Posloupnosti a řady

Představme si, že budeme sledovat teplotu vzduchu (na některém konkrétním místě, třeba za naším oknem) každý den počínaje některým zvoleným dnem vždy v 7^{00} hod. Naměřené hodnoty pak budeme zapisovat v pořadí, v jakém jsme je zaznamenali, dostaneme (např.):

Den	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Teplota ^{0}C	8,1	7,6	6,8	9,0	8,5	6,7	2,8	1,9	3,2

Vidíme, že v tomto přehledu jsou přirozeným číslům 1, 2, 3, 4, … přiřazována reálná čísla 8,1; 7,6; 6,8; 9,0; … atd.
Toto přiřazení je funkcí, jejímž argumentem je vždy přirozené číslo; mluvíme o posloupnosti čísel. Naměřené hodnoty jsou pak členy této posloupnosti.

Funkce, jejímž definičním oborem je množina přirozených čísel $\mathbb{N}$, se nazývá ***nekonečná posloupnost***. Přitom v tomto případě argument zapisujeme jako index, píšeme

$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, \dots, f(n) = a_n, \dots$$

Konečnou posloupností nazýváme každou funkci, jejímž definičním oborem je konečná podmnožina množiny přirozených čísel tvaru $\{n \in \mathbb{N}, n \leq n_0\}$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$ je pevně zvolené číslo. Konečnou posloupností je posloupnost naměřených teplot z úvodního příkladu.

Posloupnost zadáváme výčtem prvků, vzorcem pro *n*-tý člen, nebo rekurentně, tedy vztahem, pomocí kterého z předchozího člene (nebo více předchozích členů) získáme nový člen posloupnosti.

Příklad: Uvažujme posloupnost všech sudých čísel.
Zadání výčtem prvků: $\{a_n\}_1^\infty = \{2, 4, 6, 8, 10 \dots\}$
zadání vzorcem pro *n*-tý člen: $a_n = 2n$
zadání rekurentní: $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 2$.

Aritmetická posloupnost je každá posloupnost určená rekurentně pomocí vztahů

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Číslo *d* se nazývá ***diference*** (rovná se diferenci, tj. rozdílu dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti).

Členy aritmetické posloupnosti mají zajímavou vlastnost: každý člen (počínaje druhým) je roven aritmetickému průměru sousedních dvou členů:
Platí

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} \ (= d), \text{ odtud } \quad a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}.$$

Snadno vidíme, že *n*-tý člen aritmetické posloupnosti se dá vyjádřit pomocí prvního členu a diference:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

a pro libovolné dva členy posloupnosti a_n, a_m platí

$$a_m = a_n + (m-n)d.$$

Příklad:
Máme sečíst prvních 50 přirozených čísel. Výhodné je postupovat tak, že je napíšeme vedle sebe vzestupně a pod to sestupně a oba řádky sečteme, dostaneme

$$\begin{array}{l} 1 \;\; + \;\; 2 + 3 + \cdots + 49 + 50 \\ \underline{50 + 49 + \cdots + 3 + \;\; 2 \;\; + 1} \\ 51 + 51 + 51 + \cdots + 51 + 51 = 50 \cdot 51 \end{array}$$

tedy součet jednoho řádku – našich prvních padesáti přirozených čísel je roven $\frac{50 \cdot 51}{2}$.

Jestliže tuto úvahu zobecníme, dostaneme vztah pro součet prvních *n* členů aritmetické posloupnosti $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = s_n$. Platí

$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2}$.

Řešené příklady:

1) Máme určit prvních pět členů aritmetické posloupnosti, je-li $a_7 = 10,\ a_6 = 8$.
Řešení:

$$\begin{aligned} d &= a_7 - a_6 = 10 - 8 = 2, \\ a_5 &= a_6 - d = 8 - 2 = 6, \\ a_4 &= a_5 - d = 6 - 2 = 4, \\ a_3 &= a_4 - d = 4 - 2 = 2, \\ a_2 &= a_3 - d = 2 - 2 = 0, \\ a_1 &= a_2 - d = 0 - 2 = -2. \end{aligned}$$

$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{-2,0,2,4,6\}$.

2) Zjistěte, je-li posloupnost $\left\{\frac{n^2-n-6}{n+2}\right\}_1^\infty$ aritmetická; v kladném případě určete a_1 a d.

