Kuželosečky

jsou rovinné křivky, které dostaly společný název proto, že vzniknou jako řez kužele rovinou – podle toho, jaký má tato rovina sklon vzhledem k ose resp. k povrchové přímce kuželu, dostaneme

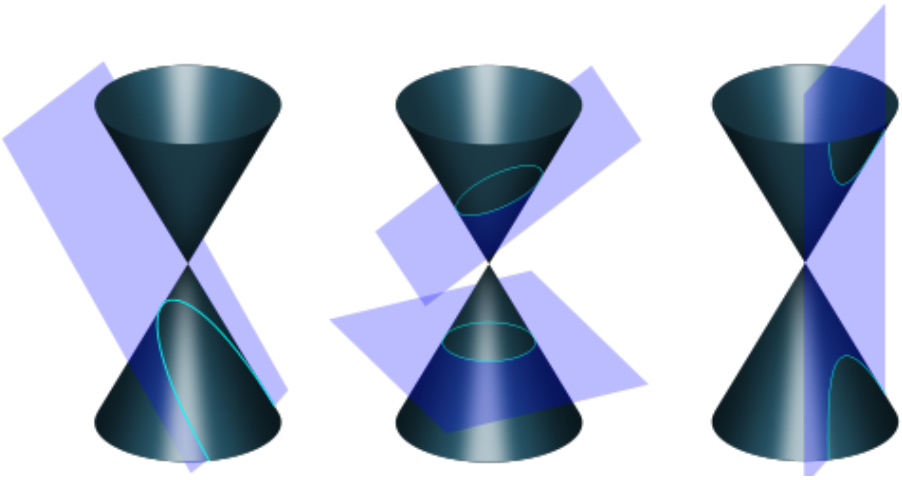
a) parabolu – rovina je rovnoběžná s povrchovou přímkou (která prochází vrcholem kuželu),

b) elipsu – rovina svírá s osou kuželu úhel $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

b) kružnici – rovina je kolmá na osu kuželu $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$,

d) hyperbolu – rovina je rovnoběžná s osou kuželu $(\varphi = 0)$

viz obrázek



Kuželosečky jsou rovinné křivky, které jsou popsány rovnicemi, v nichž proměnné *x* a *y* mohou vystupovat ve druhé mocnině, tedy rovnicemi tvaru

$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$; my budeme vyšetřovat takové kuželosečky, v jejichž rovnicích je koeficient u smíšeného členu xy roven nule.

Kružnice

Připomeňme si, že kružnice *k* se středem *S* a poloměrem *r* je množina všech bodů v rovině, které mají od bodu *S* vzdálenost *r*, tedy je-li $S = [m, n]$, platí pro $X = [x, y] \in k$:

$|X - S| = r$, neboli

$$\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} = r \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{(x-m)^2 + (y-m)^2 = r^2}}.$$

Odtud můžeme odvodit další tvar rovnice kružnice:

$$(x-m)^2 + (y-m)^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2mx + m^2 + y^2 - 2ny + n^2 - r^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + m^2 + n^2 - r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{ax^2 + ay^2 + cx + dy + e = 0}} -$$

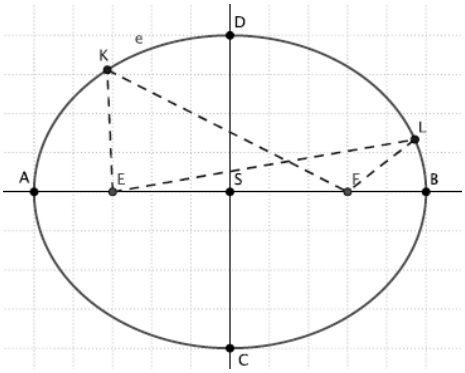
koeficienty u x^2 a y^2 jsou stejné.

Elipsa je křivka, jejíž každý bod má od dvou pevně zvolených bodů *E*, *F*, které nazýváme ohniska, stále stejný součet vzdáleností. Platí-li $E=[-e,0]$, $F=[e,0]$, tedy ohniska leží na ose o_x symetricky vzhledem k počátku souřadnic,
platí pro každý bod *X* na elipse $|X-E|+|X-F|=2a$, tedy

$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}+\sqrt{(x-e)^2+y^2}=2a.$$

Odtud po úpravě (dvojí umocnění) vyjde $(a^2-e^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-e^2)$ a označíme-li

$b=\sqrt{a^2-e^2}$, dostáváme $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}}$ - rovnice elipsy se středem v počátku.



Elipsa obsahuje dva ***hlavní vrcholy*** *A* a *B* a dva ***vedlejší vrcholy*** *C* a *D*. ***Střed*** elipsy, na obrázku bod *S*, leží ve středu úsečky *EF*, tedy mezi ohnisky.

