{-2}$ $\qquad$ d) $(-j)^{27}$

e) j^{2009} $\qquad$ f) $j + j^3 + j^5 + j^7 + j^9$ $\qquad$ g) $5 - 8j + 6j^2 - 3j^3 + 6j^4$

h) $\dfrac{j^{10} - j^{12} - 4j^{15}}{j^5 - j^3}$

Řešení:

a) $(1+j)\cdot j = \underline{\underline{j-1}}$

b) $\dfrac{2+j}{1-j} = \dfrac{2+j}{1-j}\cdot\dfrac{1+j}{1+j} = \dfrac{2+j+2j-1}{2} = \underline{\underline{\dfrac{1+3j}{2}}}$

c) $\left(-1+j\right)^{-2}=\dfrac{1}{\left(-1+j\right)^{2}}=\dfrac{1}{1-2j-1}=\dfrac{1}{-2j}\cdot\dfrac{j}{j}=\underline{\underline{\dfrac{j}{2}}}$

d) $\left(-j\right)^{27}=(-1)^{27}\cdot j^{24}\cdot j^{3}=-1\cdot\left(j^{4}\right)^{6}\cdot(-j)=\underline{\underline{j}}$

e) $j^{2009}=j^{2008}\cdot j=j^{4\cdot 502}\cdot j=\underline{\underline{j}}$

f) $j+j^{3}+j^{5}+j^{7}+j^{9}=j-j+j-j+j=\underline{\underline{j}}$

g) $5-8i+6i^{2}-3i^{3}+6i^{4}=5-8i-6+3i+6=\underline{\underline{5-5i}}$

h) $\dfrac{j^{10}-j^{12}-4j^{15}}{j^{5}-j^{3}}=\dfrac{j^{10}\left(1-j^{2}+4j\cdot j^{4}\right)}{j^{3}\left(j^{2}-1\right)}=j^{7}\cdot\dfrac{2+4j}{-2}=-j\cdot\left(-1+2j\right)=\underline{\underline{-2+j}}$

3) Vypočítejte a) $|3-4j|$, b) $\left|\dfrac{-2-3j}{3-2j}\right|$ c) $\left|\dfrac{j^{10}-j}{1+2j}\right|$.

Řešení:

a) $|3-4j|=\sqrt{9+16}=\underline{\underline{5}}$

b) $\left|\dfrac{-2-3j}{3-2j}\right|=\dfrac{|-2-3j|}{|3-2j|}=\dfrac{\sqrt{4+9}}{\sqrt{9+4}}=\underline{\underline{1}}$

c) $\left|\dfrac{j^{10}-j}{1+2j}\right|=\dfrac{|j^{8}\cdot j^{2}-j|}{|1+2j|}=\dfrac{|-1-j|}{|1+2j|}=\dfrac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\underline{\underline{\dfrac{\sqrt{10}}{5}}}$

4) Najděte reálnou a imaginární část komplexních čísel

a) $\left(\dfrac{1-j}{1+j}\right)^{2}-\left(\dfrac{1+j}{1-j}\right)^{2}$, b) $\dfrac{9j^{9}-7j^{7}-5j^{5}-3j^{3}+j}{25j^{3}}$.

Řešení:

a) $\left(\dfrac{1-j}{1+j}\right)^{2}-\left(\dfrac{1+j}{1-j}\right)^{2}=\dfrac{(1-j)^{2}}{(1+j)^{2}}-\dfrac{(1+j)^{2}}{(1-j)^{2}}=\dfrac{1-2j+j^{2}}{1+2j+j^{2}}-\dfrac{1+2j+j^{2}}{1-2j+j^{2}}=\dfrac{-2j}{2j}-\dfrac{2j}{-2j}=\underline{\underline{0}}$

b)

$$\frac{9j^{9}-7j^{7}-5j^{5}-3j^{3}+j}{25j^{3}}=\frac{9j^{8}\cdot j-7j^{4}\cdot j^{3}+5j^{4}\cdot j-3j^{3}+j}{25j^{3}}=\frac{9j+7j+5j+3j+j}{-25j}=\frac{25j}{-25j}=\underline{\underline{-1}}$$