Řešení:

$$a_n = \frac{n^2-n-6}{n+2} = \frac{(n-3)(n+2)}{n+2} = n - 3 \;\; (n + 2 \neq 0 \;\; n \in \mathbb{N})$$
$$a_{n+1} - a_n = (n+1) - 3 - (n-3) = 1 \;\; \underline{d = 1}, \;\; \underline{a_1 = -2}$$

3) V aritmetické posloupnosti je dáno $a_4 = 18, a_7 = 16$. Určete a_1, d, a_{10}.

Řešení:

$$a_m = a_n + (m-n)d \;\; \text{tedy} \;\; a_7 = a_4 + 3d \;\; \text{a} \;\; 16 = 18 + 3d \;\; \Rightarrow \underline{d = -\frac{2}{3}},$$
$$a_n = a_1 + (n-1)d \;\; \text{tedy} \;\; a_4 = a_1 + 3d \;\; \text{a} \;\; a_1 = a_4 - 3d \;\; \Rightarrow \underline{a_1 = 20}$$
$$a_{10} = a_1 + 9d = 20 + 9 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 14 \qquad \underline{a_{10} = 14}$$

4) Určete prvních šest členů aritmetické posloupnosti, jestliže platí $a_2 + a_4 = 24,\ \frac{a_3}{a_7} = \frac{3}{8}$.

Řešení:

$$a_2 + a_4 = 24 = a_1 + d + a_1 + 3d \quad 2a_1 + 4d = 24 \quad d = \frac{12 - a_1}{2}$$
$$8a_3 = 3a_7 \quad 8(a_1 + 2d) - 3(a_1 + 6d) = 0 \quad 5a_1 - 2d = 0 \quad 5a_1 - (12 - a_1) = 0$$
$$a_1 = 2,\ d = 5$$
$$\underline{\{a_n\}_1^6 = 2, 7, 12, 17, 22, 27}.$$

5) Osm čísel tvoří aritmetickou posloupnost. Určete tato čísla, jestliže součet prostředních dvou je 41 a součin krajních dvou je 114.

Řešení:

$a_4 + a_5 = 41, \qquad a_1 \cdot a_8 = 114$

$a_1 + 3d + a_1 + 4d = 41, \quad a_1 \cdot (a_1 + 7d) = 114 \;\Rightarrow\; a_1 + 7d = \frac{114}{a_1}\,, \;\; d = \frac{41-2a_1}{7}$

$a_1 + (a_1 + 7d) = 41, \quad a_1 + 7d = \frac{114}{a_1} \quad \Rightarrow \quad a_1 + \frac{114}{a_1} = 41 \;\; a_1^2 - 41a_1 + 114 = 0$

$(a_1 - 3)(a_1 - 38) = 0$

1. $a_1 = 3, \;\; d = 5, \quad \underline{\{a_n\}_1^8 = 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38}$
2. $a_1 = 38, d = -5, \; \underline{\{a_n\}_1^8 = 38, 33, 28, 23, 18, 13, 8, 3}$

6) Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří aritmetickou posloupnost, přičemž délka delší odvěsny je 24 cm. Vypočítejte jeho obvod.

Řešení:

$a = a_1 = a_2 - d = 24 - d, \; b = a_2 = 24, \; c = a_3 = a_2 + d = 24 + d$

$O = a + b + c = 24 - d + 24 + 24 + d = \underline{72}$

Pozn. Vůbec jsme nevyužili faktu, že trojúhelník je pravoúhlý. Přesvědčíme se o tom – musí existovat *d* tak aby platilo

$(24 + d)^2 = (24 - d)^2 + 24^2 \quad 24^2 + 2 \cdot 24d + d^2 = 24^2 - 2 \cdot 24d + d^2 + 24^2$

$4 \cdot 24d = 24^2 \quad 4d = 24 \quad \underline{d = 6} \quad a = 18, \; b = 24, \; c = 30.$

7) Mezi čísla $a = 2{,}6; \;\; b = 4{,}7$ vložte 9 čísel tak, aby se zadanými tvořila aritmetickou posloupnost.

Řešení:

$a_1 = a = 2{,}6 \quad a_{11} = b = 4{,}7$

$4{,}7 = 2{,}6 + 10d \quad d = \frac{4{,}7-2{,}6}{10} = 0{,}21$

$\underline{\{a_n\}_1^{11} = 2{,}6; 2{,}81; \; 3{,}02; \; 3{,}23; \; 3{,}44; \; 3{,}65; \; 3{,}86; \; 4{,}07; \; 4{,}28; \; 4{,}49; \; 4{,}7.}$

8) Velikosti úhlů v trojúhelníku tvoří aritmetickou posloupnost. Určete tyto úhly, jestliže pro nejmenší z nich platí $\alpha = 20^0$.