Přímka, která prochází hlavními vrcholy (a také ohnisky), se nazývá ***hlavní osa*** elipsy, přímka, která prochází vedlejšími vrcholy, se nazývá ***vedlejší osa*** elipsy.
Úsečka, která spojuje libovolný hlavní vrchol a střed elipsy, se nazývá ***hlavní poloosa***. Na obrázku se jedná o úsečky *AS* a *BS*.
Úsečka, která spojuje libovolný vedlejší vrchol a střed elipsy, se nazývá ***vedlejší poloosa***. Na obrázku se jedná o úsečky *CS* a *DS*.

Je-li střed elipsy v bodě $S=[m,n]$ a osy jsou rovnoběžné se souřadnými osami, má rovnice elipsy tvar $\underline{\underline{\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1}}$ a po úpravě (a vhodném označení)

$ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ – ***koeficienty u*** x^2 ***a*** y^2 ***mají stejné znaménko.***

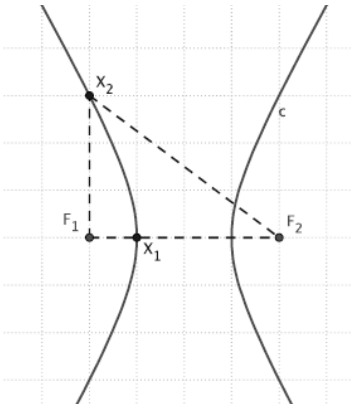
V případě $a=b=r$ dostáváme ***kružnici*** s rovnicí $x^2+y^2=r^2$ resp. $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$.

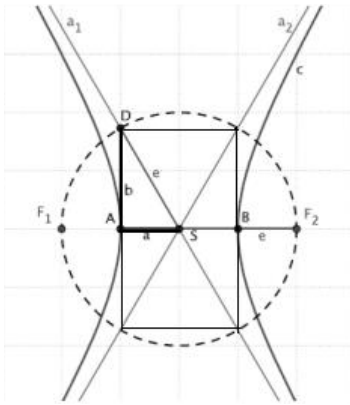
Hyperbola je množina všech bodů v rovině, které mají tu vlastnost, že absolutní hodnota rozdílu jejich vzdáleností od dvou daných bodů *E*, *F* (ohnisek hyperboly) se rovná kladné konstantě, která je menší než vzdálenost těchto daných bodů.
Platí-li $E=[-e,0]$, $F=[e,0]$, tedy ohniska leží na ose o_x symetricky vzhledem k počátku souřadnic,
platí pro každý bod *X* na elipse $\big||X-E|-|X-F|\big|=2a$, tedy

$\left|\sqrt{(x+e)^2+y^2}-\sqrt{(x-e)^2+y^2}\right|=2a$ a po analogické úpravě jako v případě elipsy (při označení $b=\sqrt{e^2-a^2}$) dostaneme

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}}$$ – středová rovnice hyperboly.

Hyperbola je kuželosečka, pro jejíž každý bod platí, že absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od dvou pevně daných bodů *E*, *F*) je vždy stejná - je rovna kladné konstantě, která je menší než vzdálenost těchto daných bodů.





Bodům F_1 a F_2 se říká ***ohniska***.

Bod *S* se nazývá ***střed*** hyperboly a nachází se ve středu úsečky F_1F_2.
Přímka F_1F_2 se nazývá ***hlavní osa hyperboly***. Kolmice k této ose v bodě *S* se nazývá ***vedlejší osa hyperboly***.

Průsečíky hyperboly s hlavní osou se nazývají ***vrcholy hyperboly***, na obrázku vpravo to jsou body *A* a *B*.
Úsečky *AS* a *BS* se nazývají ***hlavní poloosy hyperboly***. Jejich délku značíme *a*.
Délku ***vedlejší poloosy hyperboly*** značíme *b*.
Vzdálenost ohniska od středu se nazývá ***excentricita***, značíme ji *e*. Platí vztah $e = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Přímky a_1, a_2, procházející středem hyperboly – prodloužené úhlopříčky obdélníku vytvořeného pomocí poloos – viz obrázek – jsou ***asymptoty*** hyperboly.

Platí-li $E = [-e, 0], F = [e, 0]$, tedy ohniska leží na ose o_x symetricky vzhledem k počátku souřadnic,
platí pro každý bod *X* na elipse $\left\| X - E \right| - \left| X - F \right\| = 2a$, tedy
$\left| \sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \right| = 2a$ a po analogické úpravě jako v případě elipsy (při označení $b = \sqrt{e^2 - a^2}$) dostaneme

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}}$$ – ***středová rovnice hyperboly***.