5) Najděte goniometrický (a exponenciální) tvar komplexních čísel

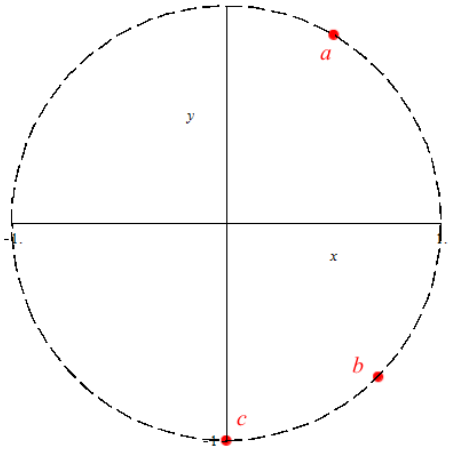
a) $a=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}j$, b) $b=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}j$, c) $c=\dfrac{3-j}{1+3j}$.

Nakreslete čísla a, b, c v Gaussově komplexní rovině. Najděte goniometrický a exponenciální tvar čísel

$$a\cdot b,\quad \frac{a}{b},\quad a\cdot b\cdot c,\quad b^{4}.$$

Řešení:

$$a=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j=\cos 60^0+j\cdot\sin 60^0=\underline{\underline{\cos\frac{\pi}{3}+j\cdot\sin\frac{\pi}{3}}}=e^{j\cdot\frac{\pi}{3}}$$



$$b=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}j=|4.kvadrant|=\cos\left(-45^0\right)+j\cdot\sin\left(-45^0\right)=$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+j\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\underline{\underline{\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+j\cdot\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)}}=e^{j\cdot\frac{7}{4}\pi}$$

$$c=\frac{3-j}{1+3j}=\frac{(3-j)(1-3j)}{10}=\frac{3-j-9j-3}{10}=\frac{j}{10}=$$

$$=-j=\cos 270^0+j\sin 270^0=\underline{\underline{\cos\frac{3\pi}{2}+j\sin\frac{3\pi}{2}}}=e^{j\cdot\frac{3}{2}\pi}$$

$$a\cdot b=\left(\cos\frac{\pi}{3}+j\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{-\pi}{4}+j\cdot\sin\frac{-\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\underline{\underline{\cos\frac{\pi}{12}+j\sin\frac{\pi}{12}}}$$

$$a\cdot b=e^{j\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot e^{j\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=e^{j\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot\pi}=e^{j\frac{\pi}{12}}$$

$$\frac{a}{b}=\left(\cos\frac{\pi}{3}+j\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right):\left(\cos\frac{-\pi}{4}+j\cdot\sin\frac{-\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\underline{\underline{\cos\frac{7\pi}{12}+j\sin\frac{7\pi}{12}}}$$

$$\frac{a}{b}=e^{j\cdot\frac{\pi}{3}}:e^{j\cdot\left(\frac{-\pi}{4}\right)}=e^{ij\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot\pi}=e^{j\cdot\frac{7}{12}\pi}$$

$$a\cdot b\cdot c=\left(\cos\frac{\pi}{3}+j\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{7\pi}{4}+j\cdot\sin\frac{7\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{-\pi}{2}+j\sin\frac{-\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)+j\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=\underline{\underline{\cos\frac{19}{12}\pi+j\sin\frac{19}{12}\pi}}$$

$$a\cdot b\cdot c=e^{j\cdot\frac{\pi}{3}}\cdot e^{j\frac{7\pi}{4}}\cdot e^{j\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=e^{j\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{4}-\frac{1}{2}\right)\cdot\pi}=e^{j\cdot\frac{19}{12}\pi}$$

$$b^4=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\cdot 4\right)+j\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\cdot 4\right)=\cos(-\pi)+j\sin(-\pi)=\underline{\underline{\cos\pi+j\sin\pi}}$$

$$b^4=\left(e^{j\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^4=e^{-j\cdot\pi}$$

