

MATEMATIKA 1

Sbírka úloh

Edita Kolářová

Úvod

Dostali jste do rukou sbírku příkladů k přednášce Matematika 1. Tato sbírka je doplněním textu **Fuchs, Krupkova: Matematika 1**. Navazuje na teoretický výklad látky z této knihy a doplňuje příklady k procvičení. Je zde řada příkladů řešených detailně, u dalších jsou uvedené výsledky, případně rady a návody. Zároveň jsem se ale snažila uvést do této sbírky všechny důležité vzorce, které při řešení příkladů využívám, abyste po prostudování příslušných kapitol z knihy Matematika 1 mohli sbírku používat i samostatně.

Kapitoly jsou navrženy tak, aby obsahovaly látku, která spolu úzce souvisí, a je možné je pochopit a nastudovat najednou jako celek.

K zvládnutí Matematiky 1 budete potřebovat znalosti ze středoškolské matematiky. Tato sbírka byla napsaná právě pro studenty, kteří mají slabší základy ze střední školy a proto nestačí rychlému tempu v jakém probíhá výuka matematiky na naší fakultě. Příklady obsažené v této sbírce jsou od nejjednodušších až po složitější, aby umožnily samostatné procvičení probíraných témat. Pro doplnění středoškolské matematiky doporučuji elektronické texty **Kolářová: Matematický seminář** přístupné v IS.

Chtěla bych poděkovat svému kolegovi RNDr. Petru Fuchsovi Ph.D. za jeho rady a podporu při psaní této sbírky.

Edita Kolářová

Brno, 2010

Obsah

1	Maticový počet	3
1.1	Počítání s maticemi	3
1.2	Ekvivalentní úpravy matic, hodnota matice	8
1.3	Determinanty a inverzní matice	10
1.4	Soustavy lineárních rovnic	15
2	Diferenciální počet funkce jedné proměnné	23
2.1	Definiční obory funkcí	23
2.2	Některé vlastnosti funkcí, inverzní funkce	27
2.3	Limita funkce	30
2.4	Derivace funkce	34
2.5	L'Hospitalovo pravidlo	39
3	Integrální počet funkce jedné proměnné	44
3.1	Integrační metody	44
3.2	Integrovaní racionální lomené funkce	50
3.3	Určitý integrál	55
3.4	Nevlastní integrál	58
4	Řady	62
4.1	Nekonečná geometrická řada	62
4.2	Konvergence číselné řady	64
4.3	Mocninné řady	68

LINEÁRNÍ ALGEBRA

1 Maticový počet

1.1 Počítání s maticemi

Matice \mathbf{A} typu $m \times n$ — soubor $m \times n$ čísel uspořádaných do m řádků a n sloupců:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Prvek a_{ij} — prvek matice \mathbf{A} , který se nachází v i -tém řádku a j -tém sloupci.

Prvek a_{ii} — diagonální prvek, nachází se v i -tém řádku a i -tém sloupci matice \mathbf{A} .

Čtvercová matice — matice, která má stejný počet řádků jako sloupců.

Některé čtvercové matice mají speciální tvar:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \quad - \quad \text{diagonální matice}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \quad - \quad \text{horní trojúhelníková matice}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad - \quad \text{jednotková matice}$$

K matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n$ typu $m \times n$ definujeme tzv. transponovanou matici $\mathbf{A}^T = \mathbf{B}$ typu $n \times m$, kde $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n$ typu $m \times n$ můžeme vynásobit číslem $\alpha \in \mathbb{R}$. Dostaneme znovu matici typu $m \times n$: $\mathbf{B} = \alpha \mathbf{A}$, kde $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Dvě matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^n$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})_m^n$ stejného typu $m \times n$ můžeme sečíst. Výsledná matice $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ bude znovu matici typu $m \times n$ a $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Matici $\mathbf{A} = (a_{ij})_m^p$ typu $m \times p$ můžeme vynásobit maticí $\mathbf{B} = (b_{ij})_p^n$ typu $p \times n$. Výsledná matice $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ bude matici typu $m \times n$, kde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Prvek c_{ij} dostaneme jako skalární součin i -tého řádku matice \mathbf{A} a j -tého sloupce matice \mathbf{B} .

Příklad 1.1.1. Vypočítejte matice $\mathbf{J} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ a $\mathbf{H} = 3 \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{B}$, kde

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -7 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & -2 \\ 6 & 7 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

a) Matice \mathbf{A} i \mathbf{B} jsou typu 2×3 a proto je můžeme sečíst.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0+4 & -2-2 & 3+2 \\ -4-7 & -1+2 & 0+0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ -11 & 1 & 0 \end{pmatrix}}},$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 9 \\ -12 & -3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -\frac{7}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & -5 & 8 \\ -\frac{17}{2} & -4 & 0 \end{pmatrix}}}.$$

b) Matice \mathbf{A} je typu 3×5 a \mathbf{B} je matice typu 4×5 , tehdy se nedají sečíst a proto neexistuje matice $\mathbf{J} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ ani $\mathbf{H} = 3 \cdot \mathbf{A} - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{B}$.

Příklad 1.1.2. Vypočítejte matice $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ a $\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{A}^T$, kde

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -3 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: a) Matice \mathbf{A} je čtvercová a proto \mathbf{A} i matice \mathbf{A}^T jsou stejného typu a tak je můžeme sečíst i odečíst.

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -3 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 10 & -5 & 7 \\ -5 & 10 & 1 \\ 7 & 1 & -10 \end{pmatrix}}};$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -3 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 6 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \\ -5 & -5 & 0 \end{pmatrix}}}.$$

b) Matice \mathbf{A} je typu 2×3 , potom \mathbf{A}^T je matice typu 3×2 , tedy se nedají sečíst a proto neexistuje matice $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ ani $\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{A}^T$.

Poznámka. Matice $\mathbf{M} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$, pokud existuje, je takzvaná symetrická matice ($\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$) a podobně $\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{A}^T$ je antisymetrická matice ($\mathbf{N} = -\mathbf{N}^T$).

Příklad 1.1.3. Vypočítejte matici $\mathbf{X} = 3 \cdot \mathbf{A} - 4 \cdot \mathbf{E}$, kde

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: a)

$$\mathbf{X} = 3 \cdot \mathbf{A} - 4 \cdot \mathbf{E} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 9 & 14 & 9 \\ 6 & 3 & 11 \end{pmatrix}}}.$$

b)

$$\mathbf{X} = 3 \cdot \mathbf{A} - 4 \cdot \mathbf{E} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & 18 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}}}.$$

Příklad 1.1.4. Vypočítejte matici $\mathbf{X} = \mathbf{A} - 2\mathbf{B}$, kde

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \\ 12 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: a) \mathbf{X} je nulová matice.

b) \mathbf{X} je jednotková matice typu 2×2 .

Příklad 1.1.5. Vypočítejte matici $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, kde

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & 8 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & -5 \\ 7 & 0 & -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

a) Matice \mathbf{A} je typu typu 2×3 a \mathbf{B} je typu typu 3×3 a proto existuje matice $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, která bude typu 2×3 .

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 4 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \\ -1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & -1 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 & -1 \cdot 0 - 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & 8 \end{pmatrix}}}. \end{aligned}$$

b) Matice \mathbf{A} je typu typu 3×3 a \mathbf{B} je typu typu 3×4 a proto existuje matice $\mathbf{X} = \mathbf{A} * \mathbf{B}$, která bude typu 3×4 .

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & 8 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 33 & -8 & 13 & 38 \\ 4 & -4 & 14 & -6 \\ -31 & 16 & -19 & -20 \end{pmatrix}}}.$$

c) Matice \mathbf{A} je typu 3×5 a \mathbf{B} je matice typu 4×3 , tzn. počet sloupců matice \mathbf{A} se nerovná počtů řádků matice \mathbf{B} , tehdy se nedá vypočítat $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. V tomto případě by bylo možné vypočítat součin $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ a byla by to matice typu 4×5 .

Příklad 1.1.6. Vypočítejte matice $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{Y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Matice \mathbf{A} je typu 2×3 , \mathbf{B} je typu 3×2 a proto existuje matice $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, která bude typu 2×2 a také matice $\mathbf{Y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, která bude typu 3×3 .

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -21 & 20 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}}}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -9 & 8 & 11 \\ 16 & -22 & -4 \\ 4 & -9 & 6 \end{pmatrix}}}$$

Poznámka. Násobení matic není komutativní operace – obecně $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Příklad 1.1.7. Vypočítejte matice $\mathbf{X} = \mathbf{A}^2$ a $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Řešení: Matice \mathbf{X} a i matice \mathbf{Y} existují a budou to matice typu 2×2 .

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 37 & 18 \\ 24 & 13 \end{pmatrix}}}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 34 & 23 \\ 23 & 17 \end{pmatrix}}}$$

Příklad 1.1.8. Vypočítejte matice $\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2$ a $\mathbf{Y} = \mathbf{A}^2 + 2 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B}^2$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Potom

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 8 & 20 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}}}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -7 & 15 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 9 & -7 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 2 + 7 & 7 + 16 - 6 \\ -7 + 18 - 4 & 15 - 14 + 7 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 13 & 17 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}}}$$

Příklad 1.1.9. Vypočítejte matice $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je nulová matice typu 3×2 .

1.2 Ekvivalentní úpravy matic, hodnost matice

Ekvivalentní úprava nebo také elementární transformace matice — jedna z následujících tři úprav:

1. záměna dvou řádků (sloupců) matice,
2. vynásobení jednoho řádku (sloupce) nenulovým číslem,
3. přičtení jednoho řádku (sloupce) jinému.

Ekvivalentní matice — dvě matice \mathbf{A} a \mathbf{B} stejného typu, kde matice \mathbf{A} se dá upravit pomocí elementárních transformací na matici \mathbf{B} . Píšeme $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Hodnost matice — počet lineárně nezávislých řádků (sloupců) v matici. Značíme $\text{hod}(\mathbf{A})$.

Poznámka. Pokud platí, že $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, potom $\text{hod}(\mathbf{A}) = \text{hod}(\mathbf{B})$. Z toho plyne velice jednoduchá metoda na počítání hodnosti matic. Když chceme počítat $\text{hod}(\mathbf{A})$, tak tuto matici pomocí řádkových ekvivalentních úprav upravíme na trojúhelníkovou matici \mathbf{B} . Je jasné, že počet lineárně nezávislých řádků v matici \mathbf{B} se rovná počtu nenulových řádků této matice. Tím získáme i $\text{hod}(\mathbf{A})$.

Poznámka. Platí, že $\text{hod}(\mathbf{A}) = \text{hod}(\mathbf{A}^T)$. Znamená to, že je jedno, jestli při počítání hodnosti používáme ekvivalentní řádkové úpravy, anebo sloupcové úpravy.

Příklad 1.2.1. *Vypočítejte hodnosti následujících matic:*

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{pmatrix}.$$

Řešení: a) Upravovat začínáme v levém horním rohu matice \mathbf{A} . Budeme provádět následující ekvivalentní řádkové úpravy:

1. Zaměníme první a druhý řádek v matici \mathbf{A} . Tím získáme jedničku v levém horním rohu.
2. Dvojnásobek prvního řádku odečteme od druhého řádku. Jinými slovy k druhému řádku přičteme -2 násobek prvního řádku.
3. Po předchozí úpravě je první řádek a první sloupec podle našich představ. Při další úpravě postupujeme, jako kdyby jsme chtěli upravit na trojúhelníkový tvar matici typu 2×2 , která by vznikla vynecháním prvního řádku a prvního sloupce. Tato submatice už má v levém horním rohu jedničku. Jako poslední úpravu třikrát druhý řádek přičteme k třetímu řádku.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -23 \end{pmatrix}$$

Dostali jsme trojúhelníkovou matici. Spočítáme nenulové řádky: $\text{hod}(\mathbf{A}) = \underline{\underline{3}}$.

b) 1. V matici \mathbf{B} trojnásobek prvního řádku přičteme k druhému řádku a zároveň dvojnásobek prvního řádku odečteme od třetího řádku.

2. Druhý řádek vydělíme 13 a zároveň třetí řádek vydělíme -6.

3. Druhý řádek odečteme od třetího řádku.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 13 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\text{hod}(\mathbf{B}) = 2.}}$$

c) 1. V matici \mathbf{C} nejdříve dvojnásobek prvního řádku přičteme k druhému řádku a zároveň sedmnásobek prvního řádku odečteme od třetího řádku.

2. Zaměníme druhý a třetí řádek.

3. Dvojnásobek druhého řádku přičteme k třetímu řádku.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\text{hod}(\mathbf{C}) = 2.}}$$

Příklad 1.2.2. Zjistěte hodnotu matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & p \end{pmatrix}$ v závislosti na parametru p .

Řešení: 1. V matici \mathbf{A} přičteme první řádek druhému řádku a zároveň dvojnásobek prvního řádku odečteme od třetího řádku.

2. Druhý řádek vydělíme pěti.

3. Trojnásobek druhého řádku přičteme k třetímu řádku.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & p \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & p-6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & p-6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & p-3 \end{pmatrix}$$

Pokud $p - 3 = 0$ ($p = 3$) matice má dvě nenulové řádky, jinak má matice nenulové řádky tři. Z toho plyne, že pokud $\underline{\underline{p = 3 \Rightarrow \text{hod}(\mathbf{C}) = 2}}$ a v případě, kdy $\underline{\underline{p \neq 3 \Rightarrow \text{hod}(\mathbf{C}) = 3.}}$

Příklad 1.2.3. Vypočítejte hodnoty následujících matic:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & -10 \\ 2 & 5 & -1 & -9 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení: a) $\text{hod}(\mathbf{A}) = 2$; b) $\text{hod}(\mathbf{B}) = 2$; c) $\text{hod}(\mathbf{C}) = 3$.

1.3 Determinanty a inverzní matice

Determinant — reálné číslo, které můžeme k dané čtvercové matici jednoznačně určit následujícím způsobem:

1. pro matici $A = (a_{11})$ typu 1×1 je $\det(A) = a_{11}$,
2. pro matici $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ typu 2×2 je $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,
3. pro matici A typu 3×3 je $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$
 $= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$.

V tomto případě první dva řádky matice napíšeme pod danou matici typu 3×3 a počítáme součiny zleva shora dolů po diagonále s plusem a zprava shora po opačné diagonále s mínusem.

4. pro obecnou čtvercovou matici A typu $m \times m$ determinant počítáme rozvojem podle řádku (sloupce)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{km} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = a_{k1}(-1)^{k+1}M_{k1} + a_{k2}(-1)^{k+2}M_{k2} + \cdots + a_{km}(-1)^{k+m}M_{km}$$

kde M_{kj} označuje determinant submatice typu $(m-1) \times (m-1)$, která vznikne z původní matice vynecháním k -tého řádku a j -tého sloupce.

Regulární matice — čtvercová matice, která má nenulový determinant.

Inverzní matice k matici \mathbf{A} — matice \mathbf{B} , pro kterou platí, že $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$.

Značíme \mathbf{A}^{-1} .

Poznámka. Pokud \mathbf{A} není regulární, neexistuje k ní inverzní matice \mathbf{A}^{-1} .

Při hledání inverzní matice \mathbf{A}^{-1} postupujeme tak, že nejdříve k matici \mathbf{A} typu $m \times m$ přičteme jednotkovou matici stejného typu. Dostaneme novou matici typu $m \times 2m$, kterou pomocí elementárních transformací upravujeme tak dlouho, dokud nevznikne jednotková matice vlevo. Potom z pravé části jednoduše opíšeme matici \mathbf{A}^{-1} . Postup ilustruje následující schéma:

$$(\mathbf{A} | \mathbf{E}) \sim \cdots \sim (\mathbf{E} | \mathbf{A}^{-1})$$

Příklad 1.3.1. Vypočítejte determinanty následujících matic typu 2×2 :

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{c) } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}$$

$$\text{Řešení: a) } \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-1) \cdot (-2) = 3 - 2 = \underline{\underline{1}}.$$

$$\text{b) } \det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a \cdot a - b \cdot (-b) = \underline{\underline{a^2 + b^2}}.$$

$$\text{c) } \det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -(\sin^2 x + \cos^2 x) = \underline{\underline{-1}}.$$

Příklad 1.3.2. Vypočítejte determinanty následujících matic typu 3×3 :

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & a \\ 1 & a & b \end{pmatrix} \quad \text{c) } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Řešení: a) } \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(1 \cdot (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 \cdot 2 \right) - \left((-1) \cdot (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \cdot (-1) \right) = \left(2 + 1 + 12 \right) - \left(4 + 2 + 3 \right) = 15 - 9 = \underline{\underline{6}}.$$

$$\text{b) } \det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = \left(1 \cdot b \cdot b + 1 \cdot a \cdot b + 1 \cdot a \cdot a \right) - \left(b \cdot b \cdot 1 + a \cdot a \cdot 1 + b \cdot a \cdot 1 \right) =$$

$$= b^2 + ab + a^2 - b^2 - a^2 - ab = \underline{\underline{0}}.$$

Poznámka. Matice \mathbf{B} má dva lineárně závislé řádky (první řádek je stejný jako třetí) a proto $\det(\mathbf{B}) = 0$.

$$\text{c) } \det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 24 + 1 + 12 - (4 + 8 + 9) = 37 - 21 = \underline{\underline{16}}.$$

Příklad 1.3.3. Vypočítejte determinanty následujících matic typu 4×4 :

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 29 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & b & 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & 1 & a & b \end{pmatrix}$$

Řešení: a) Je to matice typu 4×4 , proto determinant musíme počítat rozvojem. Vybereme si řádek nebo sloupec, kde je nejvíce nul. V tomto případě jednoznačně nejvhodnější bude třetí řádek, kde jsou až 3 nuly. Jediné nenulové

číslo v tomto řádku je 5, která je v třetím řádku a třetím sloupci.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 29 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 5(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} + 0 = \\ &= 5 \cdot 1 \cdot (-6 - 2 + 0 + 1 + 12 + 0) = 5 \cdot 5 = \underline{\underline{25}}. \end{aligned}$$

b) V tomto případě nejvhodnější bude počítat rozvoj podle třetího sloupce.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & a & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & b & 1 \end{vmatrix} = a(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 + \\ &+ b(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = a \cdot 17 - b \cdot (-9) = \underline{\underline{17a + 9b}}. \end{aligned}$$

c) Rozvineme determinant podle prvního sloupce.

$$\det(\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & b & c \\ 0 & 1 & a & b \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 1 & b & c \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = \underline{\underline{ac - b^2}}.$$

Příklad 1.3.4. Vypočítejte determinanty následujících matic :

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin x & 0 & \cos x \end{pmatrix} \quad \text{c) } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -5 & 0 & 2 \\ 8 & 2 & 10 & 7 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e) } \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: a) 10; b) 1; c) a^3 ; d) -310; e) -19.