Asymptoty hyperboly se středem v bodě $S=[0,0]$ („tečny v nekonečnu“) mají rovnice

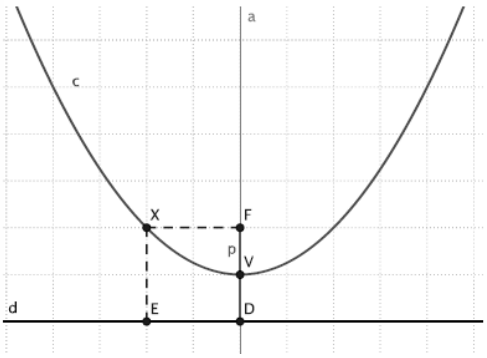
$y=\pm\frac{b}{a}\cdot x$

Jestliže střed neleží v počátku souřadnic, ale v bodě $S=[m,n]$, bude mít rovnice tvar

$\underline{\underline{\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1}}$ event. $\underline{\underline{-\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1}}$ a po úpravě (a vhodném označení) $ax^2-by^2+cx+dy+e=0$ – ***koeficienty u*** x^2 ***a*** y^2 ***mají opačné znaménko.***

Má-li hyperbola střed $S=[m,n]$, mají její asymptoty rovnice $(y-n)=\pm\frac{b}{a}\cdot(x-m)$.

Parabola je křivka, jejíž body mají od dané přímky *p* (řídící přímky) a od daného bodu *F*, který na té přímce neleží, konstantní vzdálenost.



Bod *F* se nazývá ***ohnisko*** paraboly.

Přímka *d* se nazývá ***řídící přímka*** paraboly.

Přímka *FD* se nazývá ***osa*** paraboly, je kolmá k řídící přímce a prochází ohniskem.

Bod *V* se nazývá vrchol paraboly a nachází se ve středu úsečky *FD*.

Délku úsečky *FD* nazýváme ***parametrem*** paraboly. Jedná se o vzdálenost ohniska od řídící přímky.

Rovnice paraboly

Umístíme-li řídící přímku a ohnisko paraboly v souřadném systému tak, že platí $x=-\frac{p}{2}$, $p>0$, tj. $2x+p=0$, $F=\left[\frac{p}{2};0\right]$, má podle definice paraboly platit pro každý její bod $X=[x,y]$ vztah

$$\frac{|2x+0y+p|}{\sqrt{2^2+0^2}}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{(2x+p)^2}{4}=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{y^2=2px}}$$

- to je rovnice paraboly s vrcholem $V=[0,0]$, osou symetrie v ose o_x a otevřené doprava.

Analogicky odvodíme rovnici paraboly se stejným vrcholem i osou, ale otevřené doleva ve tvaru $y^2=-2px$, event. rovnice parabol s vrcholem v počátku otevřené nahoru resp. dolů ve tvaru $x^2=2py$ resp. $x^2=-2py$.

V obecné poloze je rovnice kuželosečky rovnicí paraboly, jestliže v ní druhá mocnina některé proměnné nevystupuje, tedy tvaru $ax^2+cx+dy+e=0$ resp. $by^2+cx+dy+e=0$.

U paraboly rozlišujeme celkem čtyři různé případy. Jak je orientována osa paraboly, tj. jestli je osa svislá (rovnoběžná s osou y), jako na obrázku, nebo jestli je osa vodorovná (rovnoběžná s osou o_x). Dále pak rozlišujeme případ, kdy je parabola otevřená nahoru nebo dolů a nalevo nebo napravo. Nechť má parabola vrchol $V=[m,n]$.

1) Parabola má osu rovnoběžnou s osou o_y a je otevřená nahoru. Potom má rovnici:

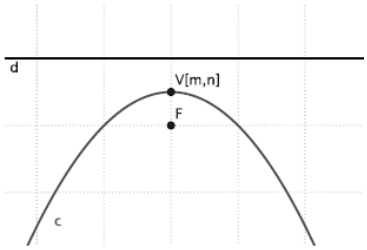
$$(x-m)^2 = 2p(y-n) \quad \Leftrightarrow \quad y-n = \frac{1}{2p}(x-n)^2$$

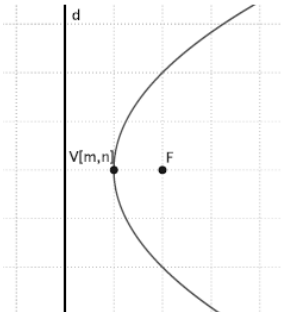
a ohnisko má souřadnice $F=\left[m,n+\frac{p}{2}\right]$.