Řešení:

$\alpha = a_1 = 20, \beta = a_2 = 20 + d, \gamma = a_3 = 20 + 2d$

$s_3 = 180 = \frac{3}{2}(a_1 + a_3) = \frac{3}{2}(20 + 20 + 2d) \quad 120 = 40 + 2d \;\; d = 40$

$\underline{(\alpha, \beta, \gamma) = (20^0, 60^0, 120^0)}.$

9) Najděte vztah pro součet prvních *n* lichých čísel.

Řešení:

$s_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1, \;\; a_1 = 1, \;\; a_n = 2n - 1 \;\; s_n = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = \underline{n^2}$

$\underline{1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2}.$

10) V aritmetické posloupnosti je $d = -12,\ a_n = 15$. Pro jaké n je $s_n = 456$?

Řešení:

$$a_n = 15,\ \ a_1 = a_n - (n-1)d = 15 + 12(n-1) = 12n + 3,$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n),\ \ 456 = \frac{n}{2}(12n + 3 + 15) = \frac{1}{2}(12n^2 + 18n)$$

$$912 = 12n^2 + 18n \ \Leftrightarrow\ 2n^2 + 3n - 152 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 2\cdot(-152)}}{2\cdot 2} = \frac{-3 \pm 35}{4} \quad n_1 = 8,\ \ n_2 = -\frac{19}{2} \notin \mathbb{N} \qquad \underline{n = 8}$$

Geometrická posloupnost je každá posloupnost určená rekurentně pomocí vztahů

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n \cdot q, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Číslo q se nazývá ***kvocient*** (rovná se podílu dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti).

Členy geometrické posloupnosti mají následující vlastnost: každý člen (počínaje druhým) je roven geometrickému průměru sousedních dvou členů:
Platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \ \ (= q), \text{ odtud} \quad a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1},\ \ |a_n| = \sqrt{a_{n+1} \cdot a_{n-1}}.$$

Snadno vidíme, že n-tý člen geometrické posloupnosti se dá vyjádřit pomocí prvního členu a kvocientu:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

a pro libovolné dva členy posloupnosti a_n, a_m platí

$$a_m = a_n \cdot q^{m-n}\ .$$

Odvodíme vztah pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti:
Je

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} \\ \underline{q s_n} &= \underline{\qquad a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n} \\ q s_n - s_n &= a_1 q^n - a_1 \\ s_n(q-1) &= a_1(q^n - 1) \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}}} \text{ pro } q \neq 1, \quad \text{pro } q = 1 \text{ je zřejmě } s_n = n \cdot q.$$

Řešené příklady:

1) Vypočítejte prvních šest členů geometrické posloupnosti, ve které je $a_3 = 8,\ a_7 = 128$.

Řešení:

$$a_7 = a_3 \cdot q^{7-3} \quad 128 = 8 \cdot q^4 \quad q^4 = 16 \quad \underline{q = 2}$$

$$a_1 = a_3 \cdot q^{1-3} \quad a_1 = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2 \qquad \underline{a_1 = 2}$$

$$\underline{\{a_n\}_1^6 = 2, 4, 8, 16, 32, 64.}$$

2) K číslům 2, 16, 58 přičtěte stejné číslo tak, aby vzniklá čísla tvořila první tři členy geometrické posloupnosti. Napište prvních šest jejích členů.

Řešení:

$a_1 = 2 + x,\ \ a_2 = 16 + x,\ \ a_3 = 58 + x$

$16 + x = (2 + x) \cdot q$

$58 + x = (16 + x) \cdot q$

$42 = (16 + x) \cdot q - (2 + x) \cdot q = 14q \quad \underline{q = 3}$

$16 + x = (2 + x) \cdot 3 = 6 + 3x \quad 2x = 10 \quad \underline{x = 5}$

$\{a_n\}_1^6 = 7,\ 21,\ 63,\ 189,\ 567,\ 1701.$

3) Ověřte, že čísla $\sqrt{5} - \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5} + \sqrt{2}$ tvoří prví tři členy geometrické posloupnosti.

Řešení:

$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$

$a_1 = \sqrt{5} - \sqrt{2},\ a_2 = \sqrt{3},\ a_3 = \sqrt{5} + \sqrt{2}\,;$

$\left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$ (napravo rozdíl čtverců) $3 = 5 - 2$ <u>tvrzení platí</u>.

4) Mezi kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 66x + 128 = 0$ Vložte čtyři čísla tak, aby spolu s těmito kořeny tvořila prvních šest členů geometrické posloupnosti.