Příklad 1.3.5. Vypočítejte inverzní matici k matici:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Řešení: a) Matice \mathbf{A} je regulární, $\det(\mathbf{A}) = 4 - 2 = 2 \neq 0$, proto existuje \mathbf{A}^{-1} . Při počítání inverzní matice použijeme postup, který jsme popsali v úvodu této kapitoly. Matici $(\mathbf{A} | \mathbf{E})$ typu 2×4 začneme upravovat z levého horního rohu směrem dolů, stejně jako při počítání hodnoty.

1. Přehodíme řádky.

2. První řádek vydělíme -2, druhý řádek -1.

3. Pokračujeme z pravého dolního rohu matice \mathbf{A} směrem nahoru. Dvojnásobek druhého řádku odečteme od prvního řádku.

4. Z pravé části si opíšeme inverzní matici.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}}. \end{aligned}$$

b) $\det(\mathbf{B}) = 4 - 12 = -8 \neq 0 \Rightarrow$ existuje \mathbf{B}^{-1} .

1. Dvojnásobek prvního řádku odečteme od druhého řádku.

2. Druhý řádek vydělíme -4, první řádek 2.

3. Tři poloviny krát druhý řádek odečteme od prvního řádku.

4. Z pravé části si opíšeme inverzní matici.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{B}^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}}}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{d) } \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 1.3.6. Vyřešte maticovou rovnici $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B}$ pro neznámou matici \mathbf{X} , kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: $\det(\mathbf{A}) = 7 - 6 = 1 \neq 0$, potom $\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}}.$$

Příklad 1.3.7. Vypočítejte inverzní matici k matici:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení: a) $\det(\mathbf{A}) = 1 \Rightarrow$ existuje \mathbf{A}^{-1} . Matici $(\mathbf{A} | \mathbf{E})$ typu 3×6 začneme upravovat z levého horního rohu směrem dolů.

1. První řádek přičteme k druhému a třetí řádek vydělíme -1.

2. Druhý řádek vydělíme -1.

3. Pokračujeme z pravého dolního rohu matice \mathbf{A} směrem nahoru. Dvojnásobek třetího řádku přičteme k druhému řádku.

4. Druhý řádek přičteme k třetímu řádku.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}}. \end{aligned}$$

b) $\det(\mathbf{B}) = 0$ a proto neexistuje \mathbf{B}^{-1} .

c) $\det(\mathbf{C}) = 4 \Rightarrow$ existuje \mathbf{C}^{-1} .

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \\ & \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}}. \end{aligned}$$

1.4 Soustavy lineárních rovnic

Soustava m lineárních rovnic o n neznámých má tvar:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Matice soustavy — koeficienty z lineární soustavy zapsané do matice typu $m \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vektor neznámých — sloupcový n rozměrný vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Vektor pravých stran — sloupcový m rozměrný vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Rozšířená matice soustavy — matice typu $m \times (n + 1)$, složená z matice soustavy s přidaným sloupcem pravých stran

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} | \mathbf{b} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Maticový zápis soustavy — zápis soustavy jako součin matic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Homogenní soustava — soustava, kde vektor pravých stran je nulový vektor.

Čtvercová soustava — soustava, kde matice soustavy \mathbf{A} je čtvercová matice. Jedná se o soustavu n lineárních rovnic o n neznámých.

Frobeniova věta. Uvažujme soustavu m lineárních rovnic o n neznámých $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

- Jestliže $\text{hod}(\mathbf{A}) = \text{hod}(\tilde{\mathbf{A}}) = k$, potom soustava má řešení.
 - V případě $k = n$ má soustava právě jedno řešení.
 - V případě $k < n$ má soustava nekonečně mnoho řešení, která mohou být zapsána pomocí $n - k$ parametrů.
- Jestliže $\text{hod}(\mathbf{A}) \neq \text{hod}(\tilde{\mathbf{A}})$, potom soustava rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nemá řešení.

Při řešení soustavy lineárních rovnic pomocí **Gaussově eliminační metody** budeme postupovat následovně:

1. Převědeme rozšířenou matici soustavy ekvivalentními úpravami na trojúhelníkový tvar.
2. Pomocí Frobeniovy věty rozhodneme o řešitelnosti soustavy.
3. Rozšířenou matici soustavy převedenou na trojúhelníkový tvar zase zapíšeme jako soustavu rovnic a postupně vypočítáme jednotlivé neznámé.

Příklad 1.4.1. Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{llll}
 a) \ x + y - 2z = 0 & b) \ 4y - 2z = 2 & c) \ x + y + z = 2 & d) \ 2x + 5y = 2 \\
 \quad x - y + 2z = -4 & \quad 6x - 2y + z = 29 & \quad y + z = -2 & \quad -4x + 3y = -30 \\
 3x + 3y - 6z = -2 & \quad 4x - 8y - 4z = 24 & \quad 4y - 6z = -12 & \quad 4x + 23y = -22
 \end{array}$$

Řešení: a) Rozšířenou matici soustavy a upravíme na trojúhelníkový tvar tak, že první řádek odečteme od druhého a trojnásobek prvního řádku odečteme od třetího řádku.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -6 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$\text{hod}(\mathbf{A}) = 2$, $\text{hod}(\tilde{\mathbf{A}}) = 3$, $2 \neq 3 \Rightarrow$ soustava nemá řešení.

b) Rozšířenou matici budeme upravovat následovně:

1. První řádek vydělíme 2 a třetí řádek vydělíme 4.
2. Přehodíme první a třetí řádek.
3. Šestnásobek prvního řádku odečteme od druhého řádku.
4. Přehodíme první a třetí řádek.
5. Pětnásobek druhého řádku odečteme od třetího řádku.
6. Třetí řádek vydělíme 12.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -2 & 2 \\ 6 & -2 & 1 & 29 \\ 4 & -8 & -4 & 24 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 1 & 29 \\ 1 & -2 & -1 & 6 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{aligned} &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 6 \\ 6 & -2 & 1 & 29 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 10 & 7 & -7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & 7 & -7 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$\text{hod}(\mathbf{A}) = 3$, $\text{hod}(\tilde{\mathbf{A}}) = 3$, počet neznámých $n = 3$.

$\text{hod}(\mathbf{A}) = \text{hod}(\tilde{\mathbf{A}}) = n \Rightarrow$ soustava má právě jedno řešení.

K poslední rozšířené matici přiřadíme soustavu:

$$\begin{array}{rcl} x & - & 2y & - & z & = & 6 \\ & & 2y & - & z & = & 1 \\ & & & & z & = & -1 \end{array} \Rightarrow z = -1, y = \frac{1+z}{2} = 0, x = 6+2y+z = 6+0-1 = 5$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = 5, y = 0, z = -1.}}$$

c) Upravujeme rozšířenou matici soustavy:

1. Třetí řádek vydělíme 2.
2. Dvojnásobek druhého řádku odečteme od třetího řádku.
3. Třetí řádek vydělíme -5.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -6 & -12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{hod}(\mathbf{A}) = 3 \\ \text{hod}(\tilde{\mathbf{A}}) = 3 \\ n = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{právě jedno řešení}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Dostali jsme soustavu: } & x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & & y & + & z & = & -2 \\ & & & & & z & = & \frac{2}{5} \end{array} \Rightarrow y = -2 - z = -\frac{12}{5}$$

$$\text{a nakonec } x = 2 - y - z = 2 + \frac{12}{5} - \frac{2}{5} = 2 + 2 = 4.$$

$$\text{Řešením soustavy je trojice } \underline{\underline{x = 4, y = -\frac{12}{5}, z = \frac{2}{5}.}}$$

- d) 1. Druhý řádek přičteme k třetímu řádku.
 2. Dvojnásobek prvního řádku odečteme od druhého řádku a třetí řádek vydělíme 26.
 3. Druhý řádek vydělíme 13.
 4. Druhý řádek odečteme od třetího řádku.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & & 2 \\ -4 & 3 & & -30 \\ 4 & 23 & & -22 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & & 2 \\ -4 & 3 & & -30 \\ 0 & 26 & & -52 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & & 2 \\ 0 & 13 & & -26 \\ 0 & 1 & & -2 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & & 2 \\ 0 & 1 & & -2 \\ 0 & 1 & & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & & 2 \\ 0 & 1 & & -2 \\ 0 & 0 & & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{hod}(\mathbf{A}) = 2 \\ \text{hod}(\tilde{\mathbf{A}}) = 2 \\ n = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{právě jedno řešení.}$$

$$\text{Máme řešit soustavu: } \left. \begin{array}{l} 2x + 5y = 2 \\ y = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{2 - 5y}{2} = 6$$

Řešením soustavy je $x = 6, y = -2$.

Příklad 1.4.2. Rozhodnete o řešitelnosti soustavy s parametrem pomocí Frobéniovovy věty.

$$\begin{array}{lll} a) \quad x + ay = 1 & b) \quad ax + 4y = 2 & c) \quad x + y + z = 1 \\ \quad \quad \quad ax + 9y = 3 & \quad \quad \quad x + ay = 1 & \quad \quad \quad x + ay + z = 1 \\ & & \quad \quad \quad x + y + az = 1 \end{array}$$

Řešení: a) Napíšeme rozšířenou matici soustavy a budeme upravovat na trojúhelníkový tvar, stejně jako u soustav bez parametru, odečtením a -násobku prvního řádku od druhého řádku.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ a & 9 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & a & 1 \\ 0 & 9 - a^2 & 3 - a \end{array} \right)$$

Vidíme, že $\text{hod}(\mathbf{A}) = 1$ pro $9 - a^2 = 0$ a $\text{hod}(\mathbf{A}) = 2$ pokud $9 - a^2 \neq 0$.

$$9 - a^2 = (3 - a)(3 + a) = 0 \Leftrightarrow a = \pm 3$$

Pro $a \neq \pm 3$ máme $\text{hod}(\mathbf{A}) = 2, \text{hod}(\tilde{\mathbf{A}}) = 2, n = 2 \Rightarrow$ právě jedno řešení.

Musíme ještě vyřešit soustavu pro $a = 3$ a pro $a = -3$. V obou případech si nejdříve dosadíme do upravené rozšířené matice soustavy a rozhodneme pomocí Frobéniovovy věty.

$$\underline{a = 3} \Rightarrow \tilde{\mathbf{A}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{hod}(\mathbf{A}) = 1 \\ \text{hod}(\tilde{\mathbf{A}}) = 1 \\ n = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\text{nekonečně mnoho řešení.}}}$$

$$\underline{a = -3} \Rightarrow \tilde{\mathbf{A}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{hod}(\mathbf{A}) = 1 \\ \text{hod}(\tilde{\mathbf{A}}) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\text{soustava nemá řešení.}}}$$

b) Upravujeme rozšířenou matici soustavy.

1. Předpokládejme, že $a \neq 0$. Druhý řádek vynásobíme číslem a .

2. První řádek odečteme od druhého řádku.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 4 & 2 & 2 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a & 4 & 2 & 2 \\ a & a^2 & a & a \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a & 4 & 2 & 2 \\ 0 & a^2 - 4 & a - 2 & a - 2 \end{array} \right)$$

Podobně jako v a) je $\text{hod}(\mathbf{A}) = 1$ pro $a^2 - 4 = 0$ a $\text{hod}(\mathbf{A}) = 2$ pokud $a^2 - 4 \neq 0$, $a \neq 0$. Máme $a^2 - 4 = (a - 2)(a + 2) = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2$.

Pro $a \neq \pm 2, a \neq 0$ je $\text{hod}(\mathbf{A}) = 2$, $\text{hod}(\tilde{\mathbf{A}}) = 2$, $n = 2 \Rightarrow$ právě jedno řešení.

$$\underline{a = 2} \Rightarrow \tilde{\mathbf{A}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{hod}(\mathbf{A}) = 1 \\ \text{hod}(\tilde{\mathbf{A}}) = 1 \\ n = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\text{nekonečně mnoho řešení.}}}$$

$$\underline{a = -2} \Rightarrow \tilde{\mathbf{A}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{hod}(\mathbf{A}) = 1 \\ \text{hod}(\tilde{\mathbf{A}}) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\text{soustava nemá řešení.}}}$$

Ještě musíme vyšetřit případ, kdy $a = 0$.

$$\text{Potom } \tilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{hod}(\mathbf{A}) = 2 \\ \text{hod}(\tilde{\mathbf{A}}) = 2 \\ n = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\text{právě jedno řešení.}}}$$

c) Upravujeme rozšířenou matici soustavy tak, že první řádek odečteme od druhého a od třetího řádku.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a - 1 & 0 \end{array} \right)$$

Vidíme, že $\text{hod}(\mathbf{A}) = 1$ pro $a - 1 = 0$ a $\text{hod}(\mathbf{A}) = 3$ pokud $a - 1 \neq 0$.

Pro $a \neq 1$ je $\text{hod}(\mathbf{A}) = 3$, $\text{hod}(\tilde{\mathbf{A}}) = 3$, $n = 3 \Rightarrow$ právě jedno řešení.

$$\underline{a = 1} : \tilde{\mathbf{A}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{hod}(\mathbf{A}) = 1 \\ \text{hod}(\tilde{\mathbf{A}}) = 1 \\ n = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\text{nekonečně mnoho řešení.}}}$$

Příklad 1.4.3. Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{array}{lll}
 a) \ x + y - z = 1 & b) \ x + 2y + z - u = 1 & c) \ 2x + 4y + 2z - u = 1 \\
 \quad x - y + z = 5 & \quad 2x + 3y - z + 2u = 3 & \quad 3x + 6y + 3z = 6 \\
 \quad 2x + y - z = 4 & \quad 4x + 7y + z = 5 & \quad x + 2y + 2z - u = 0 \\
 3x + 2y - 2z = 5 & 5x + 7y - 4z + 7u = 8 &
 \end{array}$$

Řešení: a) Rozšířenou matici soustavy a upravíme na trojúhelníkový tvar.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{A}} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & 5 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$\text{hod}(\mathbf{A}) = 2$, $\text{hod}(\tilde{\mathbf{A}}) = 2$, $n = 3 \Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení, závislých na $n - \text{hod}(\mathbf{A}) = 3 - 2 = 1$ parametru.

K poslední matici přiřadíme soustavu:
$$\begin{array}{r} x + y - z = 1 \\ -y + z = 2 \end{array}$$

Zvolíme si například za $z = p$, p parametr.

Potom máme řešení ve tvaru $z = p$, $y = p - 2$, $x = 3$, $p \in \mathbb{R}$.

b) Upravujeme rozšířenou matici soustavy:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{A}} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & 7 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -3 & -9 & 12 & 3 \end{array} \right) \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{hod}(\mathbf{A}) = 2 \\ \text{hod}(\tilde{\mathbf{A}}) = 2 \\ n = 4 \end{array}
 \end{aligned}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, závislých na $n - \text{hod}(\mathbf{A}) = 4 - 2 = 2$ parametrech.

K poslední matici přiřadíme soustavu:
$$\begin{array}{r} x + 2y + z - u = 1 \\ y + 3z - 4u = -1 \end{array}$$

Zvolíme si $z = p$, $u = q$; p, q parametry.

Potom máme řešení $z = p$, $u = q$, $y = 4q - 3p - 1$, $x = 3 - 9q + 4p$; $p, q \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\text{c) } & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \\
& \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} \text{hod}(\mathbf{A}) = 3 \\ \text{hod}(\tilde{\mathbf{A}}) = 3 \\ n = 4 \end{array} \Rightarrow
\end{aligned}$$

nekonečně mnoho řešení, závislých na $n - \text{hod}(\mathbf{A}) = 4 - 3 = 1$ parametru.

$$\begin{array}{rcl}
x + 2y + 2z - u & = & 0 \\
K \text{ poslední matici přiřadíme soustavu:} & & z - u = -2 \\
& & -u = -3
\end{array}$$

Potom $u = 3$, $z = 1$, a zvolíme si za $y = p$, p parametr a máme řešení $x = 1 - 2p$, $y = p$, $z = 1$, $u = 3$, $p \in \mathbb{R}$.