6) Najděte goniometrický tvar komplexních čísel

a) -2 b) $5j$ c) $1-j$ d) $\dfrac{2-j}{3j-1}$

Řešení:

a) $-2=2\left(\cos 180^0+j\sin 180^{é}\right)=2\left(\cos\pi+j\sin\pi\right)=2e^{j\pi}$

b) $5j = 2\left(\cos 90^0 + j\sin 90^0\right) = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}\right) = 5e^{j\frac{\pi}{2}}$

c) $|1-j| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$1-j = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j\right) = \left|\cos\varphi > 0, \sin\varphi < 0 \Rightarrow \varphi == 45^0 = -\frac{\pi}{4}\right| = \underline{\underline{\sqrt{2}\left(\cos(-\tfrac{\pi}{4}) + j\sin(-\tfrac{\pi}{4})\right)}} = e^{-\frac{\pi}{4}j}$$

d) $$\frac{2-j}{3j-1}\cdot\frac{3j+1}{3j+1} = \frac{2+3-j+6i}{-9-1} = -\frac{1}{10}(5+5j) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j = \left|\left|-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}j\right| = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right| =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + j\sin\frac{5}{4}\pi\right)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\cdot\frac{5}{4}\pi}$$

7) Najděte algebraický tvar komplexních čísel

a) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right)$ b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j\right)^{100}$.

Řešení:

a) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\sqrt{3} + j}}$

b)

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j\right)^{100} = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{100} = \cos\left(-\frac{100}{6}\pi\right) + j\sin\left(-\frac{100}{6}\pi\right) = \left|\frac{100}{6}\pi = \frac{50}{3}\pi = \frac{48}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi\right| =$$

$$= \cos\left(-\frac{2}{3}\pi - 16\pi\right) + j\sin\left(-\frac{2}{3}\pi - 16\pi\right) = \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + j\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

8) Vypočítejte $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ je-li

a) $z_1 = 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}\right)$, $z_2 = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right)$ b)

$z_1 = \sqrt{3} + j$, $z_2 = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right)$

Řešení:

a)

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{6}{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + j\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + j\sqrt{3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 18\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right) = 18\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right) = 18\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 9\left(1 + j\sqrt{3}\right)$$

b) $\sqrt{3} + j = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$z_1 \cdot z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right) = 12\left(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}\right) = 12(0+j) = 12j$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = |4.kvadrant| = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{6}\left(1 - j\sqrt{3}\right)$$

9) V oboru komplexních čísel řešte rovnice

a) $z^4 = 1$ b) $z^4 + 1 = 0$ c) $z^3 = \frac{1}{8}$ d) $z^6 = -64$ e) $z^3 - 8i = 0$

Řešení:

a)

$$z^4 = 1 = \cos(2k\pi) + j\sin(2k\pi)$$

$$z = \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right),\ k = 0,1,2,3$$

$$k = 0:\ z_0 = \cos 0 + j\sin 0 = 1$$

$$k = 1:\ z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$k = 2:\ z_2 = \cos\pi + j\sin\pi = -1$$

$$k = 3:\ z_3 = \cos\frac{3}{2}\pi + j\sin\frac{3}{2}\pi = -i$$

$$\underline{\underline{z = \pm 1 \ \vee\ z = \pm j}}$$

b)

$$z^4 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^4 = -1 = \cos(\pi + 2k\pi) + j\sin(\pi + 2k\pi) = e^{j(1+2k)\pi}$$

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) = e^{j\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)},\ k = 0,1,2,3$$

$$k = 0:\ z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j$$

$$k = 1:\ z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + j\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j$$

$$k = 2:\ z_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + j\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j$$

$$k = 3:\ z_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + j\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j$$

$$\underline{\underline{z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}j}}$$

c)

$$z^3 = \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\cdot(\cos(2k\pi) + j\sin(2k\pi))$$

$$z = \frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + j\sin\frac{2k\pi}{3}\right),\quad k = 0,1,2$$

$$z_0 = \frac{1}{2}\cdot(\cos 0 + j\sin 0) = \frac{1}{2}$$

$$z_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + j\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}j$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3} + j\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}j$$

$$\underline{\underline{z = \frac{1}{2} \quad \vee \quad z = -\frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{3}}{4}}}$$

d)

$$z^6 = -64\left(\cos(\pi + 2k\pi) + j\sin(\pi + 2k\pi)\right)$$

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right)\right), \quad k = 0,1,2,3,4,5$$

$$k = 0: \quad z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j\right) = \sqrt{3} + j$$

$$k = 1: \quad z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2j$$

$$k = 2: \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + j\sin\frac{5}{6}\pi\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j\right) = -\sqrt{3} + j$$

$$k = 3: \quad z_3 = 2\left(\cos\frac{7}{6}\pi + j\sin\frac{7}{6}\pi\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j\right) = -\sqrt{3} - j$$