2) Parabola má osu rovnoběžnou s osou o_y a je otevřená dolů. Potom má rovnici:

$$(x-m)^2 = -2p(y-n) \quad \Leftrightarrow \quad y-n = -\frac{1}{2p}(x-n)^2$$

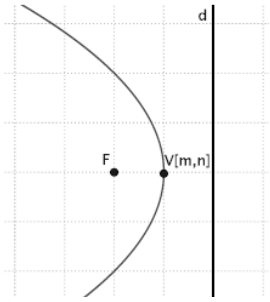
a ohnisko má souřadnice $F=\left[m,n+\frac{p}{2}\right]$.





3) Parabola má osu rovnoběžnou s osou o_x a je otevřená doprava. Potom má rovnici $(y-n)^2 = 2p(x-m)$ a ohnisko má souřadnice $F=\left[m+\frac{p}{2},n\right]$.

4) Parabola má osu rovnoběžnou s osou o_x a je otevřená doleva. Potom má rovnici $(y-n)^2 = -2p(x-m)$ a ohnisko má souřadnice $F=\left[m-\frac{p}{2},n\right]$.



V případech 1) a 2) je parabola grafem kvadratické funkce, v případech 3) a 4) se ***nejedná o grafy funkcí***.

Poznámka – návod:
Při vyšetřování kuželoseček se často vyskytuje tzv. ***úprava na úplný čtverec*** – úprava výrazů s druhými mocninami, pomocí které se zbavujeme prvních mocnin neznámé, například:

$$x^2+2x = x^2+2x+1-1 = (x+1)^2-1$$

$$9x^2-18x-4y^2-16y = 9(x^2-2x)-4(y^2+4y)$$
$$= 9[(x-1)^2-1]-4[(y+2)^2-4] = 9(x-1)^2-9-4(y+2)^2+16$$

neboli $\underline{x^2+ax = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{4}\right)^2}$

Řešené příklady

1) Najděte rovnici kružnice, jestliže

a) $S=[4,-5]$ a kružnice prochází bodem $A=[6,-1]$

b) body $A=[5,4]$, $B=[-3,-2]$ tvoří její průměr

c) se dotýká osy o_y v počátku souřadného systému a protíná osu o_x v bodě $A=[-8,0]$

d) se dotýká obou souřadných os a prochází bodem $M=[2,4]$

e) prochází body $A=[3,-2]$, $B=[2,-9]$, $C=[9,-2]$

f) je opsaná trojúhelníku o vrcholech $A=[1,-1]$, $B=[7,7]$, $C=[11,-1]$

g) prochází body $A=[2,5]$, $B=[3,2]$ a její střed leží na ose o_y

Řešení:

a) $S=[4,-5]$ a kružnice prochází bodem $A=[6,-1]$

$r^2=(6-4)^2+(-5+1)^2=20$

$k:\quad (x-4)^2+(y+5)^2=20 \Leftrightarrow \underline{\underline{x^2+y^2-8x+10y+21=0}}$

b) body $A=[5,4]$, $B=[-3,-2]$ tvoří její průměr

$S=\frac{1}{2}(A+B)=[5-3,4-2]=[1,1]$

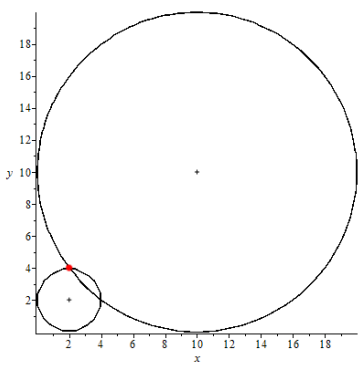
$r=d(A,S),\ r^2=(5-1)^2+(4-1)^2=25$

$(x-1)^2+(y-1)^2=25 \Leftrightarrow \underline{\underline{x^2+y^2-2x-2y-23=0}}$

c) se dotýká osy o_y v počátku souřadného systému a protíná osu o_x v bodě $A=[-8,0]$

$S=[-4,0],\quad r=4,\quad (x+4)^2+y^2=16 \Leftrightarrow \underline{\underline{x^2+y^2+8x=0}}$

d) se dotýká obou souřadných os a prochází bodem $M=[2,4]$



$k:\quad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2,\qquad$ podle zadání $M\in k,\quad a=b=r$

$(2-a)^2+(4-a)^2=a^2 \quad\Leftrightarrow\quad a^2-12a+20=0=(a-10)(a-2)$

$\underline{\underline{(x-2)^2+(y-2)^2=4}} \quad\vee\quad \underline{\underline{(x-10)^2+(y-10)^2=100}}$

e) prochází body $A=[3,-2], B=[2,-9], C=[9,-2]$

$$k: \quad x^2+y^2+cx+dy+e=0$$

$$\left.\begin{array}{ll} A\in k: & 9+4+3c-2d+e=0 \\ B\in k: & 4+81+2c-9d+e=0 \\ C\in k: & 81+4+9c-2d+e=0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} (r_3-r_1) \\ (r_3-r_2) \\ \Leftrightarrow \end{array} \left\{\begin{array}{ll} 72+6c=0 & c=-12 \\ 7c+7d=0 & d=12 \\ & e=47 \end{array}\right.$$

$$k: \quad \underline{\underline{x^2+y^2-12x+12y+47=0}}$$

f) je opsaná trojúhelníku o vrcholech $A=[1,-1], B=[7,7], C=[11,-1]$.