Příklad 1.4.4. Řešte homogenní soustavy rovnic:

$$\begin{array}{lll}
\text{a) } x + y - z + u = 0 & \text{b) } 3x + 3y - 4z + 4u = 0 & \text{c) } x + y - z + u = 0 \\
x - y + z = 0 & 2x + 3y - z + 2u = 0 & 2x + y - z + 2u = 0 \\
2x + y - z + 2u = 0 & -4x + 5z - u = 0 & y + z + 4u = 0 \\
2y - 3u = 0 & 2x + y - 2z + u = 0 &
\end{array}$$

Řešení: a) Homogenní soustava rovnic má vždy řešení, a to nulový vektor. Pravá strana se stává ze samých nul, která se nemění ani při ekvivalentních úpravách. Abychom ušetřili zbytečné opisování těchto nul, můžeme upravovat pouze matici soustavy. Pokud $\text{hod}(\mathbf{A}) = n$ soustava má pouze triviální řešení (nulový vektor), jinak má soustava nekonečně mnoho řešení.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{array} \right) \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$\text{hod}(\mathbf{A}) = 4$, $n = 4 \Rightarrow$ právě jedno řešení $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $u = 0$.

b) Upravujeme matici soustavy. Žádnou výměnou řádku nedosáhneme jedničku v levém horním rohu, proto první úprava bude odečtení druhého řádku od prvního. Dále upravujeme tradičním způsobem.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\text{hod}(\mathbf{A}) = 3$, $n = 4 \Rightarrow \text{hod}(\mathbf{A}) \neq n$. Soustava má nekonečně mnoho řešení, závislých na $n - \text{hod}(\mathbf{A}) = 4 - 3 = 1$ parametru.

$$\begin{array}{rcl} x & - & 3z + 2u = 0 \\ \text{Zapišeme příslušnou soustavu:} & y & + 4z - 3u = 0 \\ & - & z + u = 0 \end{array}$$

Zvolíme si $u = p$, p parametr. Potom $u = p$, $z = p$, $y = -p$, $x = p$; $p \in \mathbb{R}$.

c) Upravujeme matici soustavy.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{hod}(\mathbf{A}) = 3 \\ n = 4 \end{array}; \quad \text{hod}(\mathbf{A}) \neq n$$

Nekonečně mnoho řešení, závislých na $n - \text{hod}(\mathbf{A}) = 4 - 3 = 1$ parametru.

$$\begin{array}{rcl} \text{Máme soustavu:} & x & + y - z + u = 0 \\ & - & y + z = 0 \\ & & z + 2u = 0 \end{array}$$

Zvolíme si $u = p$, p parametr.

Potom řešením soustavy bude $u = p$, $z = -2p$, $y = -2p$, $x = -p$; $p \in \mathbb{R}$.

Příklad 1.4.5. Řešte soustavy rovnic:

$$\begin{array}{lll} a) & x + 2y + 3z = 7 & b) & x + 2y + 3z = 1 & c) & x + 2y + 3z = 1 \\ & 3x - y + z = 6 & & x + 3y + 5z = 2 & & 2x + 4y + 6z = 2 \\ & x + y + z = 4 & & 2x + 5y + 8z = 12 & & x - y + z = 4 \end{array}$$

Řešení: a) $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$; b) soustava nemá řešení; c) soustava má nekonečně mnoho řešení: $x = 3 - \frac{5}{3}t$, $y = -1 - \frac{2}{3}t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$. (Porovnejte s příkladem 5.5. ze skript [?].)

FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

2 Diferenciální počet funkce jedné proměnné

2.1 Definiční obory funkcí

Reálná funkce jedné reálné proměnné je zobrazení f množiny reálných čísel D do množiny reálných čísel H ($D \subset \mathbb{R}$, $H \subset \mathbb{R}$), pro které platí, že pro každé $x \in D$ existuje jednoznačně určené $y \in H$. Značíme

$$f : D \rightarrow H; \quad f : x \rightarrow f(x); \quad f : y = f(x), \quad x \in D.$$

Množina D se nazývá definičním oborem funkce, H se nazývá oborem hodnot funkce.

Je-li funkce zadána pouze předpisem $f : y = f(x)$, definičním oborem této funkce se rozumí množina všech $x \in \mathbb{R}$, pro která má funkce smysl. Při určování této množiny potřebujeme znát definiční obory elementárních funkcí.

Pro všechna reálná čísla jsou definována: funkce mocninná $f : y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$; exponenciální $f : y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$; lichá odmocnina $f : y = x^{\frac{1}{n}}$, n liché; sinus a kosinus $f : y = \sin x$, $f : y = \cos x$; funkce $f : y = \operatorname{arctg} x$, $f : y = \operatorname{arccotg} x$.

Počítáme-li definiční obor dané funkce, musíme pamatovat na následující:

- Obsahuje-li vyšetřovaná funkce zlomek — jmenovatel se nesmí rovnat nule.
- Obsahuje-li funkce sudou odmocninu — výraz pod odmocninou musí být nezáporný (≥ 0).
- Obsahuje-li funkce logaritmus — argument logaritmu musí být kladný (> 0).
- Obsahuje-li vyšetřovaná funkce $\operatorname{arcsin} x$ nebo $\operatorname{arccos} x$ — argument těchto funkcí musí být větší nebo roven -1 (≥ -1) a zároveň menší nebo roven 1 (≤ 1).
- Obsahuje-li vyšetřovaná funkce $\operatorname{cotg} x$ — argument $\operatorname{cotg} x$ se nesmí rovnat celočíselným násobkům π .
- Obsahuje-li vyšetřovaná funkce $\operatorname{tg} x$ — argument $\operatorname{tg} x$ se nesmí rovnat číslům $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Příklad 2.1.1. Najděte definiční obory následujících funkcí:

$$\text{a) } f: y = \frac{2x}{x^2 - 4x - 5} \quad \text{b) } g: y = \frac{\sqrt{x+3}}{5x} \quad \text{c) } h: y = \frac{5x}{\sqrt{x+3}}$$

$$\text{d) } j: y = \sqrt{\frac{2x+1}{x-4}} \quad \text{e) } k: y = \ln(3x-1) + \frac{1}{2x-5}$$

$$\text{f) } l: y = \frac{1}{\ln(5-3x)} \quad \text{g) } m: y = \ln(x^2 - 6x + 8)$$

Řešení: a) Funkce f obsahuje zlomek. Proto musí platit, že $x^2 - 4x - 5 \neq 0$. Při řešení této kvadratické nerovnice najdeme nejdříve kořeny příslušné kvadratické rovnice a potom kvadratický polynom rozložíme na součin. Máme:

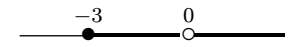
$$x^2 - 4x - 5 \neq 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5, x \neq -1$$

Z toho definiční obor funkce $\underline{\underline{D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}}}$.

b) Funkce g obsahuje zlomek i odmocninu. Proto musí platit:

$$1. 5x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$2. x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$$

Výsledek si nakreslíme:  ; $\underline{\underline{D(g) = \langle -3, 0 \rangle \cup (0, \infty)}}$.

c) Funkce h zase obsahuje zlomek i odmocninu. Proto:

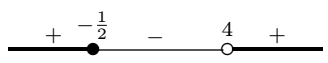
$$\left. \begin{array}{l} 1. x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \\ 2. x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3 \end{array} \right\} \Rightarrow x > -3 \Rightarrow \underline{\underline{D(h) = (-3, \infty)}}$$

d) Funkce j obsahuje zlomek i odmocninu. Musí platit:

$$1. x-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$$

$$2. \frac{2x+1}{x-4} \geq 0$$


Druhou nerovnici vyřešíme graficky pomocí nulových bodů čitatele i jmenovatele. V tomto případě máme nulové body $x = 4$ a $x = -\frac{1}{2}$. Body nanese na reálnou osu a na vzniklých intervalech vyzkoušíme znaménko zlomku.

Máme  a z toho $\underline{\underline{D(j) = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (4, \infty)}}$.

e) Funkce k obsahuje funkci logaritmus a zlomek.

$$1. 3x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$$

$$2. 2x-5 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{5}{2}$$

Nakreslíme si obrázek:  ; $\underline{\underline{D(k) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)}}$.

f) Funkce l obsahuje funkci logaritmus i zlomek:

$$1. 5 - 3x > 0 \Rightarrow x < \frac{5}{3}$$

$$2. \ln(5 - 3x) \neq 0 \Rightarrow 5 - 3x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{4}{3}$$

$$\text{---} \frac{4}{3} \text{---} \frac{5}{3} \text{---} ; \quad \underline{\underline{D(l) = \left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)}}.$$

g) Funkce m obsahuje logaritmus. Proto musí být $x^2 - 6x + 8 > 0$. Najdeme kořeny příslušné kvadratické rovnice a kvadratický polynom rozložíme na součin. Máme $x^2 - 6x + 8 > 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 4) > 0$.

Nerovnici vyřešíme graficky pomocí nulových bodů $x = 2$ a $x = 4$. Body naneseme na reálnou osu a na vzniklých intervalech vyzkoušíme znaménko součinu.

$$\text{Nakreslíme: } \text{---} \overset{+}{2} \text{---} \overset{-}{4} \text{---} \overset{+}{\text{---}} \quad \text{a z toho } \underline{\underline{D(m) = (-\infty, 2) \cup (4, \infty)}}.$$

Příklad 2.1.2. Najděte definiční obor funkce $f : y = \sqrt{\ln \frac{3x + 2}{3 - x}}$.

Řešení: Musí platit: 1. $3 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

$$2. \frac{3x + 2}{3 - x} > 0 \Rightarrow \text{---} \overset{-}{\frac{2}{3}} \text{---} \overset{+}{3} \text{---}$$

$$3. \ln \frac{3x + 2}{3 - x} \geq 0 \Rightarrow \frac{3x + 2}{3 - x} \geq 1 \Rightarrow \frac{3x + 2}{3 - x} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{4x - 1}{3 - x} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\text{---} \overset{-}{\frac{1}{4}} \text{---} \overset{+}{3} \text{---} \Rightarrow \underline{\underline{D(f) = \left(\frac{1}{4}, 3\right)}}.$$

Poznámka. U tohoto příkladu jsme mohli vynechat druhou nerovnost. Pokud je splněno, že nějaký výraz je větší nebo se rovná jedné, je tento výraz automaticky kladný. Platnost druhé nerovnosti tehdy plyne z platnosti té třetí.

Příklad 2.1.3. Najděte definiční obory funkcí obsahujících cyklometrické funkce:

a) $f : y = \arcsin(3x - 2)$

b) $g : y = \arccos(x - 4) + \ln(9 - 2x)$

c) $h : y = \arccos \frac{x + 1}{x - 3}$

d) $k : y = \frac{1}{\arcsin(1 + x)}$

Řešení: a) Argument funkce f musí být z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

Řešíme dvě nerovnice, které musí platit zároveň:

$$1. 3x - 2 \geq -1 \Rightarrow 3x \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3} \quad \text{---} \overset{\frac{1}{3}}{\bullet} \text{---}$$

$$2. 3x - 2 \leq 1 \Rightarrow 3x \leq 3 \Rightarrow x \leq 1 \quad \text{---} \overset{1}{\bullet} \text{---} \quad \underline{\underline{D(f) = \left(\frac{1}{3}, 1\right)}}.$$

b) Funkce g obsahuje arccos i logaritmus. Proto:

$$1. x - 4 \geq -1 \Rightarrow x \geq 3 \quad \text{---} \bullet \text{---} \quad \text{3}$$

$$2. x - 4 \leq 1 \Rightarrow x \leq 5 \quad \text{---} \bullet \text{---} \quad \text{5}$$

$$3. 9 - 2x > 0 \Rightarrow 2x < 9 \Rightarrow x < \frac{9}{2} \quad \text{---} \bullet \text{---} \quad \frac{9}{2}$$

Definiční obor funkce g je průnik těchto tři intervalů: $D(g) = \langle 3, \frac{9}{2} \rangle$.

c) Funkce h obsahuje zlomek i arccos. Musí platit:

$$1. x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$$

$$2. \frac{x+1}{x-3} \geq -1 \Rightarrow \frac{x+1}{x-3} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2x-2}{x-3} \geq 0 \quad \text{---} \begin{matrix} + & 1 & - & 3 & + \\ \bullet & & \circ & & \bullet \end{matrix} \text{---}$$

$$2. \frac{x+1}{x-3} \leq 1 \Rightarrow \frac{x+1}{x-3} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{4}{x-3} \leq 0 \quad \text{---} \begin{matrix} - & 3 & + \\ \bullet & & \circ \end{matrix} \text{---}$$

Z toho $D(h) = \langle -\infty, 1 \rangle$.

d) Funkce k obsahuje funkci arcsin a zlomek.

$$1. \arcsin(1+x) \neq 0 \Rightarrow 1+x \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$$

$$2. x+1 \geq -1 \Rightarrow x \geq -2 \quad \text{---} \bullet \text{---} \quad \text{-2}$$

$$3. x+1 \leq 1 \Rightarrow x \leq 0 \quad \text{---} \bullet \text{---} \quad \text{0} \quad D(k) = \langle -2, -1 \rangle \cup (-1, 0 \rangle.$$

Příklad 2.1.4. Najděte definiční obory následujících funkcí:

$$a) f: y = \frac{\sqrt{x+3}}{2x-1}$$

$$b) g: y = \sqrt{\frac{x+5}{3-x}}$$

$$c) h: y = \frac{3-2x}{\ln(4-2x)}$$

$$d) k: y = \ln \frac{x+2}{x-3}$$

$$e) l: y = \log(5+4x-x^2)$$

$$f) n: y = \frac{6}{\sqrt{2x+7}}$$

$$g) p: y = \arccos(6-5x)$$

$$h) q: y = \arcsin \frac{x+4}{6-x}$$

$$j) r: y = \arccos \frac{2x-1}{x+3}$$

Řešení: a) $D(f) = \langle -3, \frac{1}{2} \rangle \cup (\frac{1}{2}, \infty)$; b) $D(g) = \langle -5, 3 \rangle$;

c) $D(h) = (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, 2)$; d) $D(k) = (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$;

e) $D(l) = (-1, 5)$; f) $D(n) = (-\frac{7}{2}, \infty)$; g) $D(p) = \langle 1, \frac{7}{5} \rangle$;

h) $D(q) = (-\infty, 1)$; j) $D(r) = \langle -\frac{2}{3}, 4 \rangle$.

2.2 Některé vlastnosti funkcí, inverzní funkce

Sudá funkce — pro každé $x \in D(f)$ je $f(x) = f(-x)$, potom graf funkce je souměrný podle osy y .

Lichá funkce — pro každé $x \in D(f)$ je $f(x) = -f(-x)$, potom graf funkce je souměrný podle počátku.

Periodická funkce s periodou $p \neq 0$ — pro každé $x \in D(f)$ je také $x \pm p \in D(f)$ a platí $f(x \pm p) = f(x)$.

Funkce zdola omezená na množině $M \subset D(f)$ — existuje-li takové reálné číslo d , že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq d$.

Funkce shora omezená na množině $M \subset D(f)$ — existuje-li takové reálné číslo h , že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq h$.

Funkce omezená na množině $M \subset D(f)$ — je-li f zdola omezená i shora omezená na množině M .

Funkce rostoucí na množině $M \subset D(f)$ — jestliže pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí implikace: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce klesající na množině $M \subset D(f)$ — jestliže pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí implikace: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce neklesající na množině $M \subset D(f)$ — jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ platí implikace: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkce nerostoucí na množině $M \subset D(f)$ — jestliže pro každé $x_1, x_2 \in M$ platí implikace: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Funkce f je prostá na $D(f)$ — jestliže pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$ platí, že $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Poznámka. Aby funkce f mohla být sudá nebo lichá, musí být definiční obor $D(f)$ této funkce symetrická množina podle počátku. Aby mohla být funkce f periodická, musí být $D(f)$ neomezená množina. Má-li periodická funkce f periodu p , pak také každé číslo kp , ($k \neq 0$, celé) je rovněž periodou funkce f .

Poznámka. Rostoucí a klesající funkce se souhrnně nazývají ryze monotonní funkce, nerostoucí a neklesající funkce zase monotonní funkce na množině M .

Inverzní funkce — je-li f prostá funkce s definičním oborem $D(f)$ a oborem hodnot $H(f)$, potom k tomuto zobrazení existuje zobrazení inverzní, které je opět prosté a zobrazuje množinu $H(f)$ na množinu $D(f)$. Značíme f^{-1} . Platí, že $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$ a $x = f^{-1}(y)$, právě když $y = f(x)$. Graf inverzní funkce f^{-1} je souměrný s grafem funkce f podle přímky o rovnici $y = x$.