Řešení:

$x^2 - 66x + 128 = 0 \ \Leftrightarrow\ (x - 2)(x - 64) = 0$

1. $a_1 = 2,\ a_6 = 64 \quad 64 = 2 \cdot q^5 \quad q^5 = 32 \ \ q = 2$
   $\underline{\{a_n\}_1^6 = 2, 4, 8, 16, 32, 64}$.

2. $a_1 = 64, a_6 = 2 \qquad 2 = 64 \cdot q^5 \quad q^5 = \frac{1}{32},\ q = \frac{1}{2}$
   $\underline{\{a_n\}_1^6 = 64, 32, 16, 8, 4, 2}.$

5) **Najděte** *n*-tý člen geometrické posloupnosti, jestliže pro prvních šest jejích členů platí

$a_1 - a_2 + a_3 = 9,\ \ a_4 - a_5 + a_6 = 72.$

Řešení:

$a_1 - a_1 q + a_1 q^2 = 9$

$a_1 q^3 - a_1 q^4 + a_1 q^5 = 72 \quad q^3(a_1 - a_1 q + a_1 q^2) = 72$

$q^3 \cdot 9 = 72 \quad q^3 = 8 \ \ \underline{q = 3}$

$a_1(1 - q + q^2) = 9 \quad a_1(1 - 3 + 9) = 9 \ \ 7a_1 = 9 \ \ \underline{a_1 = \frac{9}{7}}$

$a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{9}{7} 3^{n-1} \quad \underline{a_n = \frac{1}{7} \cdot 3^{n+1}}$

6) Délky hran kvádru tvoří geometrickou posloupnost, pro jeho povrch S platí $S = 78\ cm^2$, přičemž pro součet délek hran vycházejících z jednoho vrcholu platí $a + b + c = 13\ cm$. Určete objem tohoto kvádru.

Řešení:

$a + b + c = 13,\ \ 2(ab + ac + bc) = 78$
$a = a_1,\ b = a_1 q,\ c = a_1 q^2$

$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 13,\quad a_1 \cdot a_1 q + a_1 \cdot a_1 q^2 + a_1 q \cdot a_1 q^2 = 39$
$a_1 q(a_1 + a_1 q + a_1 q^2) = 39$
$a_1 q \cdot 13 = 39 \qquad a_1 q = 3 \qquad a_1 = \frac{3}{q}$

$\frac{3}{q} + 3 + 3q = 13 \mid \cdot q \qquad 3q^2 - 10q + 3 = 0 \quad q_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-9}}{3} = \frac{5 \pm 4}{3}$

1. $q = 3,\ a_1 = a = 1,\ b = 3,\ c = 9,\quad \underline{V = abc = 27},$
2. $q = \frac{1}{3},\ a_1 = a = 9,\ b = 3,\ c = 1,\quad \underline{V = abc = 27}.$

7) Počet obyvatel v jistém městě se za 5 let zvýšil o 12 %. Jaký byl průměrný roční přírůstek?

Řešení:

Původní počet obyvatel … x
počet obyvatel po 5 letech … $1{,}12x$
roční přírůstek … q

počet obyvatel po 1. roce … $x \cdot q$
⋮
počet obyvatel po 5. roce … $x \cdot q^5$ $\qquad x \cdot q^5 = 1{,}12x \quad q = \sqrt[5]{1{,}12} \approx 1{,}0229$

Roční přírůstek obyvatel v daném městě je přibližně 2,3 %.

V některých situacích bývá potřebné zjistit, jak se chová vzrůst nebo pokles číselných údajů je-li změna zadána v procentech:
Vzrůst každého členu o p % znamená vzrůst ze 100 % jeho hodnoty na $(100 + p)$ % této hodnoty, takže členy se zvětšují v poměru $\frac{100+p}{100} = 1 + \frac{p}{100}$, při poklesu se členy analogicky zmenšují v poměru $1 - \frac{p}{100}$. Jednotlivé hodnoty tedy tvoří geometrickou posloupnost s tímto kvocientem.

Zajímá nás, za kolik let vzroste uložených a Kč při stálém ročním přírůstku o p % na k násobek původní částky:
Označíme velikost vkladu po n letech jako a_n, stav po $(n + 1)$ letech pak je

$a_{n+1} = a_n\left(1 + \frac{p}{100}\right),\ a_1 = a \cdot q = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right),\ a_n = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = k \cdot a$, tedy
$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = k$ a hledáme n: $\log\left(\frac{100+p}{100}\right)^n = \log k$

$n(\log(100 + p) - \log 100) = \log k \quad \underline{n = \frac{\log k}{\log(100+p) - 2}}$

(pro konkrétní p a k se výsledek zaokrouhlí na celé číslo nahoru).