$$k: \quad x^2+y^2+cx+dy+e=0$$

$$\left.\begin{array}{ll} A\in k: & 2+c-d+e=0 \\ B\in k: & 98+7c+7d+e=0 \\ C\in k: & 122+11c-d+e=0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} (r_3-r_1) \\ (r_3-r_2) \\ \Leftrightarrow \end{array} \left\{\begin{array}{ll} 120+10c=0 & c=-12 \\ 24+4c-8d=0 & d=-3 \\ & e=7 \end{array}\right.$$

$$k: \quad \underline{\underline{x^2+y^2-12x-3y+7=0}}$$

g) prochází body $A=[2,5], B=[3,2]$ a její střed leží na ose o_y

$$k: \quad x^2+y^2+dy+e=0$$

$$\left.\begin{array}{ll} A\in k: & 29+5d+e=0 \\ B\in k: & 13+2d+e=0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} r_1-r_2 \\ \Leftrightarrow \end{array} \quad 16+3d=0$$

$$k: \quad \underline{\underline{x^2+y^2-12x-3y+7=0}}$$

2) Strany trojúhelníku mají rovnice $x+7y-56=0, x-3y+14=0, 2x-y+8=0$.
Máme najít rovnici kružnice opsané tomuto trojúhelníku.

Řešení:
Najdeme vrcholy – průsečíky stran:

$$\left.\begin{array}{l} x+7y-56=0 \\ x-3y+14=0 \end{array}\right\} + \quad 10y-70=0 \quad y=7, x=7$$

$$x+7y-56=0 \qquad\qquad x+14x+56-56=0 \quad x=0$$

$$2x-y+8=0 \quad y=2x+8 \qquad\qquad y=8$$

$x-3y+14=0$ $\qquad$ $x-6x-24+14=0 \quad x=-2$

$2x-y+8=0 \quad y=2x+8$ $\qquad$ $y=4$

Vrcholy: $A=[7,7], \quad B=[0,8], \quad C=[-2,4]$

$k: \quad x^2+y^2+cx+dy+e=0$

$$\left.\begin{array}{ll} A\in k: & 96+7c+7d+e=0 \\ B\in k: & 64 \qquad +8d+e=0 \\ C\in k: & 20-2c+4d+e=0 \end{array}\right\} \quad c=-6, d=-8, e=0$$

$k: \quad x^2+y^2-6x-8y=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{(x-3)^2+(y-4)^2=25}}$

3) Máme najít rovnici přímky procházející průsečíky kružnic
$x^2+y^2+6x+2y-15=0$ a $x^2+y^2-4x+8y+11=0$
a určit tyto průsečíky.

Řešení:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+6x+2y-15=0 \\ x^2+y^2-4x+8y+11=0 \end{array}\right\} - \quad 10x-6y-26=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{5x-3y-13=0}}$$

průsečíky:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+6x+2y-15=0 \\ 5x-3y-13=0 \end{array}\right\} \quad [2,-1]\left[-\frac{11}{17},\frac{92}{17}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-4x+8y+11=0 \\ 5x-3y-13=0 \end{array}\right\} \quad [2,-1]\left[-\frac{11}{17},\frac{92}{17}\right]$$

4) Máme určit polohu bodů $A=[1,-3], B=[1,4], C=[-3,5]$ vzhledem k elipse
$25x^2+9y^2=450$.

Řešení:

$$25x^2+9y^2\Big|_{x=1,y=-3}=25+81=106<450 \qquad A=[1,-3] \textbf{\textit{ je uvnitř elipsy}}$$

$$25x^2+9y^2\Big|_{x=1,y=4}=25+16\cdot 9=176<450 \qquad B=[1,4] \textbf{\textit{ je uvnitř elipsy}}$$

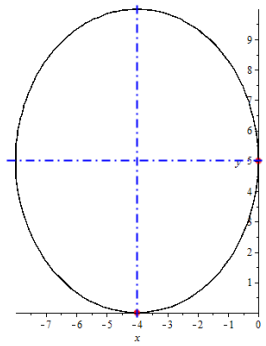
$$25x^2+9y^2\Big|_{x=-3,y=5}=25\cdot 9+9\cdot 25=450 \qquad C=[-3,5] \textbf{\textit{ leží na elipse}}$$

5) Najdeme rovnici elipsy s osami rovnoběžnými se souřadnými osami, jestliže se dotýká osy o_x v bodě $A=[-4,0]$ a osy o_y v bodě $B=[0,5]$.