Příklad 2.2.1. Zjistěte, které z následujících funkcí jsou sudé, které liché a které ani sudé, ani liché.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = 3x^2 + 5x^4 & \text{b) } g(x) = x^3 - 4x & \text{c) } h(x) = \frac{x^2}{1+x} \\ \text{d) } k(x) = \frac{x^3}{x^2-3} & \text{e) } l(x) = \frac{x^3}{x^5-3} & \text{f) } n(x) = 0 \\ \text{g) } p(x) = \cos x^3 & \text{h) } q(x) = \sin x^2 & \text{j) } r(x) = \frac{2x-1}{x+3} \end{array}$$

Řešení: a) $D(f) = \mathbb{R}$, $f(-x) = 3(-x)^2 + 5(-x)^4 = 3x^2 + 5x^4 = f(x)$, dle definice funkce f je sudá.

b) $D(g) = \mathbb{R}$, $g(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -(x^3 - 4x) = -g(x)$, funkce g je lichá.

c) $D(h) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, definiční obor funkce není symetrický podle počátku. Funkce h není ani sudá ani lichá.

d) $D(k) = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$,

$$k(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-3} = \frac{-x^3}{x^2-3} = -\frac{x^3}{x^2-3} = -k(x), \quad \underline{\underline{\text{funkce } k \text{ je lichá.}}}$$

e) $D(l) = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$,

$$l(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^5-3} = \frac{-x^3}{-x^5-3} = \frac{x^3}{x^5+3}, \quad \underline{\underline{\text{funkce } l \text{ není ani sudá ani lichá.}}}$$

f) $D(n) = \mathbb{R}$, $n(-x) = 0 = n(x)$ a také $n(-x) = 0 = -n(x)$. Tato funkce je velice speciální, protože je zároveň sudá a zároveň lichá. Takovou vlastnost nemá žádná jiná funkce.

g) sudá; h) lichá; j) ani sudá ani lichá.

Příklad 2.2.2. Určete inverzní funkci k funkci $f : y = 6 - 3x$.

Řešení: Funkce f je lineární, a tedy i prostá. $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \mathbb{R}$. Inverzní funkci budeme hledat tak, že zaměníme x a y a z nové rovnice vyjádříme y .

$$f^{-1} : x = 6 - 3y \Rightarrow x - 6 = -3y \Rightarrow 3y = 6 - x. \text{ Z toho } \underline{\underline{f^{-1} : y = 2 - \frac{x}{3}.}}$$

Platí, že $D(f^{-1}) = H(f) = \mathbb{R}$, $H(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

Příklad 2.2.3. Určete inverzní funkci k funkcím:

$$\text{a) } f : y = \ln(4 - x) \quad \text{b) } g : y = \frac{x + 3}{x - 4} \quad \text{c) } h : y = \arcsin\left(\frac{2x + 5}{3}\right)$$

Řešení: a) Definičním oborem funkce f je řešení nerovnice $4 - x > 0$. Máme $D(f) = (-\infty, 4)$ a $H(f) = \mathbb{R}$.

Funkce f je složená ze dvou prostých funkcí, logaritmické a lineární, je tedy prostá funkce. Zaměníme x a y a z této nové rovnice vyjádříme y .

$$f^{-1} : x = \ln(4 - y)$$

Inverzní funkce k logaritmické funkci je exponenciální funkce. Aplikujeme tedy exponenciální funkci na obě strany rovnice a dostaneme:

$$e^x = 4 - y, \quad e^x - 4 = -y, \quad -e^x + 4 = y \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f^{-1} : y = 4 - e^x}}$$

Platí, že $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$ a $H(f^{-1}) = D(f) = (-\infty, 4)$.

b) Aby byla funkce $y = \frac{x + 3}{x - 4}$ definovaná, musí být $x \neq 4$. Můžeme tedy psát, že $D(g) = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$.

Funkce g je lineární lomená funkce, a je proto prostá (grafem této funkce je hyperbola).

Zaměníme v zadání funkce x a y :

$$g^{-1} : x = \frac{y + 3}{y - 4} \quad \Rightarrow \quad x(y - 4) = y + 3 \quad \Rightarrow \quad xy - 4x = y + 3 \quad \Rightarrow$$

$$xy - y = 4x + 3 \quad \Rightarrow \quad y(x - 1) = 4x + 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{g^{-1} : y = \frac{4x + 3}{x - 1}}}$$

$D(g^{-1}) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty) = H(g)$ a $H(g^{-1}) = D(g) = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$.

c) Aby byla funkce $h : y = \arcsin\left(\frac{2x + 5}{3}\right)$ definovaná, musí platit nerovnice:

$$-1 \leq \frac{2x + 5}{3} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -3 \leq 2x + 5 \leq 3 \quad \Rightarrow \quad -8 \leq 2x \leq -2 \quad \Rightarrow \quad x \in \langle -4, -1 \rangle.$$

Funkce h je složená ze dvou prostých funkcí, arcsinus a lineární, a proto je na množině $D(h) = \langle -4, -1 \rangle$ prostá. Inverzní funkce k funkci arcsinus je funkce $\sin x$. Zaměníme v zadání funkce x a y a na obě strany rovnice aplikujeme funkci sinus:

$$h^{-1} : x = \arcsin\left(\frac{2y + 5}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{2y + 5}{3} \quad \Rightarrow \quad 3 \sin x = 2y + 5 \quad \Rightarrow$$

$$2y = 3 \sin x - 5 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{h^{-1} : y = \frac{3 \sin x - 5}{2}}}$$

$D(h^{-1}) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle = H(h)$ a $H(h^{-1}) = D(h) = \langle -4, -1 \rangle$.

2.3 Limita funkce

Funkce jedné proměnné $f : y = f(x)$ má v bodě a limitu L , jestliže v případě, kdy se hodnota x blíží k číslu a , funkční hodnoty $f(x)$ se blíží k hodnotě (limitě) L .

Symbolicky pak píšeme: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Podobně můžeme definovat $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$ resp. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = B$ tím, že uvažujeme případ, kdy x se blíží k číslu a pouze zprava resp. pouze zleva.

Funkce f má v bodě a nejvýše jednu limitu. Pokud tedy má existovat $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, musí platit

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L.$$

Poznámka. Elementární funkce f má v každém bodě svého definičního oboru $D(f)$ limitu rovnou funkční hodnotě v tomto bodě. Zřejmě bude zajímavější počítat limity v bodech, které nepatří do $D(f)$, a v bodech $\pm\infty$.

Mají-li funkce f, g v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečné limity, tj. existují-li limity $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \in \mathbb{R}$, pak mají v tomto bodě limity i funkce $f + g$, $f - g$, fg , cf , kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Je-li navíc $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, existuje také limita funkce $\frac{f}{g}$ v bodě a a platí:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x), & \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x), \\ \lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) &= c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x), & \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}. \end{aligned}$$

Pro výpočet limit funkce se často používá tato věta: Jestliže pro dvě funkce f, g platí, že pro všechna $x \neq a$ z jistého okolí bodu a je $f(x) = g(x)$, potom $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existuje, právě když existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, a platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

Můžeme při počítání limit funkce použít i následující vztahy:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} &= e, & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e, & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x &= e^k \end{aligned}$$

Nechť jsou $f(x)$ a $g(x)$ dva polynomy, přičemž ax^n je člen s nejvyšší mocninou polynomu $f(x)$ a bx^m je člen s nejvyšší mocninou v polynomu $g(x)$. Potom

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$$

Příklad 2.3.1. *Určete limity funkcí:*

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} (6 - 3 \cos x) \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1 - 3x} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x - 2}$$

Řešení: Bod a , ve kterém počítáme limitu patří do definičního oboru funkce, a proto limity počítáme pouhým dosazením.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5) = 1^2 - 5 = \underline{\underline{4}}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} (6 - 3 \cos x) = 6 - 3 \cos 0 = 6 - 3 \cdot 1 = \underline{\underline{3}}.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1 - 3x} = \sqrt{1 - 3 \cdot (-1)} = \sqrt{4} = \underline{\underline{2}}; \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x - 2} = \frac{1}{3 - 2} = \underline{\underline{1}}.$$

Příklad 2.3.2. *Určete limity následujících funkcí:*

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^3 - 1} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 4x - 5}{x + 5} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2}$$

Řešení: a) Funkce $f : y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ není v bodě $x = 2$ definována. Můžeme však v $\mathbb{R} - \{2\}$ provést úpravu

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2 = g(x).$$

Potom

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = \underline{\underline{4}}.$$

b) Postupujeme podobně jako v části a).

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 + 1)(x^3 - 1)}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 1 = \underline{\underline{2}}.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 4x - 5}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x + 5)(x - 1)}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow -5} x - 1 = \underline{\underline{4}}.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2-x}{2x}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x - 2)}{(x - 2)2x} = \lim_{x \rightarrow 2} -\frac{1}{2x} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}.$$

Příklad 2.3.3. Vypočtěte limity funkcí:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x^2} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{x + 7} - 3}$$

Řešení: a) Chtěli bychom „nuly“ vykrátit stejně, jako jsme to dělali v předchozím příkladě. K tomu potřebujeme polynomy namísto odmocnin. Proto lomený výraz rozšíříme výrazem $\sqrt{x^3 + 1} + 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + 1} - 1}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^3 + 1} + 1}{\sqrt{x^3 + 1} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 1) - 1}{x^2(\sqrt{x^3 + 1} + 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2(\sqrt{x^3 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^3 + 1} + 1} = \frac{0}{2} = \underline{0}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x + 1} + 2}{\sqrt{x + 1} + 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(\sqrt{x + 1} + 2)}{x + 1 - 4} = \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x + 1} + 2 = 2 + 2 = \underline{4}.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{x + 7} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{x + 7} - 3} \cdot \frac{\sqrt{x + 2} + 2}{\sqrt{x + 2} + 2} \cdot \frac{\sqrt{x + 7} + 3}{\sqrt{x + 7} + 3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2 - 4)}{(x + 7 - 9)} \cdot \frac{\sqrt{x + 7} + 3}{\sqrt{x + 2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)}{(x - 2)} \cdot \frac{\sqrt{x + 7} + 3}{\sqrt{x + 2} + 2} = \frac{3}{\underline{2}}.$$

Příklad 2.3.4. Vypočtěte limity funkcí v nevlastních bodech:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x + 6}{4x^2 - 9x + 3} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 - 3x - 2}{2x^2 + 7x - 23} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 1}{4x^4 - 5x^2 + 3}$$

Řešení: Počítáme limitu z podílu dvou polynomů. O limitě rozhodují nejvyšší mocniny čitatele i jmenovatele.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x + 6}{4x^2 - 9x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{4} = \underline{\underline{\infty}}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 - 3x - 2}{2x^2 + 7x - 23} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{2} = \underline{\underline{3}}.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 1}{4x^4 - 5x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{4x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = \underline{0}.$$

Příklad 2.3.5. Vypočtěte limity funkcí:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x}$$

Řešení: a) Budeme využívat vzorec $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Potřebujeme ale nejdřív zajistit, aby v argumentu funkce \sin byla stejná funkce jako ve jmenovateli. Proto lomený výraz rozšíříme číslem 9.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{x} \cdot \frac{9}{9} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{9x} \cdot 9 = 1 \cdot 9 = \underline{\underline{9}}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} \cdot \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot x = 1 \cdot 0 = \underline{\underline{0}}.$$

c) Budeme využívat vzorec $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{x}\right)^x = \underline{\underline{e^{-3}}}.$$

d) Výraz převedeme zase na vzorec $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$. Upravujeme:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+7}{x+5} - 1\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+7-x-5}{x+5}\right)^{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+5}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+5}\right)^{\frac{x+5}{x+5} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x+5}\right)^{x+5 \cdot \frac{2x}{x+5}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x+5}\right)^{x+5}\right]^{\frac{2x}{x+5}} = [e^2]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+5}} = e^{2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+5}} = e^{2 \cdot 2} = \underline{\underline{e^4}}. \end{aligned}$$

Příklad 2.3.6. Určete limity funkcí:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 6x + 5) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - 2 \sin x) & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x^3}{x^4 - 2x^3} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 12x + 20}{x^2 - 5x + 6} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{x^2 - 5x + 6} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^3}{x^4 - 2x^3} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 - 1}{x^3 - 4x - 5} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 - 1}{x^3 - 4x - 5} \end{array}$$

Řešení: a) 1; b) -1; c) -8; d) $-\frac{1}{2}$; e) 8; f) $\frac{3}{4}$; g) 1; h) 0; j) $-\frac{1}{5}$.

2.4 Derivace funkce

Derivace funkce f v bodě x_0 — pokud existuje limita, pak $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}$.

Derivace funkce f na množině M — funkce $f' : y = f'(x), x \in M$.

n -tá derivace funkce f na množině M — funkce $f^{(n)} : y = (f^{(n-1)})'(x), x \in M$.

Rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ — přímka t , která má rovnici

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Vzorce pro derivování elementárních funkcí

Vzorec pro derivaci funkce f	Podmínky platnosti vzorce
$c' = 0$	$x \in (-\infty, \infty)$
$(x^n)' = nx^{n-1}, n \in \mathbf{N}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$(x^r)' = rx^{r-1}, r \in \mathbf{R}$	$x \in (0, \infty)$
$(e^x)' = e^x$	$x \in (-\infty, \infty)$
$(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$	$x \in (-\infty, \infty)$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x \in (0, \infty)$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$x \in (0, \infty)$
$(\sin x)' = \cos x$	$x \in (-\infty, \infty)$
$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in (-\infty, \infty)$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$	$x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$
$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in (-\infty, \infty)$
$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$x \in (-\infty, \infty)$

Vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkce:

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u - v)' = u' - v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(cu)' = cu', \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0$$

Vzorec pro derivaci složené funkce: $[f \circ \varphi]'(x) = f'(u)\varphi'(x)$, kde $u = \varphi(x)$.

Příklad 2.4.1. Vypočtete v přípustných bodech derivace funkcí daných předpisů:

$$\text{a) } y = 5 \sin x - 6 e^x + 3 \quad \text{b) } y = 2x^3 - \sqrt[3]{x^2} \quad \text{c) } y = (x - 5) \cos x \quad \text{d) } y = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$$

$$\text{Řešení: a) } y' = \underline{\underline{5 \cos x - 6 e^x}}; \quad \text{b) } y' = \underline{\underline{6x^2 - \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}}$$

c) Při derivování této funkce použijeme vzorec pro derivování součinu.

$$y' = (x - 5)' \cos x + (x - 5)(\cos x)' = \underline{\underline{\cos x - (x - 5) \sin x}}$$

d) Při derivování této funkce použijeme vzorec pro derivování podílu.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1 - \sin x)'(1 + \sin x) - (1 - \sin x)(1 + \sin x)'}{(1 + \sin x)^2} = \\ &= \frac{-\cos x - \cos x \sin x - \cos x + \sin x \cos x}{(1 + \sin x)^2} = \underline{\underline{\frac{-2 \cos x}{(1 + \sin x)^2}}} \end{aligned}$$

Příklad 2.4.2. Vypočtete derivace funkcí v bodě $x_0 = -1$:

$$\text{a) } y = \pi x^3 - 7x \quad \text{b) } y = e^x(x^2 - 1) \quad \text{c) } y = \frac{x + 5}{x^2} \quad \text{d) } y = \frac{x - 2}{x + 2}$$

$$\begin{aligned} \text{Řešení: a) } y' &= 3\pi x^2 - 7, \quad y'(-1) = 3\pi - 7; \quad \text{b) } y' = e^x(x^2 + 2x - 1), \\ y'(-1) &= -\frac{2}{e}; \quad \text{c) } y' = -\frac{x + 10}{x^3}, \quad y'(-1) = -9; \quad \text{d) } y' = \frac{4}{(x + 2)^2}, \quad y'(-1) = 4. \end{aligned}$$

Příklad 2.4.3. Derivujte funkce:

$$\text{a) } y = 5 - 6x^3 \quad \text{b) } y = \sqrt[3]{x}(x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}) \quad \text{c) } y = \sin x \cos x \quad \text{d) } y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

$$\text{Řešení: a) } y' = -18x^2; \quad \text{b) } y' = (x^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{6}})' = \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4} + \frac{1}{12\sqrt[6]{x^7}};$$

$$\text{c) } y' = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x; \quad \text{d) } y' = \frac{1}{1 - \sin x}.$$

Příklad 2.4.4. Zderivujte složené funkce $y = \sin 2x$, $y = \sin^2 x$ a $y = \sin^2 2x$.

Řešení: Funkce $y = \sin 2x$ se dá zapsat jako $y = \sin \varphi$, $\varphi = 2x$.

Potom $y' = (\sin \varphi)'(2x)' = \cos \varphi \cdot 2 = \underline{\underline{2 \cos 2x}}$.

Podobně funkce $y = \sin^2 x$ se dá zapsat jako $y = \varphi^2$, $\varphi = \sin x$.

Potom $y' = (\varphi^2)'(\sin x)' = 2\varphi \cdot \cos x = 2 \sin x \cos x = \underline{\underline{\sin 2x}}$.

Funkce $y = \sin^2 2x$ je dvakrát složená: $y = \varphi^2$, $\varphi = \sin \xi$, $\xi = 2x$.