Příklad: Na jaký úrok máme uložit 10 tisíc Kč, aby po 5 letech částka vzrostla na 25 tisíc Kč?

$$25 = 10\left(1 + \frac{p}{100}\right)^5 \qquad 2{,}5 = \frac{(100+p)^5}{100^5}$$
$$(100+p)^5 = 2{,}5 \cdot 100^5 \qquad 100 + p = 100 \cdot \sqrt[5]{2{,}5} \qquad \left(\sqrt[5]{2{,}5} \doteq 1{,}2\right)$$
$$100 + p = 120 \quad \Rightarrow \quad \underline{p = 20}$$

Částku je třeba uložit na 20 % úrok.

Geometrická řada

Nekonečnou řadou rozumíme výraz, který vznikne tak, že mezi členy posloupnosti vložíme znaménko +, tedy je-li $\{a_n\}$ posloupnost, pak příslušná nekonečná řada má tvar

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

a tento výraz značíme symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Problémem, jestli a kdy existuje číslo (výraz), který můžeme pokládat za výsledek takového součtu (tedy za součet nekonečné řady), se zde nebudeme zabývat, všimneme si pouze případu, kdy výchozí posloupnost je geometrická.

K tomu je potřeba zmínit se o pojmu ***limity*** – nebudeme zde formulovat přesnou definici, jen intuitivně:
Platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, jestliže existuje (libovolně malé) kladné číslo ε tak že od jistého indexu n_0 platí pro každé $n > n_0$ vztah $|a_n - l| < \varepsilon$, tedy jdeme-li v posloupnosti dostatečně daleko, členy posloupnosti se k limitě blíží na libovolně malou (předem zvolenou) vzdálenost.

Pro nás budou v dalším důležité dvě limity: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a pro $|a| < 1$ $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

Vraťme se ke geometrické řadě:
Je-li $\{a_n\}_1^{\infty}$ geometrická posloupnost, potom

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n + \cdots = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

je geometrická řada. Platí-li $|q| < 1$, můžeme určit její součet jako limitu výrazu, který udává součet prvních *n* členů geometrické posloupnosti (kterému říkáme *n*-tý částečný součet řady):

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad : \quad s = \lim_{n\to\infty} s_n = a_1 \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} \qquad \underline{s = \frac{a_1}{1-q}}$$

Řešené příklady:

1) Je dána geometrická řada 8, 2, $\frac{1}{2}$, … . Určete její součet.

Řešení:
Zřejmě je $a_1 = 8$, $q = \frac{1}{4}$. Takže $s = \frac{8}{1-\frac{1}{4}} = \frac{8\cdot 4}{4-1} = \underline{\frac{32}{3}}$.

2) Máme vyjádřit číslo $0{,}77\overline{7}$ jako zlomek. (Nekonečný periodický rozvoj mají pouze racionální čísla, takže úloha má smysl.)

$$0{,}7777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \cdots + \frac{7}{10^n} + \cdots = \frac{7}{10} + \frac{7}{10}\cdot\frac{1}{10} + \frac{7}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cdots + \frac{7}{10}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} + \cdots$$

$$a_1 = \frac{7}{10},\ q = \frac{1}{10},\ \ s = \frac{7}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 7\cdot\frac{1}{10-1} = \underline{\frac{7}{9}}$$

3) Najděte součet řady $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \cdots$

Řešení:

Řada není geometrická, ale její liché členy a sudé členy, každé zvlášť, geometrické řady tvoří. Nejdřív tedy provedeme úpravu

$$s = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \cdots = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots\right)$$

(Tuto úpravu můžeme provést v případě, že řada má členy s kladnými znaménky a obě vzniklé řady mají součet.)

$$s = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \underline{\frac{3}{2}}.$$

4) Řešte rovnici $1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{X^3} + \cdots = \frac{4x-3}{3x-4}$.

Řešení:

Na levé straně rovnice je geometrická řada, ve které je $a_1 = 1, q = \frac{2}{x}$. Platí tedy (pro $\left|\frac{2}{x}\right| < 1$)

$$\frac{1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{4x-3}{3x-4} \qquad \frac{x}{x-2} = \frac{4x-3}{3x-4} \qquad x(3x-4) = (4x-3)(x-2)$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \quad (x-1)(x-6) = 0$$

$x = 1$ nevyhovuje $\left(\left|\frac{2}{1}\right| = 2 > 1\right)$, $\left|\frac{2}{6}\right| = \frac{1}{3} < 1)$ $\underline{x = 6}$