Řešení:

$$S = [-4, 5], \quad a = 4, b = 5$$

$$\underline{\underline{\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1}}$$



6) Máme ověřit, že následující kuželosečky jsou elipsy a určit jejich střed a délku poloos.

a) $x^2 + 4y^2 = 4$

b) $2x^2 + 9y^2 = 1$

c) $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$

d) $25x^2 + 100x + 16y^2 - 300 = 0$

e) $x^2 + 16y^2 - 16x - 32y + 64 = 0$

Řešení:

a) $x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad S = [0,0], a = 2, b = 1$

b) $2x^2 + 9y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1 \quad S = [0,0], \ a = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ b = \frac{1}{3}$

c) $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad S = [0,0], \ a = 2, \ b = \sqrt{3}$

d) $25x^2 + 100x + 16y^2 - 300 = 0 \Leftrightarrow 25(x^2 + 4x) + 16y^2 = 300$

$x^2 + 4x = (x^2 + 4x + 4) - 4 = (x + 2)^2 - 4$

$25(x^2 + 4x) + 16y^2 = 300 \Leftrightarrow 25(x + 2)^2 - 100 + 16y^2 = 300 \Leftrightarrow$

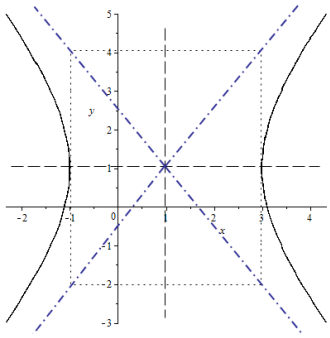
$\frac{25(x+2)^2}{400} + \frac{16y^2}{400} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 \qquad S = [-2,0], \ a = 4, \ b = 5$

e) $x^2 + 16y^2 - 16x - 32y + 64 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 16x) + 16(y^2 - 2) + 64 = 0 \Leftrightarrow$

$[(x - 8)^2 - 64] + 16[(y - 1)^2 - 1] + 64 = 0 \Leftrightarrow (x - 8)^2 + 16(y - 1)^2 = 16$

$\frac{(x-8)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1 \quad S = [8,1], \ a = 4, \ b = 1.$

7) Kuželosečka má rovnici $9x^2-4y^2-18x-8y-31=0$.
Máme určit její druh, střed, délky poloos a je-li to hyperbola, tak rovnice asymptot.



Řešení:

$$9x^2-4y^2-18x-8y-31=0 \quad \Leftrightarrow \quad 9\left(x^2-2x\right)-4\left(y^2+2y\right)-31=0 \quad \Leftrightarrow$$

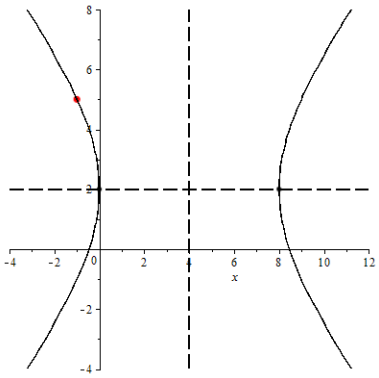
$$\Leftrightarrow 9\left((x-1)^2-1\right)-4\left((y+1)^2-1\right)=31 \quad \Leftrightarrow \quad 9(x-1)^2-4(y+1)^2=36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{9}=1}} \quad \textit{hyperbola} \quad S=[1,-1], \quad a=2, b=3$$

Asymptoty mají rovnice $y+1=\pm\frac{3}{2}\cdot\left(x-1\right)$ neboli
$3x-2y-5=0$ a $3x+2y-1=0$.

8) Máme najít rovnici hyperboly, která prochází bodem $A=[-1,5]$ a má vrcholy $V_1=[0,2],\ V_2=[8,2]$

Řešení:



$$S=[4,2], \quad a=4, b=?$$

$$A\in \frac{(x-4)^2}{4^2}-\frac{(y-2)^2}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(-1-4)^2}{4^2}-\frac{(5-2)^2}{b^2}=1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{16}-\frac{9}{b^2}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{16}=\frac{9}{b^2} \quad \Rightarrow \quad \underline{b^2=16}$$

$$\textit{rovnice hyperboly}: \quad \underline{\underline{\frac{(x-4)^2}{16}-\frac{(y-2)^2}{16}=1}}$$

9) Máme ověřit, že následující kuželosečky jsou hyperboly a určit jejich střed, délku poloos, vrcholy a rovnice asymptot.