Potom $y' = (\varphi^2)'(\sin \xi)'(2x)' = 2\varphi \cdot \cos \xi \cdot 2 = 4 \sin 2x \cos 2x = \underline{\underline{2 \sin 4x}}$.

Příklad 2.4.5. Vypočtěte derivace funkcí:

a) $y = \ln(x^2 - 8)$ b) $y = e^x \sin^2 x$ c) $y = e^{\sin x}$ d) $y = \cos e^x$ e) $y = \ln \frac{x+1}{x-1}$

Řešení: a) $y' = \frac{1}{x^2 - 8} \cdot (2x - 0) = \underline{\underline{\frac{2x}{x^2 - 8}}}$.

b) $y' = e^x \sin^2 x + e^x 2 \sin x \cos x = \underline{\underline{e^x \sin x (\sin x + 2 \cos x)}}$.

c) $y' = \underline{\underline{e^{\sin x} \cos x}}$. d) $y' = \underline{\underline{-e^x \sin e^x}}$.

e) $y' = \frac{1}{x+1} \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} = \underline{\underline{\frac{-2}{x^2 - 1}}}$.

Příklad 2.4.6. Vypočtěte $f'''(x)$, kde:

a) $f(x) = 4x^3 - 5x + 2$ b) $y = e^x(x^2 - 2)$ c) $y = e^{x^2}$ d) $y = \ln(3x + 2)$

Řešení: a) $f'(x) = 12x^2 - 5$, $f''(x) = 24x$, $\underline{\underline{f'''(x) = 24}}$.

b) $f'(x) = e^x(x^2 - 2) + e^x 2x = e^x(x^2 + 2x - 2)$,

$f''(x) = e^x(x^2 + 2x - 2) + e^x(2x + 2) = e^x(x^2 + 4x)$,

$f'''(x) = e^x(x^2 + 4x) + e^x(2x + 4) = \underline{\underline{e^x(x^2 + 6x + 4)}}$.

c) $f'(x) = e^{x^2} 2x$, $f''(x) = e^{x^2} 2x \cdot 2x + e^{x^2} 2 = e^{x^2} (4x^2 + 2)$,

$f'''(x) = e^{x^2} 2x (4x^2 + 2) + e^{x^2} 8x = \underline{\underline{e^{x^2} (8x^3 + 12x)}}$.

e) $f'(x) = \frac{1}{3x+2} \cdot 3 = 3(3x+2)^{-1}$, $f''(x) = -3(3x+2)^{-2} \cdot 3 = -9(3x+2)^{-2}$,

$f'''(x) = 18(3x+2)^{-3} \cdot 3 = \underline{\underline{\frac{54}{(3x+2)^3}}}$.

Příklad 2.4.7. Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $T = [1, ?]$, kde

$$\text{a) } f(x) = \frac{2x - 5}{x + 2} \quad \text{b) } f(x) = x \ln x \quad \text{c) } f(x) = 3x e^{1-x^2} \quad \text{d) } f(x) = \sqrt{\frac{5-x}{x}}$$

Řešení: a) Potřebujeme dosadit do rovnice $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ za x_0 , $f(x_0)$, $f'(x_0)$. Ze zadání $x_0 = 1$. Potom $f(x_0) = f(1) = \frac{2 \cdot 1 - 5}{1 + 2} = -1$.

Pro směrnici tečny potřebujeme vypočítat derivaci funkce.

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x + 2) - (2x - 5) \cdot 1}{(x + 2)^2} = \frac{2x + 4 - 2x + 5}{(x + 2)^2} = \frac{9}{(x + 2)^2}$$

Po dosazení dostaneme $f'(x_0) = f'(1) = 1$.

Rovnice tečny bude $t : y + 1 = 1(x - 1)$. Po úpravě $t : x - y - 2 = 0$.

$$\text{b) } x_0 = 1, \quad f(x_0) = f(1) = 1 \ln 1 = 0, \quad f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1, \quad f'(1) = 1$$

Po dosazení do rovnice dostaneme $t : y = x - 1$.

$$\text{c) } x_0 = 1, \quad f(x_0) = 3e^0 = 3, \quad f'(x) = 3 \cdot e^{1-x^2} + 3x e^{1-x^2}(-2x) = 3e^{1-x^2}(1-2x^2), \quad f'(1) = 3e^0(1-2) = -3. \text{ Po dosazení a úpravě } \underline{\underline{t : 3x + y - 6 = 0.}}$$

$$\text{d) } f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5-x}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{-1x - (5-x)1}{x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{5-x}} \left(-\frac{5}{x^2}\right) \Rightarrow$$

$$f'(1) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4}}(-5) = -\frac{5}{4}, \quad x_0 = 1, \quad f(1) = \sqrt{\frac{5-1}{1}} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{t : 5x + 4y - 13 = 0.}}$$

Příklad 2.4.8. Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = \ln(2x + 7)$

a) v bodě $T = [-3, ?]$,

b) která je rovnoběžná s přímkou $y = 4x - 3$.

Řešení: a) $T = [-3, \ln(2(-3) + 7)] = [-3, 0]$. Pro směrnici tečny potřebujeme derivaci funkce v bodě T .

$$f'(x) = \frac{1}{2x + 7} \cdot 2, \quad f'(-3) = \frac{2}{2(-3) + 7} = 2$$

Po dosazení do rovnice $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$ dostaneme $y = 2(x + 3)$.

Po úpravě $2x - y + 6 = 0$.

b) Směrnici tečny v libovolném bodě $[x_0, f(x_0)]$ bude $k_t = f'(x_0) = \frac{2}{2x_0 + 7}$.

Na druhé straně tečna má být rovnoběžná s danou přímkou, proto směrnice tečny se rovná směrnici přímky $k = 4$. První souřadnici bodu T dostaneme řešením rovnice $k_t = k$.

$$\frac{2}{2x_0 + 7} = 4 \Rightarrow 1 = 4x_0 + 14 \Rightarrow x_0 = -\frac{13}{4}.$$

Potom $T = [-\frac{13}{4}, \ln(-\frac{13}{2} + 7)] = [-\frac{13}{4}, \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2] = [-\frac{13}{4}, -\ln 2]$.

Po dosazení do rovnice dostaneme $t : y + \ln 2 = 4(x + \frac{13}{4})$.

Po úpravě $t : 4x - y + 13 - \ln 2 = 0$.

Příklad 2.4.9. Určete rovnice tečen ke křivce $y = x^3 + x^2 - 2x$ v jejich průsečících s osou x .

Řešení: Průsečíky křivky s osou x určíme řešením rovnice $x^3 + x^2 - 2x = 0$.
Rovnici převedeme na součinnový tvar $x(x-1)(x+2) = 0$ a dostaneme kořeny $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Hledáme tedy rovnice tečen dané křivky v bodech $T_1 = [-2, 0]$, $T_2 = [0, 0]$, $T_3 = [1, 0]$.

Pro směrnici tečny v libovolném bodě $[x_0, y(x_0)]$ platí $k = y'(x_0)$.

Protože

$$y'(x) = 3x^2 + 2x - 2,$$

dostaneme $k = y'(x_0) = 3x_0^2 + 2x_0 - 2$. Směrnice tečen uvažované křivky v bodech T_1, T_2, T_3 jsou

$$k_1 = y'(-2) = 6,$$

$$k_2 = y'(0) = -2,$$

$$k_3 = y'(1) = 3.$$

Po dosazení do rovnice tečny $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ obdržíme

pro $T_1 = [-2, 0]$ a $k_1 = 6 : y = 6(x + 2)$ tj. $6x - y + 12 = 0$;

pro $T_2 = [0, 0]$, $k_2 = -2 : y = -2x$ tj. $2x + y = 0$;

pro $T_3 = [1, 0]$, $k_3 = 3 : y = 3(x - 1)$ tj. $3x - y - 3 = 0$.

Příklad 2.4.10. Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f : y = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ v bodě $T = [1, ?]$.

Řešení: $2x - 9y + 1 = 0$.

Příklad 2.4.11. Určete rovnice tečen ke křivce $y = x^3 + x^2 - 6x$ v jejich průsečících s osou x .

Řešení: $15x - y + 45 = 0$, $6x + y = 0$, $10x - y - 20 = 0$.

Příklad 2.4.12. Určete rovnici tečny ke křivce $y = \frac{e^x}{2} + 1$, která je rovnoběžná s přímkou $p : x - 2y = 1 = 0$.

Řešení: $T[0, \frac{3}{2}]$, $t : x - 2y + 3 = 0$.

Příklad 2.4.13. Derivujte funkce a derivaci upravte:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 9}) & \text{b) } g(x) = \frac{x^3}{1 + x^6} + \operatorname{arctg} x^3 & \text{c) } h(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \\ \text{d) } k(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln \frac{1 + \sin x}{\cos x} & \text{e) } l(x) = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} & \text{f) } n(x) = \ln \sin x \\ \text{g) } p(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} & \text{h) } q(x) = \ln \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - x}}{1 - \sqrt{1 - x}}} & \text{j) } r(x) = \arcsin \sqrt{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Řešení: a) } f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}; & \text{b) } g'(x) = \frac{6x^2}{(1 + x^6)^2}; & \text{c) } h'(x) = -\frac{1}{1 + x^2}; \\ \text{d) } k'(x) = \frac{2}{\cos^3 x}; & \text{e) } l'(x) = \arcsin x; & \text{f) } n'(x) = \operatorname{cotg} x; \\ \text{g) } p'(x) = -\frac{1}{\cos x}; & \text{h) } q'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{1 - x}}; & \text{j) } q'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}. \end{array}$$

2.5 L'Hospitalovo pravidlo

L'Hospitalovo pravidlo — metoda výpočtu limit pomocí derivací:

1. Nechť spojité funkce f, g mají v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ funkční hodnoty $f(x_0) = g(x_0) = 0$

a nechť existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Potom existuje také $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

2. Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ nebo $-\infty$ a existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, potom

existuje také $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Neurčitý výraz — výraz typu: $\frac{0}{0}$; $\pm \frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$; $\infty - \infty$; 1^∞ ; ∞^0 ; 0^0

Příklad 2.5.1. Užitím l'Hospitalova pravidla vypočtěte limity funkcí:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^5 - 2x - 1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2 - 3x - 6} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x - x} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{\sin 4x}$$

Řešení: a) Je to limita z neurčitého výrazu typu $\frac{0}{0}$, a proto můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^5 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 + 1)'}{(x^5 - 2x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2}{5x^4 - 2} = \frac{3}{5(-1)^4 - 2} = \frac{3}{3} = \underline{1}.$$

b) Limita z neurčitého výrazu typu $\frac{\infty}{\infty}$, použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^2 - 3x - 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2 - 3x - 6)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2 - 3x} = \underline{\underline{0}}.$$

c) Je to limita z neurčitého výrazu typu $\frac{0}{0}$, použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3)'}{(\sin x - x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\cos x - 1}$$

Znova máme limitu typu $\frac{0}{0}$, použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x^2)'}{(\cos x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{-\sin x}$$

Máme limitu typu $\frac{0}{0}$, použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(6x)'}{(-\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{-\cos x} = \underline{\underline{-6}}.$$

d) Je to limita z neurčitého výrazu typu $\frac{0}{0}$, použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin \pi x)'}{(\sin 4x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \cos \pi x}{4 \cos 4x} = \frac{\pi \cos 0}{4 \cos 0} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

Příklad 2.5.2. *Užitím l'Hospitalova pravidla vypočtěte limity funkcí:*

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{x - \frac{\pi}{2}} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1-2x)} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{1 - \cos x} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{(4x - \pi)^2} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - nx + n - 1}{(x-1)^2} \end{array}$$

$$\text{Řešení: a) } \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2 \cos^2 x} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}.$$

$$\text{b) } \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} 2x}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} 2x 2x + e^{x^2} 2}{-\cos x} = \frac{2}{-1} = \underline{\underline{-2}}.$$

$$\text{c) Typ } \frac{-\infty}{-\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{2} x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \cos^2 \frac{\pi}{2} x}{\pi x - \pi} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 \cdot 2 \cos \frac{\pi}{2} x \cdot \sin \frac{\pi}{2} x \cdot \frac{\pi}{2}}{\pi} = \underline{\underline{0}}.$$

d) 2; e) 0; f) -1; g) 0; h) $\frac{1}{8}$; j) $\frac{n(n-1)}{2}$.

Příklad 2.5.3. Vypočtete limity z neurčitého výrazu typu $\infty - \infty$:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$
d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ f) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right)$

Řešení: a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = \infty \Rightarrow$ máme typ limity $\infty - \infty$.

Upravíme na společného jmenovatele, dostaneme limitu typu $\frac{0}{0}$ a použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{e^x(1 + 1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 + x} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

b) $-\frac{1}{2}$; c) 0; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{1}{5}$.

Příklad 2.5.4. Vypočtete limity z neurčitého výrazu typu $0 \cdot \infty$:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x)$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x^2) \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x \right)$
d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(\frac{4+x}{2+x} \right)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) \operatorname{cotg} x$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+3) \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right)$

Řešení: a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \Rightarrow$ máme typ limity $0 \cdot (-\infty)$.

Chtěli bychom upravit na l'Hospitalovo pravidlo, tedy na typ $\frac{0}{0}$ nebo $\pm \frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{1} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Vidíme, že jsme rozšířením výrazem $\frac{1}{x}$ dostali limitu typu $\frac{-\infty}{\infty}$, a můžeme tedy použít l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = \underline{\underline{0}}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)}{1} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = \underline{\underline{1}}.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x^2) \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x^2) \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x \right)}{1} \cdot \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x}}{\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x}{-\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2} x} \frac{\pi}{2}} = \frac{-2}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\underline{\underline{\pi}}}. \quad \text{d) } 2; \quad \text{e) } 1; \quad \text{f) } 3.$$

Příklad 2.5.5. Vypočtete limity z neurčitých výrazu typu 1^∞ ; ∞^0 ; 0^0 :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{4 + \frac{3}{\ln x}}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$$

Řešení: Limity v tomto příkladě jsou $\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{v(x)}$. Ve všech případech se jedná o neurčité výrazy. Při výpočtu limity nejdříve uijeme rovnosti

$$a^b = e^{\ln a^b} = e^{b \ln a}, \quad a > 0.$$

a) Jedná se o neurčitý výraz typu 0^0 . Upravujeme.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x}$$

Spočítáme limitu z exponentu, která je typu $0 \cdot \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = \underline{\underline{1}}.$$

b) Je to neurčitý výraz typu 1^∞ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\cos 2x} (-\sin 2x) 2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin 2x}{x \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \cos 2x}{\cos 2x - 2x \sin 2x} = \underline{\underline{e^{-2}}}.$$

c) Neurčitý výraz typu 0^0 .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^{\frac{3}{4+\ln x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \ln x}{4 + \ln x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}}} = \underline{\underline{e^3}}.$$

d) 1; e) 1; f) e^2 .

Příklad 2.5.6. *Užitím l'Hospitalova pravidla vypočtěte limity funkcí:*

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi - x}{\sin 5x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{3}{x}} - 1 \right) & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2}{x} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\frac{1}{x}} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{e^x - 1} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{2}{x^2} \right) \end{array}$$

Řešení: a) $\frac{1}{5}$; b) 3; c) 0; d) 1; e) 1; f) $\frac{1}{6}$.

3 Integrální počet funkce jedné proměnné

3.1 Integrační metody

Primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b) — funkce $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, taková, že $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$.

Neurčitý integrál funkce f — jiný název pro primitivní funkci. Značíme $\int f(x) dx$.