$$k = 4: \quad z_4 = 2\left(\cos\frac{3}{2}\pi + j\sin\frac{3}{2}\pi\right) = -2j$$

$$k = 5: \quad z_5 = 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + j\sin\frac{11}{6}\pi\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j\right) = \sqrt{3} - j$$

$$\underline{\underline{z = \pm 2j \quad \vee \quad z = \pm\sqrt{3} \pm j}}$$

e)

$$z^3 - 8j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^3 = 8j = 8\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right)$$

$$z = 2\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right), \quad k = 0,1,2$$

$$z_0 = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j\right)$$

$$z_1 = 2\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{6} + j\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j\right)$$

$$z_2 = 2\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2} + j\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2\cdot -j = -2j$$

$$\underline{\underline{z = -2j \quad \vee \quad z = \pm\sqrt{3} + j}}$$

10) V Gaussově komplexní rovině nakreslete množinu čísel, pro která platí

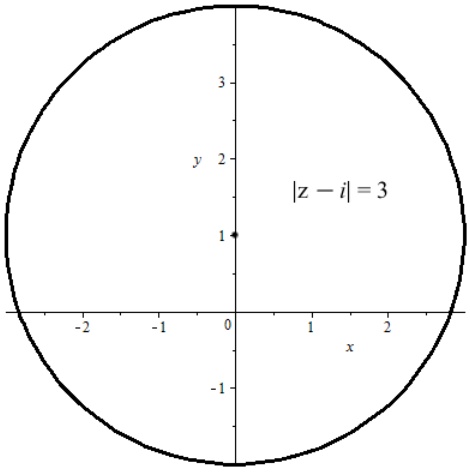
a) $|z - j| = 3$ b) $|z - 2 + 3j| < 2$ c) $|z + 2| \geq 1$

Řešení:

a)

$$|z-j|=3 \;\Leftrightarrow\; |x+jy-j|=3 \;\Leftrightarrow\; |x+j(y-1)|=3 \Leftrightarrow$$

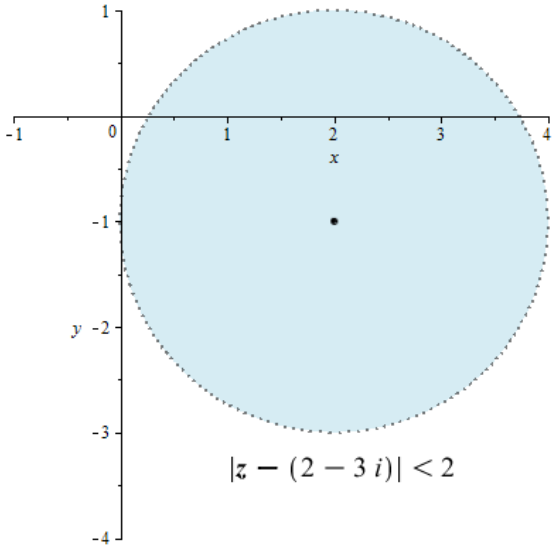
$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x^2+(y-1)^2=9}}$$



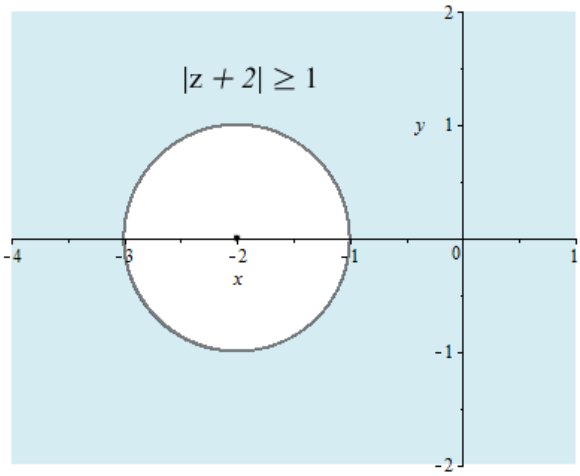
b)

$$|z-2+3j|<2 \;\Leftrightarrow\; |x-2+(y+3)j|<2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}<2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{(x-2)^2+(y+1)^2<4}}$$



c)

$$|z+2|\geq 1 \;\Leftrightarrow\; |x+2+jy|\geq 1 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{(x+2)^2+y^2}\geq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{(x+2)^2+y^2\geq 1}}$$