a) $2x^2-3y^2=24$

b) $x^2-9y^2+4x-5=0$

c) $9x^2-4y^2-18x-8y-31=0$

Řešení:

a) $2x^2-3y^2=24 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1 \quad S=[0,0],\ a_{Re}=2\sqrt{3},\ \ b_{Im}=2\sqrt{2} \quad y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}x$

b) $x^2-9y^2+4x-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)^2-4-9y^2=5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+2)^2}{9}-y^2=1$

$S=[-2,0],\ a_{Re}=3,\ b_{Im}=1,\ y=\pm\frac{1}{3}(x+2)$

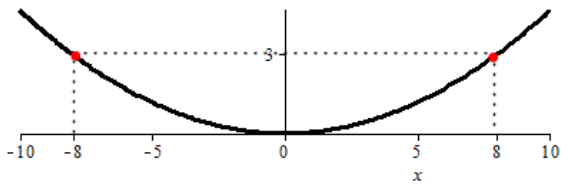
c) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0 \Leftrightarrow 9(x^2 - 2x) - 4(y^2 + 2y) - 31 = 0$

$$9[(x-1)^2 - 1] - 4[(y+1)^2 + 4] - 31 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9(x-1)^2 - 9 - 4(y+1)^2 + 4 = 31$$

$$(x-1)^2 - 4(y+1)^2 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

$$S = [1, -1], \quad a_{Re} = 2, \quad b_{Im} = 3, \quad y + 1 = \pm\frac{2}{3}(x-1)$$

10) Máme najít rovnici paraboly, která má vrchol v počátku a prochází body $A = [8,3]$, $B = [-8,3]$



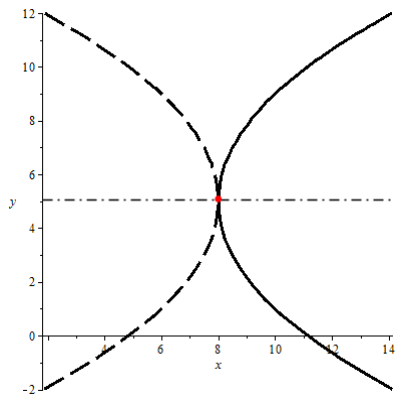
Řešení:

Rovnice paraboly $y = k \cdot x^2$,

$[8,3] \in \{(x,y) | y = k \cdot x^2\} \Rightarrow 3 = k \cdot 64 \quad \Rightarrow k = \frac{3}{64} \quad \Rightarrow$

$\underline{\underline{3x^2 - 64y = 0}}$

11) Máme najít rovnici paraboly, která má vrchol $V = [8,5]$, osa je rovnoběžná s osou o_x a má parametr $p = 4$.



Řešení:

Rovnice paraboly $(y-n)^2 = \pm 2p \cdot (x-n)$

$\underline{\underline{(y-5)^2 = \pm 8(x-8)}}$

12) Napíšeme rovnici paraboly, která má vrchol v bodě $V = [-1,-1]$, prochází bodem $A = [3,2]$ a její osa je rovnoběžná s osou o_x.

Řešení:

$(y-n)^2 = k(x-m) \quad p: (y+1)^2 = k(x+1)$

$[3,2] \in p \quad 9 = k \cdot 4 \Rightarrow k = \frac{9}{4}$

$\underline{\underline{4(y+1)^2 = 9(x+1)}}$

13) Napíšeme rovnici paraboly, která má vrchol v bodě $V=[-10,0]$, je symetrická podle osy o_x a vytíná na ose o_y úsečku délky 18.

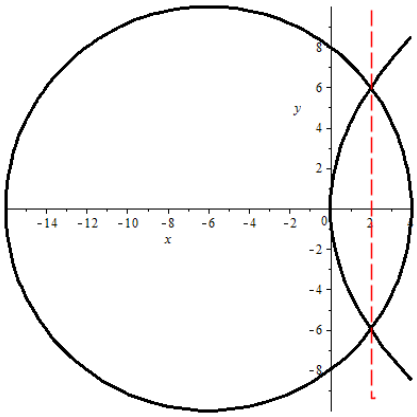
Řešení:

$(y-n)^2=k(x-m) \quad p: y^2=k(x+10)$

$[0,9]\in p \quad 81=10\cdot k$

$\underline{\underline{y^2=\frac{81}{10}(x+10)}}$

14) Máme najít rovnici přímky procházející průsečíky paraboly $y^2=18x$ a kružnice $x^2+y^2+12x-64=0$.