Poznámka. Primitivní funkce není určena jednoznačně. Přičteme-li k dané primitivní funkci konstantu, dostaneme zase primitivní funkci:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Pravidla pro výpočet neurčitých integrálů:

- $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad a \in \mathbb{R}$
- $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C, \quad f(x) \neq 0$
- metoda per partes:

$$\int u'(x) v(x) dx = u(x) v(x) - \int u(x) v'(x) dx$$

- substituční metoda:

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{array} \right| = \int f(t) dt$$

Příklad 3.1.1. *Vypočtěte integrály:*

$$\text{a) } \int \frac{6}{x^3} dx \quad \text{b) } \int (7 \cos x - e^x) dx \quad \text{c) } \int \frac{5}{x^2 + 4} dx \quad \text{d) } \int \frac{10x}{x^2 + 4} dx$$

$$\text{Řešení: a) } \int \frac{6 dx}{x^3} = 6 \int x^{-3} dx = \frac{6x^{-2}}{-2} + C = \underline{\underline{-\frac{3}{x^2} + C}}$$

$$\text{b) } \int (7 \cos x - e^x) dx = 7 \int \cos x dx - \int e^x dx = \underline{\underline{7 \sin x - e^x + C}}$$

$$\text{c) } \int \frac{5}{x^2 + 4} dx = 5 \int \frac{1}{x^2 + 2^2} dx = \underline{\underline{\frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C}}$$

$$\text{d) } \int \frac{10x}{x^2 + 4} dx = 5 \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx = 5 \int \frac{(x^2 + 4)'}{x^2 + 4} dx = \underline{\underline{5 \ln(x^2 + 4) + C}}$$

Vzorce pro integraci elementárních funkcí

Vzorec pro neurčitý integrál	Podmínky platnosti vzorce
$\int 0 \, dx = c \quad (c \in \mathbb{R})$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\int 1 \, dx = x + c$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$x \in (-\infty, \infty), \quad n \in \mathbb{N}$
$\int x^r \, dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c$	$x \in (0, \infty), \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + c$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$\int e^x \, dx = e^x + c$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$x \in (-\infty, \infty), \quad a > 0, \quad a \neq 1$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\int \cos x \, dx = \sin x + c$	$x \in (-\infty, \infty)$
$\int \frac{1}{(\cos x)^2} \, dx = \operatorname{tg} x + c$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}$
$\int \frac{1}{(\sin x)^2} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c$	$x \neq k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$
$\int \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$	$x \in (-\infty, \infty), \quad a > 0$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + c$	$x \in (-a, a), \quad a > 0$

Příklad 3.1.2. *Vypočtěte integrály:*

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} \quad \text{b) } \int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx \quad \text{c) } \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{d) } \int \frac{3+5x}{x^2+9} dx$$

Řešení: a) Funkci, kterou chceme integrovat, nejdříve upravíme. Využijeme vztah $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \underline{\underline{\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C}}. \end{aligned}$$

b) Využijeme vztahy $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ a $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx &= \int \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2 \sin x \cos x} dx = \int \frac{\sin x}{2 \sin x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{2 \cos^2 x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} \operatorname{tg} x + C}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Upravíme: } \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{x}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \sqrt{x} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \\ &= \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C = \underline{\underline{\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + C}}. \end{aligned}$$

d) Upravíme na dva zlomky a každý zlomek integrujeme zvlášť:

$$\begin{aligned} \int \frac{3+5x}{x^2+9} dx &= \int \frac{3}{x^2+9} dx + \int \frac{5x}{x^2+9} dx = 3 \int \frac{1}{x^2+3^2} dx + \frac{5}{2} \int \frac{2x}{x^2+9} dx \\ &= 3 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + \frac{5}{2} \ln|x^2+9| + C = \underline{\underline{\operatorname{arctg} \frac{x}{3} + \frac{5}{2} \ln(x^2+9) + C}}. \end{aligned}$$

Příklad 3.1.3. *Metodou per partes vypočtěte $\int f(x) dx$ funkce*

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = (6x-3)e^x & \text{b) } f(x) = x \cos x & \text{c) } f(x) = x^2 \ln x \\ \text{d) } f(x) = \ln x & \text{e) } f(x) = \operatorname{arctg} x & \text{f) } f(x) = \ln(x^2+1) \\ \text{g) } f(x) = (x^2+1)e^x & \text{h) } f(x) = (3x^2-4) \sin x & \text{j) } f(x) = (x^2-4x+2) \cos x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Řešení: a) } \int (6x-3)e^x dx &= \left| \begin{array}{ll} u' = e^x & u = e^x \\ v = 6x-3 & v' = 6 \end{array} \right| = \\ &= (6x-3)e^x - \int 6e^x dx = (6x-3)e^x - 6e^x + C = \underline{\underline{(6x-9)e^x + C}}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x & u = \sin x \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = x \sin x - \int \sin x \, dx =$$

$$= \underline{\underline{x \sin x + \cos x + C.}}$$

$$\text{c) } \int x^2 \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = x^2 & u = \frac{x^3}{3} \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = \dots = \underline{\underline{\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.}}$$

$$\text{d) } \int \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = \underline{\underline{x \ln x - x + C.}}$$

$$\text{e) } \int \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = \operatorname{arctg} x & v' = \frac{1}{x^2+1} \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int x \frac{1}{x^2+1} \, dx =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \, dx = \underline{\underline{x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C.}}$$

$$\text{f) } \int \ln(x^2+1) \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = \ln(x^2+1) & v' = \frac{2x}{x^2+1} \end{array} \right| = x \ln(x^2+1) - \int x \frac{2x}{x^2+1} \, dx =$$

$$= x \ln(x^2+1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx = x \ln(x^2+1) - 2 \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} \, dx =$$

$$= x \ln(x^2+1) - 2 \int 1 \, dx + 2 \int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \underline{\underline{x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C.}}$$

$$\text{g) } \int (x^2+1) e^x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = e^x & u = e^x \\ v = x^2+1 & v' = 2x \end{array} \right| = (x^2+1) e^x - \int 2x e^x \, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u' = e^x & u = e^x \\ v = 2x & v' = 2 \end{array} \right| = (x^2+1) e^x - \left(2x e^x - \int 2 e^x \, dx \right) =$$

$$= (x^2+1) e^x - 2x e^x + 2 e^x = \underline{\underline{e^x (x^2 - 2x + 3) + C.}}$$

$$\text{h) } \int (3x^2 - 4) \sin x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = \sin x & u = -\cos x \\ v = 3x^2 - 4 & v' = 6x \end{array} \right| =$$

$$= -(3x^2 - 4) \cos x + \int 6x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x & u = \sin x \\ v = 6x & v' = 6 \end{array} \right| =$$

$$= -(3x^2 - 4) \cos x + 6x \sin x - \int 6 \sin x \, dx = \underline{\underline{6x \sin x + (10 - 3x^2) \cos x + C.}}$$

$$\text{j) } \int (x^2 - 4x + 2) \cos x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = \cos x & u = \sin x \\ v = x^2 - 4x + 2 & v' = 2x - 4 \end{array} \right| =$$

$$= (x^2 - 4x + 2) \sin x - \int (2x - 4) \sin x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u' = \sin x & u = -\cos x \\ v = 2x - 4 & v' = 2 \end{array} \right| =$$

$$(x^2 - 4x + 2) \sin x + (2x - 4) \cos x - \int 2 \cos x \, dx = \underline{\underline{(x^2 - 4x) \sin x + (2x - 4) \cos x + C.}}$$

Příklad 3.1.4. Použijte substituční metodu na výpočet $\int f(x) dx$, kde

a) $f(x) = e^{2x}$ b) $f(x) = \sin(5 - 3x)$ c) $f(x) = 4\sqrt{2x + 3}$

d) $f(x) = 2x e^{x^2+4}$ e) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x + 9}$ f) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}$

g) $f(x) = e^x \sin e^x$ h) $f(x) = \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)}$ j) $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 - \sin^2 2x}}$

Řešení: a) $\int e^{2x} dx = \left| \begin{array}{l} 2x = t \\ 2 dx = dt \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int e^t \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} e^t + C = \underline{\underline{\frac{1}{2} e^{2x} + C}}$.

b) $\int \sin(5 - 3x) dx = \left| \begin{array}{l} 5 - 3x = t \\ -3 dx = dt \\ dx = -\frac{1}{3} dt \end{array} \right| = \int \sin t \left(-\frac{1}{3} dt \right) = \frac{1}{3} \cos t + C =$
 $= \underline{\underline{\frac{1}{3} \cos(5 - 3x) + C}}$.

c) $\int 4\sqrt{2x + 3} dx = \left| \begin{array}{l} 2x + 3 = t \\ 2 dx = dt \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \int 4\sqrt{t} \frac{1}{2} dt = 2 \int t^{\frac{1}{2}} dt = 2 \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} =$
 $= \frac{4}{3} \sqrt{t^3} + C = \underline{\underline{\frac{4}{3} \sqrt{(2x + 3)^3} + C}}$.

d) $\int 2x e^{x^2+4} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 + 4 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = \underline{\underline{e^{x^2+4} + C}}$.

e) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + 9} dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{-1}{t^2 + 9} dt = - \int \frac{1}{t^2 + 3^2} dt =$
 $= -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \underline{\underline{-\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{3} + C}}$.

f) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right| = \int \sqrt[3]{t} dt = \frac{3}{4} \sqrt[3]{t^4} + C = \underline{\underline{\frac{3}{4} \sqrt[3]{\ln^4 x} + C}}$.

g) $\int e^x \sin e^x dx = \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right| = \int \sin t dt = -\cos t + C = \underline{\underline{-\cos e^x + C}}$.

h) $\int \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{1 + t^2} dt = \operatorname{arctg} t + C = \underline{\underline{\operatorname{arctg} \ln x + C}}$.

$$j) \int \frac{\cos 2x}{\sqrt{1 - \sin^2 2x}} dx = \left| \begin{array}{l} \sin 2x = t \\ 2 \cos 2x dx = dt \\ \cos 2x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \underline{\underline{\frac{1}{2} \arcsin(\sin 2x) + C}}$$

Příklad 3.1.5. Vypočtěte integrál $\int 6x^2 \arcsin x^3 dx$.

$$\begin{aligned} \text{Řešení: } \int 6x^2 \arcsin x^3 dx &= \left| \begin{array}{l} x^3 = t \\ 3x^2 dx = dt \\ 6x^2 dx = 2 dt \end{array} \right| = \int 2 \arcsin t dt = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u' = 2 & u = 2t \\ v = \arcsin t & v' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \end{array} \right| = 2t \arcsin t - \int \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} 1-t^2 = s \\ -2t dt = ds \\ 2t dt = -dt \end{array} \right| = 2t \arcsin t + \int \frac{1}{\sqrt{s}} ds = 2t \arcsin t + \frac{s^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \\ &= 2t \arcsin t + 2\sqrt{1-t^2} + C = \underline{\underline{2(x^3 \arcsin x^3 + \sqrt{1-x^6}) + C}} \end{aligned}$$

Příklad 3.1.6. Vypočítejte následující integrály:

$$\begin{array}{lll} a) \int \frac{1}{x \ln x} dx & b) \int x \ln x dx & c) \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \\ d) \int (\sin^5 x) \cos x dx & e) \int \operatorname{tg}^2 x dx & f) \int \frac{\sin x}{36 + 4 \cos^2 x} dx \\ g) \int \left(e^x - \frac{1}{e^x}\right)^2 dx & h) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx & j) \int (x+3)^2 e^x dx \\ k) \int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt[3]{x}} dx & l) \int \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx & m) \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx \end{array}$$

$$\text{Řešení: } a) \ln(\ln x) + C; \quad b) \frac{x^2}{2}(\ln x - \frac{1}{2}) + C; \quad c) \frac{2}{3} \sqrt{\ln^3 x} + C;$$

$$d) \frac{\sin^6 x}{6} + C; \quad e) \operatorname{tg} x - x + C; \quad f) -\frac{1}{12} \operatorname{arctg} \frac{\cos x}{3} + C;$$

$$g) \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} - 2x + C; \quad h) 2e^{\sqrt{x}} + C; \quad j) (x^2 + 4x + 5)e^x + C;$$

$$k) \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + \frac{12}{7} \sqrt[6]{x^7} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C; \quad l) \frac{x+1}{3} \sqrt{2x-1} + C; \quad m) \frac{1}{2} \arcsin 2x + C.$$

3.2 Integrovaní racionální lomené funkce

Racionální lomená funkce — funkce tvaru $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$,

kde $n, m \in \mathbb{N}$.

Ryze racionální lomená funkce — racionální lomená funkce, kde $n < m$.

Parciální zlomky — zlomky typu $\frac{A}{x-a}$, $\frac{A}{(x-a)^n}$, $A, a \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$

nebo $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$, kde x^2+px+q je nerozložitelný kvadratický polynom, čísla $M, N, p, q \in \mathbb{R}$ a n je přirozené číslo.

Rozklad na parciální zlomky — rozklad ryze racionální lomené funkce na součet parciálních zlomků.

Poznámka. Integrál z ryze racionální lomené funkce počítáme tak, že racionální lomenou funkci nejdříve rozložíme na parciální zlomky a ty postupně integrujeme.

Příklad 3.2.1. Rozložte funkci $f(x)$ na součet polynomu a ryze racionální lomené funkce:

$$\text{a) } f(x) = \frac{3x^3 + x}{x^2 + 3x + 5} \quad \text{b) } f(x) = \frac{5x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 2} \quad \text{c) } f(x) = \frac{4x^3 + x + 1}{2x + 1}$$

Řešení: a) Vypočítáme $(3x^3 + x) : (x^2 + 3x + 5) = 3x - 9$ zbytek $13x + 45$.

$$\text{Potom } f(x) = \frac{3x^3 + x}{x^2 + 3x + 5} = \underline{\underline{3x - 9 + \frac{13x + 45}{x^2 + 3x + 5}}}.$$

$$\text{b) } (5x^2 - 2x) : (x^2 - 4x + 2) = 5 \text{ zbytek } 18x - 10. \text{ Potom } f(x) = \underline{\underline{5 + \frac{18x - 10}{x^2 - 4x + 2}}}.$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{4x^3 + x + 1}{2x + 1} = \underline{\underline{2x^2 - x + 1}}.$$

Příklad 3.2.2. Rozložte ryze racionální lomené funkce na parciální zlomky:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 3x + 2} \quad \text{b) } f(x) = \frac{8}{x^2 + 2x - 3} \quad \text{c) } f(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} \quad \text{e) } f(x) = \frac{4x^3 - 4x^2 + x + 1}{x^2(x - 1)^2} \quad \text{f) } f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^3}$$

$$\text{g) } f(x) = \frac{x + 1}{(x - 2)(x^2 + 1)} \quad \text{h) } f(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^3 + 4x^2 + 2x} \quad \text{j) } f(x) = \frac{4x - 3}{x^2(x^2 + 4)}$$

Řešení: a) Rozložíme jmenovatel na součin $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$. Dostali jsme dva činitele, ke každému z nich přiřadíme jeden parciální zlomek.

$$f(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 3x + 2} = \frac{x + 3}{(x + 2)(x + 1)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 1}$$

Teď zbývá vypočítat konstanty A a B. Upravujeme rovnici tak, že nejdřív se zbavíme zlomku, potom roznásobíme a sečteme pravou stranu.

$$\begin{aligned} \frac{x + 3}{(x + 2)(x + 1)} &= \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 1} \quad / \cdot (x + 2)(x + 1) \\ x + 3 &= A(x + 1) + B(x + 2) \\ x + 3 &= Ax + A + Bx + 2B \end{aligned}$$

Dostali jsme rovnici typu polynom se rovná polynomu. Porovnáme koeficienty u stejných mocnin na obou stranách rovnice.

$$\begin{aligned} x^1: \quad 1 &= A + B \\ x^0: \quad 3 &= A + 2B \end{aligned} \Rightarrow A = 1 - B \Rightarrow 3 = 1 - B + 2B \Rightarrow A = -1, B = 2$$

$$f(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 3x + 2} = \underline{\underline{-\frac{1}{x + 2} + \frac{2}{x + 1}}}$$

$$\text{b) } \frac{8}{x^2 + 2x - 3} = \frac{2}{x - 1} - \frac{2}{x + 3}; \quad \text{c) } \frac{2x}{x^2 - 4} = \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{x + 2}$$

d) Jmenovatel $x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2 = x(x + 1)(x + 1)$. Máme tři činitele, přitom dvakrát stejný dvoječlen $x + 1$. Musíme v rozkladu mít 3 různé parciální zlomky, tzn. pro dva stejné činitele dva různé zlomky.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{x^2 - 3x - 1}{x(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$

Dále spočítáme koeficienty stejně jako v části a). Dostaneme

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} = \underline{\underline{-\frac{1}{x} + \frac{2}{x + 1} - \frac{3}{(x + 1)^2}}}$$

$$\text{e) } \frac{4x^3 - 4x^2 + x + 1}{x^2(x - 1)^2} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)^2};$$

$$\text{f) } \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^3} = \frac{2}{x + 1} - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}$$

g) Jmenovatel $(x-2)(x^2+1)$ se už nedá dál rozložit v reálném oboru. Máme dva činitele, a tak dva parciální zlomky. Výraz x^2+1 je nerozložitelný kvadratický polynom. Proto

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Dále spočítáme koeficienty stejně jako v části a). Dostaneme

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{\frac{3}{5}}{x-2} + \frac{-\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}}{x^2+1}.$$

$$\text{h) } \frac{2x^2-4}{x^3+4x^2+2x} = -\frac{2}{x} + \frac{4x+8}{x^2+4x+2}; \quad \text{j) } \frac{4x-3}{x^2(x^2+4)} = \frac{1}{x} - \frac{\frac{3}{4}}{x^2} + \frac{-x+\frac{3}{4}}{x^2+4}.$$

Příklad 3.2.3. *Integrujte parciální zlomky:*

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{3}{x+2} dx & \text{b) } \int \frac{8}{2x-3} dx & \text{c) } \int \frac{2}{1-x} dx \\ \text{d) } \int \frac{\frac{1}{3}}{x+\sqrt{2}} dx & \text{e) } \int \frac{4}{(x-1)^2} dx & \text{f) } \int \frac{3}{(x+4)^4} dx \end{array}$$

$$\text{Řešení: a) } \int \frac{3}{x+2} dx = 3 \int \frac{1}{x+2} dx = 3 \int \frac{(x+2)'}{x+2} dx = \underline{\underline{3 \ln|x+2| + C.}}$$

$$\text{b) } \int \frac{8}{2x-3} dx = 4 \int \frac{2}{2x-3} dx = 4 \int \frac{(2x-3)'}{2x-3} dx = \underline{\underline{4 \ln|2x-3| + C.}}$$

$$\text{c) } \int \frac{2}{1-x} dx = -2 \int \frac{-1}{1-x} dx = \underline{\underline{-2 \ln|1-x| + C.}}$$

$$\text{d) } \int \frac{\frac{1}{3}}{x+\sqrt{2}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+\sqrt{2}} dx = \underline{\underline{\frac{1}{3} \ln|x+\sqrt{2}| + C.}}$$

$$\text{e) } \int \frac{4}{(x-1)^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = x-1 \\ dt = dx \end{array} \right| = 4 \int t^{-2} dt = -\frac{4}{t} = \underline{\underline{-\frac{4}{x-1} + C.}}$$

$$\text{f) } \int \frac{3}{(x+4)^4} dx = \left| \begin{array}{l} t = x+4 \\ dt = dx \end{array} \right| = 3 \int t^{-4} dt = -\frac{3}{3t^3} = \underline{\underline{-\frac{1}{(x+4)^3} + C.}}$$

Příklad 3.2.4. *Integrujte parciální zlomky:*

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int \frac{6x+3}{x^2+x+7} dx & \text{b) } \int \frac{6}{x^2-4x+8} dx & \text{c) } \int \frac{x}{x^2+4x+5} dx \\ \text{d) } \int \frac{4x-3}{x^2+6x+10} dx & \text{e) } \int \frac{4-x}{x^2+2x+5} dx & \text{f) } \int \frac{3}{x^2-3x+3} dx \end{array}$$

Řešení: Všechny parciální zlomky v tomto příkladě jsou typu $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$, kde $x^2 + px + q$ je nerozložitelný kvadratický polynom.

Pokud je $M \neq 0$ (čitatel zlomku obsahuje x), nejdříve upravíme zlomek tak, aby v čitateli byla derivace jmenovatele a použijeme na výpočet tohoto integrálu vzorec $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln |f(x)| + C$. Zbýlý integrál je typu $\frac{N}{x^2 + px + q}$.

Ve jmenovateli tohoto integrálu kvadratický člen doplníme na úplný čtverec a substitucí převedem integrál na vzorec $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$, nebo

$$\text{rovnou použijeme vzorec } \int \frac{1}{(x+b)^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x+b}{a} + C.$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{6x+3}{x^2+x+7} dx &= 3 \int \frac{2x+1}{x^2+x+7} dx = 3 \int \frac{(x^2+x+7)'}{x^2+x+7} dx = \\ &= \underline{\underline{3 \ln |x^2+x+7| + C.}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{6}{x^2-4x+8} dx &= 6 \int \frac{1}{x^2-4x+4+4} dx = 6 \int \frac{1}{(x-2)^2+4} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} t = x-2 \\ dt = dx \end{array} \right| = 6 \int \frac{1}{t^2+4} dx = \frac{6}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \underline{\underline{3 \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + C.}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \frac{x}{x^2+4x+5} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+4-4}{x^2+4x+5} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx + \frac{1}{2} \int \frac{-4}{x^2+4x+5} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2+4x+5| - \\ &- 2 \int \frac{1}{x^2+4x+4+1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2+4x+5| - 2 \int \frac{1}{(x+2)^2+1} dx = \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2} \ln |x^2+4x+5| - 2 \operatorname{arctg}(x+2) + C.}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int \frac{4x-3}{x^2+6x+10} dx &= 2 \int \frac{2x-\frac{3}{2}}{x^2+6x+10} dx = 2 \int \frac{2x+6-6-\frac{3}{2}}{x^2+6x+10} dx = \\ &= 2 \int \frac{2x+6-\frac{15}{2}}{x^2+6x+10} dx = 2 \int \frac{2x+6}{x^2+6x+10} dx + 2 \int \frac{-\frac{15}{2}}{x^2+6x+10} dx = \\ &= 2 \ln |x^2+6x+10| - 15 \int \frac{1}{x^2+6x+10} dx = 2 \ln |x^2+6x+10| - \\ &- 15 \int \frac{1}{(x+3)^2+1} dx = \underline{\underline{2 \ln |x^2+6x+10| - 15 \operatorname{arctg}(x+3) + C.}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \int \frac{4-x}{x^2+2x+5} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{2x-8}{x^2+2x+5} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{2x+2-10}{x^2+2x+5} dx = \\
 &= -\frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx + 5 \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx = -\frac{1}{2} \ln|x^2+2x+5| + \\
 &+ 5 \int \frac{1}{(x+1)^2+4} dx = \underline{\underline{-\frac{1}{2} \ln|x^2+2x+5| + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C.}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \int \frac{3}{x^2-3x+3} dx &= \int \frac{3}{x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+3} dx = \int \frac{3}{(x-\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}} dx = \\
 &= \underline{\underline{2\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-3}{\sqrt{3}} + C.}}
 \end{aligned}$$

Příklad 3.2.5. Vypočtěte integrály z racionální lomené funkce:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \int \frac{4x-3}{x^2+x-6} dx & \text{b) } \int \frac{13x^2}{(x^2+4)(x-3)} dx & \text{c) } \int \frac{x-10}{x^3-4x^2+5x} dx \\
 \text{d) } \int \frac{4x-9}{x^3+6x^2+9x} dx & \text{e) } \int \frac{4-3x}{x^5+x^3} dx & \text{f) } \int \frac{x^3+5}{x^2-3x+2} dx
 \end{array}$$

$$\text{Řešení: a) } \int \frac{4x-3}{x^2+x-6} dx = \int \frac{1}{x-2} + \frac{3}{x+3} dx = \ln|x-2| + 3 \ln|x+3| + C;$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int \frac{13x^2}{(x^2+4)(x-3)} dx &= \int \frac{9}{x-3} + \frac{4x+12}{x^2+4} dx = 9 \int \frac{1}{x-3} dx + 2 \int \frac{2x}{x^2+4} dx + \\
 &+ 12 \int \frac{1}{x^2+4} dx = 9 \ln|x-3| + 2 \ln|x^2+4| + 6 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \int \frac{x-10}{x^3-4x^2+5x} dx &= \int \frac{4x-7}{x^2-4x+5} - \frac{2}{x} dx = 2 \int \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx + \\
 &+ \int \frac{1}{x^2-4x+5} dx - 2 \ln|x| = 2 \ln|x^2-4x+5| - 2 \ln|x| + \operatorname{arctg}(x-2) + C;
 \end{aligned}$$

$$\text{d) } \int \frac{4x-9}{x^3+6x^2+9x} dx = \int \frac{1}{x+3} + \frac{7}{(x+3)^2} - \frac{1}{x} dx = \ln \left| \frac{x+3}{x} \right| - \frac{7}{x+3} + C;$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \int \frac{4-3x}{x^5+x^3} dx &= \int \frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} + \frac{4x+3}{x^2+1} dx = -\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 4 \ln|x| + 2 \ln(x^2+4) + \\
 &+ 3 \operatorname{arctg} x + C;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \int \frac{x^3+5}{x^2-3x+2} dx &= \int x+3 + \frac{13}{x-2} - \frac{6}{x-1} dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 13 \ln|x-2| - \\
 &- 6 \ln|x-1| + C.
 \end{aligned}$$

3.3 Určitý integrál

Newton – Leibnitzův vzorec — nechť $F'(x) = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Per partes pro určitý integrál — $\int_a^b u'(x)v(x) dx = \left[u(x)v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$.

Substituce pro určitý integrál — $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt$ kde $t = \varphi(x)$.

Linearita určitého integrálu — funkce f, g spojité na $\langle a, b \rangle$ a $M, N \in \mathbb{R}$, potom

$$\int_a^b (Mf(x) + Ng(x)) dx = M \int_a^b f(x) dx + N \int_a^b g(x) dx.$$

Aditivnost určitého integrálu — funkce f spojitá na $\langle a, b \rangle$ a $c \in (a, b)$, pak

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Příklad 3.3.1. *Užitím Newton – Leibnitzova vzorce vypočtete:*

$$\text{a) } \int_0^1 (2x - x^2) dx \quad \text{b) } \int_0^\pi \sin x dx \quad \text{c) } \int_0^{2\pi} \sin x dx \quad \text{d) } \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos x dx$$

Řešení: a) Nejdřív spočítáme primitivní funkci k funkci $f(x) = (2x - x^2)$.

$F(x) = \int (2x - x^2) dx = x^2 - \frac{x^3}{3} + C$. Podle Newton – Leibnitzova vzorce

$$\int_0^1 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} + C \right]_0^1 = \left(1 - \frac{1}{3} + C \right) - C = \frac{2}{3} + C - C = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$

Vidíme, že integrační konstantu C při výpočtu určitého integrálu v bodě b přičteme a v bodě a zase odečteme, proto ji nemusíme psát.

$$\text{b) } \int_0^\pi \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = \underline{\underline{2}}.$$

$$\text{c) } \int_0^{2\pi} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = -1 + 1 = \underline{\underline{0}}.$$

$$\text{d) } \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos x dx = \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi = \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} = 0 - 1 = \underline{\underline{-1}}.$$

Příklad 3.3.2. Vypočtete integrál $\int_{-1}^3 |x - 1| dx$.

Řešení: Pro funkci, kterou chceme integrovat platí: $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{pro } x \in \langle 1, \infty \rangle, \\ 1 - x, & \text{pro } x \in (-\infty, 1). \end{cases}$

Využijeme aditivnost určitého integrálu:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 |x - 1| dx &= \int_{-1}^1 |x - 1| dx + \int_1^3 |x - 1| dx = \\ &= \int_{-1}^1 (1 - x) dx + \int_1^3 (x - 1) dx = \left[x - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^3 = \underline{\underline{4}}. \end{aligned}$$

Příklad 3.3.3. Užítím Newton - Leibnitzova vzorce vypočtete určité integrály:

$$\text{a) } \int_1^4 (3x - 11) dx \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{1}{2x - 3} dx \quad \text{c) } \int_0^3 |1 - 3x| dx \quad \text{d) } \int_{-1}^1 e^x dx$$

$$\text{Řešení: a) } -\frac{21}{2}; \quad \text{b) } -\frac{1}{2} \ln 3; \quad \text{c) } \frac{65}{6}; \quad \text{d) } e - \frac{1}{e}.$$

Příklad 3.3.4. Metodou per partes vypočtete integrály:

$$\text{a) } \int_0^1 (3x - 2) e^x dx \quad \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \quad \text{c) } \int_1^e x \ln x dx \quad \text{d) } \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$$

$$\begin{aligned} \text{Řešení: a) } \int_0^1 (3x - 2) e^x dx &= \left[(3x - 2) e^x \right]_0^1 - \int_0^1 3e^x dx = \\ &= (e - (-2)) - \left[3e^x \right]_0^1 = e + 2 - (3e - 3) = \underline{\underline{5 - 2e}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx &= \left[-x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) dx = \left(-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + 0 \right) + \\ &+ \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = \underline{\underline{1}}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \left(\frac{e^2}{2} \ln e - 0 \right) - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \underline{\underline{\frac{1 - e^2}{4}}}.$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx &= \left[x \operatorname{arctg} x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} dx = \operatorname{arctg} 1 - \left[\frac{1}{2} \ln |1 + x^2| \right]_0^1 = \\ &= \frac{\pi}{4} - \left(\frac{1}{2} \ln 2 - 0 \right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

Příklad 3.3.5. Použijte substituční metodu na výpočet následujících integrálů:

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin x} \cos x \, dx \quad \text{b) } \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx \quad \text{c) } \int_0^1 \frac{x}{(2x^2 + 1)^3} \, dx$$

$$\begin{aligned} \text{Řešení: a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \sin x} \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{l} 1 + \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 2 \end{array} \right| = \int_1^2 \sqrt{t} \, dt = \\ &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \underline{\underline{\frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)}}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \\ dx = -\frac{1}{3} dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \pi \Rightarrow t = 0 \end{array} \right| = \left[t \right]_0^0 = \underline{\underline{0}}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_0^1 \frac{x}{(2x^2 + 1)^3} \, dx &= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{4x}{(2x^2 + 1)^3} \, dx = \left| \begin{array}{l} 2x^2 + 1 = t \\ 4x \, dx = dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = 3 \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int_1^3 t^{-3} \, dt = \\ &= -\frac{1}{8} \left[t^{-2} \right]_1^3 = -\frac{1}{8} \left(\frac{1}{9} - 1 \right) = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}. \end{aligned}$$

Příklad 3.3.6. Vypočítejte $\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$.

Řešení: Použijeme vzorec $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$. Dosadíme do integrálu.

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left[x \right]_0^{\pi} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$$

Příklad 3.3.7. Vypočítejte určité integrály:

$$\text{a) } \int_0^2 (1 + x^3)^2 \, dx \quad \text{b) } \int_0^2 (1 + x^3)^2 x^2 \, dx \quad \text{c) } \int_0^2 \ln(1 + x) \, dx$$

$$\text{Řešení: a) } \frac{198}{7}; \quad \text{b) } \frac{728}{9}; \quad \text{c) } 2 \ln 2 - 1.$$

3.4 Nevlastní integrál

Nevlastní integrál 1. typu — $\int_a^\infty f(x) dx$, $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ nebo $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$.

Nevlastní integrál 2. typu — integrál $\int_a^b f(x) dx$ z neomezené funkce na (a, b) .

Výpočet nevlastního integrálu — Nechť je f integrovatelná na intervalu $\langle a, t \rangle$ pro

1.) každé $t > a$ a existuje limita $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx = I$.

Potom nevlastní integrál se rovná této limitě: $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$.

2.) každé $a < t < b$, funkce $f(x)$ neohraničená v okolí bodu b a existuje limita

$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx = I$. Potom nevlastní integrál z neohraničené funkce se rovná této

limitě: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$.

Nevlastní integrál je konvergentní — pokud limita I je konečné číslo.

Nevlastní integrál je divergentní — pokud limita I v definici nevlastního integrálu se rovná plus nebo minus nekonečno, nebo když tato limita neexistuje.

Poznámka. Podobně můžeme definovat nevlastní integrál typu $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ nebo $\int_a^\infty f(x) dx$, kde funkce $f(x)$ neohraničená v okolí bodu a .

Příklad 3.4.1. Vypočítejte následující nevlastní integrály:

$$\text{a) } \int_1^\infty \frac{1}{x} dx \quad \text{b) } \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \quad \text{c) } \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 9} dx \quad \text{d) } \int_2^\infty \frac{1}{x \ln^2 x} dx \quad \text{e) } \int_0^\infty x e^{-x} dx$$

Řešení: a) $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\ln x \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (\ln t - 0) = \infty \Rightarrow$
integrál diverguje.

$$\text{b) } \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{t} + 1 \right) = \underline{\underline{1}}.$$

$$\text{c) } \int_0^\infty \frac{1}{x^2 + 9} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{x^2 + 9} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \arctg \frac{t}{3} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}.$$

$$\text{d) } \int_2^\infty \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_2^t \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = u \\ \frac{1}{x} dx = du \\ x = 2 \Rightarrow u = \ln 2 \\ x = t \Rightarrow u = \ln t \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\ln 2}^{\ln t} \frac{1}{u^2} du = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{u} \right]_{\ln 2}^{\ln t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln t} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{\ln 2}}}. \\
 \text{e) } &\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x e^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} u' = e^{-x} \quad u = -e^{-x} \\ v = x \quad v' = 1 \end{array} \right| = \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-e^{-x}(x+1) \right]_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-e^{-t}(t+1) + 1 \right) = 1 - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t+1}{e^t} = \underline{\underline{1}}.
 \end{aligned}$$

Příklad 3.4.2. Vypočítejte nevlastní integrály:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{-4} \frac{1}{x^3} dx \quad \text{b) } \int_{-\infty}^4 \frac{1}{x^2 + 16} dx \quad \text{c) } \int_{-\infty}^0 e^{6x} dx$$

$$\begin{aligned}
 \text{Řešení: a) } &\int_{-\infty}^{-4} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{-4} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right]_t^{-4} = \\
 &= -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x^2} \right]_t^{-4} = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{t^2} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{32}}}. \\
 \text{b) } &\int_{-\infty}^4 \frac{1}{x^2 + 16} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^4 \frac{1}{x^2 + 16} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{4} \arctg \frac{x}{4} \right]_t^4 = \\
 &= \frac{1}{4} \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\arctg 1 - \arctg \frac{t}{4} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{3}{16} \pi}}. \\
 \text{c) } &\int_{-\infty}^0 e^{6x} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 e^{6x} dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{6} e^{6x} \right]_t^0 = \frac{1}{6} \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 - e^{6t} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}.
 \end{aligned}$$

Příklad 3.4.3. Vypočítejte nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$.