Řešení:

$$\left.\begin{array}{l} y^2=18x \\ x^2+y^2+12x-64=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+18x+12x-64=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x^2+30x-64=0 \Leftrightarrow (x+32)(x-2)=0$

$x=-32$ *nevyhovuje*, $\quad x=2 \Rightarrow y^2=36 \Rightarrow y=\pm 6$

hledaná přímka: $\underline{\underline{x=2}}$

15) Máme najít průsečíky přímky $p: x+y-7=0$ a paraboly $y^2=2(x-3)$.

Řešení:

$x+y-7=0 \quad \wedge \quad y^2=2(x-3)$

$x=7-y \qquad y^2=2(7-y-3)$

$y^2+2y-8=0 \quad (y+4)(y-2)=0$

$y=2 \Rightarrow x=7-2=5, \quad y=-4 \Rightarrow x=7+4=11$

Průsečíky $\underline{\underline{[5,2], \quad [11,-4]}}$

16) Máme ověřit, že následující kuželosečky jsou paraboly a najít jejich vrchol a osu.

a) $x^2-2x-5y+6=0$ b) $y^2-2y-3x-5=0$

Řešení:

a) $x^2-2x-5y+6=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1-5y+6=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=5(y-1)$

osa $x=1$, $V=[1,1]$, *otevřená nahoru*

b) $y^2-2y-3x-5=0 \Leftrightarrow (y-1)^2-1-3x-5=0 \Leftrightarrow (y+2)^2=3(x+2)$

osa $y=-2$, $V=[-2,-2]$ *otevřená doprava*

17) V následujících příkladech máme určit druh kuželosečky. Jestliže se jedná o parabolu, najít její osu a vrchol, je-li to elipsa, její střed a poloosy, v případě hyperboly střed, poloosy a asymptoty.

a) $3x^2+4y^2-12=0 \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \quad elipsa \quad S=[0,0], a=2, b=\sqrt{3}$

b) $25x^2+100x+16y^2-300=0$

$25\left((x+2)^2-4\right)+16y^2-300=0$

$25(x+2)^2+16y^2=400$

$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1 \qquad elipsa \quad S=[-2,0], a=4, b=5$

c) $9x^2-25y^2-50y-250=0$

$9x^2-25(y^2-2y)-250=0$

$9x^2-25\left((y-1)^2-1\right)-250=0$

$9x^2-25(y-1)^2+25-250=0$

$9x^2-25(y-1)^2=225$

$\frac{x^2}{25}-\frac{(y-1)^2}{9}=1 \qquad hyperbola \quad S=[0,1] \; a=5\,re, b=3\,im$

$asymptoty \quad y-1=\pm\frac{3}{5}x$

d) $4x^2-2y^2=2 \quad \frac{x^2}{\frac{1}{2}}-y^2=1 \qquad hyperbola \quad S=[0,0] \quad a=\frac{\sqrt{2}}{2}\,re \;\; b=1\,im$

$asymptoty \quad y=\pm x\sqrt{2}$

e) $6x^2+36y^2=36 \quad \frac{x^2}{6}+y^2=1 \qquad elipsa \quad S=[0,0] \; a=\sqrt{6} \;\; b=1$

f) $y^2-2x+5=0 \quad y^2=2\left(x-\frac{5}{2}\right) \qquad parabola, \quad osa\; y=0, \; V=\left[\frac{5}{2},0\right]$

g) $x^2-3y^2-4x=0$

$(x-2)^2-3y^2=4 \quad \frac{(x-2)^2}{4}-\frac{y^2}{\frac{4}{3}}=1 \quad hyperbola \quad S=[2,0] \; a=2\,re \quad b=\frac{2\sqrt{3}}{3}\,im$

$asymptoty \quad y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$

h) $9x^2-16y^2=144 \quad \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \qquad hyperbola \quad S=[0,0] \quad a=4\,re \quad b=3\,im$

$asymptoty \quad y=\pm\frac{3}{4}x$

i) $x^2 - y^2 - 16x - 14y + 1 = 0$

$$(x-8)^2 - 64 - \left((y+7)^2 - 49\right) + 1 = 0$$

$$(x-8)^2 - (y+7)^2 = 14$$

$$\frac{(x-8)^2}{14} - \frac{(y+7)^2}{14} = 1$$

hyperbola $S = [8, -7]$ $a = \sqrt{14}\ re$ $b = \sqrt{14}\ im$

asymptoty $y + 7 = \pm(x-8)$

j) $9y^2 - 25x^2 - 50x - 250 = 0$

$$9y^2 - 25(x^2 + 2x) - 250 = 0$$

$$9y^2 - 25(x+1)^2 + 25 - 250 = 0$$

$$9y^2 - 25(x+1)^2 = 225$$

$$\frac{y^2}{25} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$$

hyperbola $S = [-1, 0]$ $a = 3\ im$ $b = 5\ re$

asymptoty $y = \pm\frac{5}{3}(x+1)$