Řešení: Vybereme si libovolný bod, například nulu, a interval $(-\infty, \infty)$ bodem 0 rozdělíme na dva intervaly a tak i integrál na dva nevlastní integrály:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 1} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \\
 &\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{1}{x^2 + 1} dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{x^2 + 1} dx = \\
 &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left[\arctg x \right]_t^0 + \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\arctg x \right]_0^t = \\
 &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(0 - \arctg t \right) + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\arctg t - 0 \right) = - \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi}}.
 \end{aligned}$$

Příklad 3.4.4. Vypočítejte následující integrály z neomezené funkce:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{1}{x} dx \quad \text{b) } \int_{-1}^0 \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx \quad \text{c) } \int_0^1 x \ln x dx \quad \text{d) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} dx \quad \text{e) } \int_1^3 \frac{1}{x-2} dx$$

Řešení: a) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je neohraničená v okolí nuly, proto počítáme:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} [\ln x]_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} (0 - \ln t) = \infty \Rightarrow \underline{\underline{\text{diverguje.}}}$$

b) Funkce $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ je neohraničená v okolí nuly. Proto:

$$\int_{-1}^0 \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t 2x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^-} [3x^{\frac{2}{3}}]_{-1}^t = \lim_{t \rightarrow 0^-} (3\sqrt[3]{t^2} - 3) = \underline{\underline{-3.}}$$

c) Funkce $f(x) = x \ln x$ je neohraničená v okolí nuly. Integrál počítáme metodou per partes.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \ln x dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x \ln x dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_t^1 - \int_t^1 \frac{x}{2} dx \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} \ln 1 - \frac{t^2}{2} \ln t - \left[\frac{x^2}{4} \right]_t^1 \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{1}{4} + \frac{t^2}{4} \right) = \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} t^2 \ln t = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln t}{t^{-2}} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-2t^{-3}} = \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{2}{t^3}} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{t^2}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot 0 = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}. \end{aligned}$$

d) Víme, že $\cos 0 = 1$. Proto funkce $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ je neohraničená v okolí nuly. Integrál počítáme substituční metodou.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} dx = \left| \begin{array}{l} 1 - \cos x = u \\ \sin x dx = du \\ x = t \Rightarrow u = 1 - \cos t \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1 \end{array} \right| = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{1-\cos t}^1 \frac{1}{\sqrt{u}} du = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{1-\cos t}^1 u^{-\frac{1}{2}} du = \lim_{t \rightarrow 0^+} [2\sqrt{u}]_{1-\cos t}^1 = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{1-\cos t}) = \underline{\underline{2}}. \end{aligned}$$

e) Funkce $f(x) = \frac{1}{x-2}$ je neohraničená v okolí bodu $x = 2$, který leží v intervalu $(1, 3)$. Integrál proto musíme rozdělit na dva nevlastní integrály.

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{1}{x-2} dx &= \int_1^2 \frac{1}{x-2} dx + \int_2^3 \frac{1}{x-2} dx = \\
&= \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_1^t \frac{1}{x-2} dx + \lim_{t \rightarrow 2^+} \int_t^3 \frac{1}{x-2} dx = \\
&= \lim_{t \rightarrow 2^-} \left[\ln |x-2| \right]_1^t + \lim_{t \rightarrow 2^+} \left[\ln |x-2| \right]_t^3 = \\
&= \lim_{t \rightarrow 2^-} \left(\ln |t-2| - \ln 1 \right) + \lim_{t \rightarrow 2^+} \left(\ln 1 - \ln |t-2| \right) = \\
&= \lim_{t \rightarrow 2^-} \ln |t-2| + \lim_{t \rightarrow 2^+} \left(-\ln |t-2| \right)
\end{aligned}$$

Obě limity jsou nevlástní, a proto integrál diverguje.

Příklad 3.4.5. Vypočítejte následující nevlástní integrály:

$$\text{a) } \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{b) } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{c) } \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+4} dx \quad \text{d) } \int_{-\infty}^0 x e^{2x} dx \quad \text{e) } \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$$

Řešení: a) diverguje; b) 2; c) $\frac{\pi}{4}$; d) $-\frac{1}{4}$; e) diverguje.

Příklad 3.4.6. Proud v elektrickém obvodu je dán vztahem $i(t) = t e^{-4t}$. Určete celkový

$$\text{náboj } Q = \int_0^\infty i(t) dt.$$

Řešení: $Q = \frac{1}{16}$.

4 Řady

4.1 Nekonečná geometrická řada

Nekonečná posloupnost — funkce, jejímž definičním oborem je množina přirozených čísel \mathbb{N} .

Nekonečná řada — součet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je nekonečná posloupnost.

Konvergentní řada — řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S \in \mathbb{R}$.

Jinými slovy součet konvergentní řady je konečný. Píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Divergentní řada — řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pro kterou součet $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$ neexistuje nebo je nekonečný.

Geometrická posloupnost — posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taková, že $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, pro každé $n \in \mathbb{N}$ a reálné číslo $q \neq 0$, které se nazývá kvocient geometrické posloupnosti. V geometrické posloupnosti platí, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Součet prvních n členů geometrické posloupnosti — a) pro $q = 1$ je $S_n = n \cdot a_1$.

b) pro $q \neq 1$ je $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Geometrická řada — řada vytvořená z geometrické posloupnosti, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$.

Součet konvergentní geometrické řady — geometrická řada s kvocientem q , $|q| < 1$, je konvergentní a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Příklad 4.1.1. Sečtěte geometrickou řadu $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \dots$

Řešení: a) $a_1 = 1$, $q = \frac{a_2}{a_1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $|q| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, řada konverguje a

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \underline{\underline{2 - \sqrt{2}}}.$$

Příklad 4.1.2. Sečtěte geometrickou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} (\cos x)^{2n} = 1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \dots$

Řešení: $a_1 = 1$, $q = \cos^2 x$. Pro $|\cos^2 x| < 1$, tedy $x \neq k\pi$ je řada konvergentní a

$$S = \frac{1}{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{\underline{\underline{\sin^2 x}}}.$$

Příklad 4.1.3. Sečtěte geometrické řady:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} \quad \text{d) } \sum_{n=2}^{\infty} (x-3)^n \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^n}$$

Řešení: a) $S = 2$; b) $S = 3$; c) $S = \frac{3}{4}$; d) $S = \frac{(x-3)^2}{2-x}$, $x \in (2, 4)$;

e) $S = \frac{1}{x+1}$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Příklad 4.1.4. Řešte rovnici $\frac{8}{x+10} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{27}{x^3} + \dots$

Řešení: Pravá strana rovnice je geometrická řada, $a_1 = 1$, $q = -\frac{3}{x}$.

Pro $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ je řada konvergentní se součtem $S = \frac{x}{x+3}$.

Máme řešit rovnici $\frac{8}{x+10} = \frac{x}{x+3}$ na množině $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

Dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 + 2x - 24 = 0$. Řešením je $x \in \{-6, 4\}$.

Příklad 4.1.5. Pro $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ řešte rovnici $1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \dots = 2 \operatorname{tg} x$.

Řešení: $x \neq \frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{1 - \sin^2 x} = 2 \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow$

$$\underline{\underline{x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}}}.$$

Příklad 4.1.6. Vyřešte v \mathbb{R} následující rovnice:

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} (x+1)^n = -x \quad \text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (x+2)^n = \frac{1}{2}$$

$$\text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+5}{2}\right)^n = x \quad \text{d) } \sum_{n=2}^{\infty} (x-2)^n = \frac{4}{3}$$

Řešení: a) $x = -\frac{1}{2}$; b) $x = -\frac{5}{2}$; c) nemá řešení; d) $\frac{8}{3}$.

4.2 Konvergence číselné řady

Absolutní konvergence — Číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pokud je konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Neabsolutní konvergence — Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje.

Nutná podmínka konvergence číselné řady — Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, potom je nutně $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Řada s nezápornými členy — řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Podílové kritérium konvergence řady s nezápornými členy —

Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členy konverguje.

Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členy diverguje.

Odmocninové kritérium konvergence řady s nezápornými členy —

Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členy konverguje.

Je-li $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezápornými členy diverguje.

Integrální kritérium konvergence řady s nezápornými členy —

Funkce $f(x)$, $x \in \langle 1, \infty \rangle$ je nezáporná a nerostoucí a navíc $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když konverguje nevlastní integrál $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Srovnávací kritérium — Nechť $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ a $0 \leq a_n \leq b_n$ pro všechna $n \geq n_0$.

Je-li konvergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, potom je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Je-li divergentní řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, potom je divergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Alternující řada — řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, kde $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Leibnitzovo kritérium konvergence alternující řady — Řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$

je konvergentní, pokud je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ klesající a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Příklad 4.2.1. *Vyšetřete konvergenci následujících číselných řad s nezápornými členy:*

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+3n}{2+5n} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{3}\right)^n \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+4}\right)^n \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$$

Řešení: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+3n}{2+5n} = \frac{3}{5} \neq 0$. Není splněna nutná podmínka konvergence, řada diverguje.

b) Ověříme nutnou podmínku konvergence: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{3}\right)^n = \infty \neq 0 \Rightarrow$ diverguje.

c) Použijeme odmocninové kritérium.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n+4}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{3n+4}\right) = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \text{řada } \underline{\text{konverguje}}.$$

d) Použijeme podílové kritérium.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n!}{3^n 3 n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3} = \infty > 1 \Rightarrow \underline{\text{diverguje}}.$$

Příklad 4.2.2. *Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci následujících řad:*

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \quad \text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 16} \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Řešení: a) Zvolíme si funkci $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tato funkce je klesající a platí, že $f(n) = \frac{\ln n}{n}$, $n = 1, 2, \dots$. Vypočítáme si nevládní integrál:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{\ln x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = A \Rightarrow t = \ln A \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^{\ln A} t dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\ln A} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (\ln^2 A - 0) = \infty.$$

Integrál diverguje, tedy i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverguje.

$$b) f(x) = \frac{1}{x \ln x}; \quad f(n) = \frac{1}{n \ln n}, \quad n = 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned} \text{Potom } \int_2^\infty f(x) dx &= \int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\ln |\ln x| \right]_2^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln |\ln A| - \ln |\ln 2| = \infty \Rightarrow \underline{\underline{\text{řada diverguje}}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) f(x) = \frac{1}{x^2 + x}. \text{ Potom } \int_1^\infty f(x) dx &= \int_1^\infty \frac{1}{x^2 + x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{1}{x^2 + x} dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\ln |x| - \ln |x+1| \right]_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \right]_1^A = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{A}{A+1} \right| - \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2^{-1} = \ln 2 < \infty \Rightarrow \underline{\underline{\text{řada konverguje}}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) f(x) = \frac{1}{x^2 + 16}. \text{ Potom } \int_1^\infty f(x) dx &= \int_1^\infty \frac{1}{x^2 + 16} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{1}{x^2 + 16} dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{4} \arctg \frac{x}{4} \right]_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\arctg \frac{A}{4} - \arctg \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{4} \right) < \infty \\ &\Rightarrow \underline{\underline{\text{řada konverguje}}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) f(x) = \frac{1}{x}. \text{ Potom } \int_1^\infty f(x) dx &= \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\ln |x| \right]_1^A = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \ln A - \ln 1 = \infty \Rightarrow \underline{\underline{\text{řada diverguje}}}. \end{aligned}$$

Příklad 4.2.3. Pomocí srovnávacího kritéria rozhodněte o konvergenci následujících řad:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$$

Řešení: a) Platí, že $\sqrt{n} \leq n$, $n = 1, 2, \dots$, takže $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$

Víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní, tedy i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje.

b) $n^n \geq 2^n$, $n = 2, 3, \dots \Rightarrow \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{n^n}$, $n = 2, 3, \dots$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ je konvergentní geometrická řada, tudíž je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ konvergentní.

c) $\ln n \leq n \Rightarrow \frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots \Rightarrow$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ diverguje.

$$d) (n+1)3^n \geq 3^n, \quad n = 1, 2, \dots \Rightarrow \frac{1}{3^n} \geq \frac{1}{(n+1)3^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ konverguje, tedy konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$.

Příklad 4.2.4. Rozhodněte o konvergenci následujících alternujících řad:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n}{9n-5} \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+4)^2}$$

Řešení: a) Posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Podle Leibnitzova kritéria řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konverguje.

b) Posloupnost $\left(\frac{3n}{9n-5}\right)_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{9n-5} = \frac{1}{3} \neq 0$.

Podle Leibnitzova kritéria řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ diverguje.

c) Posloupnost $\left(\frac{1}{(n+4)^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+4)^2} = 0$. Takže řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+4)^2}$ konverguje.

Příklad 4.2.5. Rozhodněte o absolutní konvergenci následujících řad:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n} \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

Řešení: a) Řada je alternující a podle předchozího příkladu je konvergentní.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje dle integrálního kritéria.

Takže řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konverguje neabsolutně.

b) Posloupnost $\left(\frac{n+1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ klesající a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} \neq 0$.

Podle Leibnitzova kritéria řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n}$ diverguje, proto nemůže kon-

vergovat ani řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{n+1}{2n}\right|$. Řada diverguje.

c) Posloupnost $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ konverguje podle Leibnitzova kritéria.

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje podle integrálního kritéria.

To znamená, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ konverguje absolutně.

Příklad 4.2.6. Rozhodněte o konvergenci následujících řad:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n-3} \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{2n} \quad \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n+1}{2n-3} \quad \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{4^n}$$

Řešení: a) diverguje; b) konverguje; c) diverguje; d) diverguje; e) konverguje.

4.3 Mocnné řady

Mocnná řada se středem v bodě x_0 — řada tvaru $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Obor konvergence mocnné řady — množina všech x , pro která mocnná řada konverguje.

Poloměr konvergence mocnné řady se středem v bodě x_0 — reálné číslo r

takové, že mocnná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$

konverguje absolutně pro všechna $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ a diverguje pro všechna $x \in (-\infty, x_0 - r) \cup (x_0 + r, \infty)$.

Vzorec pro výpočet poloměru konvergence mocnné řady — $r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Poznámka. Ve vzorci na výpočet poloměru konvergence mocnné řady je horní limita, limsup, která se dá nahradit obyčejnou limitou v případě, že existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Poznámka. Pokud $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, mocnná řada konverguje pouze v bodě x_0 .

Pokud $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, mocnná řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Příklad 4.3.1. Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+3)^n$ má poloměr konvergence 2. Rozhodněte o konvergenci řady v bodech $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$, $x = -6$.

Řešení: Střed řady je -3 a poloměr 2. Potom řada konverguje na množině $(-3-2, -3+2) = (-5, -1)$. Body $x = -2$ a $x = -3$ leží uvnitř tohoto intervalu, a proto řada konverguje v bodech $x = -2$ a $x = -3$.

Bod $x = -1$ leží na hranici intervalu, a proto o konvergenci v tomto bodě bez znalosti koeficientů a_n nelze rozhodnout.

Body $x = 0$ a $x = -6$ leží mimo interval $(-5, -1)$, mimo obor konvergence, proto řada diverguje v bodech $x = 0$ a $x = -6$.

Příklad 4.3.2. Je dána mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$. Víme, že řada konverguje pro $x = 3$ a diverguje pro $x = 4$. Rozhodněte o konvergenci řady v bodech $x = -3$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ a $x = 5$.

Řešení: Řada konverguje na $(1-r, 1+r)$. Víme, že bod $x = 3$ leží uvnitř nebo na hranici tohoto intervalu a podobně bod $x = 4$ leží na hranici nebo mimo tento interval. Z toho plyne, že poloměr konvergence $r \in (2, 3)$.

Potom řada s jistotou konverguje v bodech $x = 0, x = 1$ a $x = 2$ a s jistotou diverguje v bodech $x = -3$ a $x = 5$.

Příklad 4.3.3. Určete obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n 3^n}$.

Řešení: Střed řady je -1 a poloměr r si vypočítáme podle vzorce.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n 3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} 3} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{3} \Rightarrow r = 3.$$

Řada konverguje absolutně na $(-4, 2)$ a diverguje na $x \in (-\infty, -4) \cup (2, \infty)$.

O konvergenci v bodech $x = -4$ a $x = 2$ rozhodneme dosazením. Pro $x = -4$ máme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Dostali jsme alternující řadu, která je konvergentní (podle Leibnitzova kritéria z předchozí kapitoly).

Podobně pro $x = 2$ dostaneme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která je divergentní (integrální kritérium). Z toho plyne, že mocninná řada diverguje pro $x = 2$.

Oborem konvergence této mocninné řady je tedy množina $(-4, 2)$.

Příklad 4.3.4. Určete obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ se středem v 0.

Řešení: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \Rightarrow \underline{\underline{M = \{0\}}}$.

Příklad 4.3.5. Mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - 2)^n$ má poloměr konvergence 3. Rozhodněte o konvergenci řady v bodech $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$, $x = 2$.

Řešení: Konverguje v bodech $x = 0$ a $x = 2$, diverguje v bodě $x = -2$ a v bodě $x = -1$ nelze rozhodnout o konvergenci.

Příklad 4.3.6. Určete obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 2)^n}{n 2^n}$.

Řešení: $M = \langle 0, 4 \rangle$.

Příklad 4.3.7. Určete obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ se středem v 0.

Řešení: $(-1, 1)$.

Literatura

- [1] Eliaš, J., Horváth J., Kajan J., Škulka R.: Zbierka úloh z vyššej matematiky IV, Bratislava, Nakladateľstvo Alfa, 1970.
- [2] Krupková V., Fuchs, P.: Matematika I, Brno, Ediční středisko VUT, 2009.
- [3] Mendelson, E.: 3000 Solved Problems in Calculus, City University of New York, 2008.
- [4] Tomica, R.: Cvičení z matematiky I., Vojenská Akademie Brno, 1974.