VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

# Přípravný kurz z matematiky

**Edita Kolářová**

**ÚSTAV MATEMATIKY**

# Obsah

# 1 Přehled použité symboliky

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ množina všech přirozených čísel

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ množina všech celých čísel

$\mathbb{Q} = \{p/q; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ množina všech racionálních čísel

$\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel

$\mathbb{R}^+$ množina všech reálných kladných čísel

$\mathbb{C} = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}\}$ množina všech komplexních čísel

$\{\,\}$,$\emptyset$ prázdná množina

$a \in \mathcal{M}$ $a$ je prvek množiny $\mathcal{M}$

$a \notin \mathcal{M}$ $a$ není prvek množiny $\mathcal{M}$

$\{x \in \mathcal{M}; v(x)\}$ množina všech prvků množiny $\mathcal{M}$ s vlastností $v$

$P \wedge Q$ konjunkce výroků $P, Q$

$P \vee Q$ disjunkce výroků $P, Q$

$P \Rightarrow Q$ $P$ implikuje $Q$

$P \Leftrightarrow Q$ ekvivalence výroků $P$ a $Q$

$\forall$ obecný kvantifikátor (každý...)

$\exists$ existenční kvantifikátor (existuje...)

$\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ $\mathcal{M}$ je podmnožina $\mathcal{N}$

$\mathcal{M} = \mathcal{N}$ $(\mathcal{M} \subset \mathcal{N}) \wedge (\mathcal{N} \subset \mathcal{M})$ ; $\mathcal{M}$ se rovná $\mathcal{N}$

$\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ $\{x; x \in \mathcal{M} \vee x \in \mathcal{N}\}$ – sjednocení množin

$\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ $\{x; x \in \mathcal{M} \wedge x \in \mathcal{N}\}$ – průnik množin

$\mathcal{M} - \mathcal{N}$ $\{x; x \in \mathcal{M} \wedge x \notin \mathcal{N}\}$

$A[a_1; a_2; a_3]$ bod o souřadnicích $a_1, a_2, a_3$

$\vec{u} = (u_1; u_2)$ vektor o složkách $u_1, u_2$

$|AB|$ vzdálenost bodů $A, B$; velikost úsečky $AB$

$|a|, |z|$ absolutní hodnota reálného resp. komplexního čísla

# 2 Základní pojmy matematické logiky a teorie množin

## 2.1 Elementy matematické logiky

**Výrok** je vyslovená nebo napsaná myšlenka, která sděluje něco, co může být pouze pravdivé nebo nepravdivé. Jednoduché výroky označujeme velkými písmeny, např. $A, B, V, \ldots$. Pomocí logických spojek dostáváme složené výroky.

Nejdůležitější jsou:

$\overline{A}$ ($nonA$; $A'$; $\neg A; \ldots$) **negace** výroku $A$ (není pravda, že $A$)
$A \wedge B$ **konjunkce** ($A$ a zároveň $B$)
$A \vee B$ **disjunkce** ($A$ nebo $B$; platí alespoň jeden)
$A \Rightarrow B$ **implikace** (jestliže $A$, pak $B$; z $A$ plyne $B$)
$A \Leftrightarrow B$ **ekvivalence** ($A$ platí tehdy a jen tehdy, když platí $B$;
$A$ platí právě tehdy, když platí $B$)

**Kvantifikované výroky** jsou výroky, udávající počet:

$\forall$ **obecný kvantifikátor** (čteme: ke každému, pro každé, pro všechna) vyjadřující, že každý (všichni, libovolný, kterýkoliv) uvažovaný objekt má - nebo nemá - požadovanou vlastnost.

$\exists$ **existenční kvantifikátor** (čteme: existuje alespoň jeden) vyjadřuje, že některé (alespoň jeden, někteří, lze nalézt, existuje,...) objekty mají vlastnost, o kterou jde.

**Příklad 2.1** *Výrok $A$ je "rok má 13 měsíců"a výrok $B$ je "$2 \times 2 = 4$." Utvořte $\overline{A}, A \vee B, A \wedge B, A \Rightarrow B, A \Leftrightarrow B$ a rozhodněte, jsou-li pravdivé nebo nepravdivé.*

**Řešení:**
$\overline{A}$ : *"rok nemá 13 měsíců"- pravdivý výrok*
$A \vee B$ : *"rok má 13 měsíců nebo $2 \times 2 = 4$" - pravdivý výrok*
$A \wedge B$ : *"rok má 13 měsíců a $2 \times 2 = 4$" - nepravdivý výrok*
$A \Rightarrow B$ : *"má-li rok 13 měsíců, pak $2 \times 2 = 4$" - pravdivý*
$A \Leftrightarrow B$ : *"rok má 13 měsíců právě tehdy, je-li $2 \times 2 = 4$" - nepravdivý výrok*

**Příklad 2.2** *Vyslovte negaci výroku A:*
*a) Všechny kořeny mnohočlenu jsou rovny nule.*
*b) Ne všechna reálná čísla jsou kladná.*
*c)* $2 < -7$
*d) Levná výroba proudu.*

**Řešení:**
*a) Alespoň jeden kořen mnohočlenu je nenulový;*
*b) Všechna reálná čísla jsou kladná;*
*c)* $2 \geq -7$;
*d) není výrok*

**Příklad 2.3** *Výrok A "číslo a je dělitelné osmi", výrok B "číslo a je dělitelné dvěma". Formulujte $A \Rightarrow B$, a rozhodněte zda je pravdivý.*

**Řešení:**
*Je-li číslo a dělitelné osmi, pak je dělitelné dvěma. Pravdivá implikace*

## 2.2 Základní operace s množinami

**Množinou** rozumíme souhrn libovolných, navzájem různých objektů, které mají určitou vlastnost. Základní operace s množinami :

$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ inkluze množin $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

$\mathcal{A} = \mathcal{B}$ rovnost množin $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ sjednocení množin

$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ průnik množin

$\mathcal{A} - \mathcal{B}$ rozdíl množin $(\mathcal{A} \setminus \mathcal{B})$

$\mathcal{A}'_{\mathcal{B}}$ doplněk množiny $\mathcal{A}$ v množině $\mathcal{B}$

Připomínáme ješte **intervaly**, jejich názvy, znázornění na číselné ose:

uzavřený interval $\langle a; b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$

otevřený interval $(a; b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

polootevřený interval $(a; b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$
(polouzavřený) $\langle a; b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$

neomezený interval $\langle a; \infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$
$(a; \infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}$
$(-\infty; b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$
$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$

oboustranně neomezený interval $(-\infty; \infty) = \mathbb{R}$

**Příklad 2.4** *$\mathcal{M}$ je množina všech sudých čísel, $\mathcal{P}$ množina všech lichých čísel, která nejsou dělitelná třemi, $\mathcal{R}$ množina všech čísel, která jsou dělitelná třemi. Určete $\mathcal{M} \cap \mathcal{R}, \mathcal{M} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{R}, \mathcal{P} \cap \mathcal{R}$.*

**Řešení:**
$\mathcal{M} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{R} = \mathbb{Z}$
$\mathcal{M} \cap \mathcal{R}$ *množina všech celých čísel dělitelných šesti*
$\mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \{\ \}$

**Příklad 2.5** *$\mathcal{M}$ je množina všech sudých přirozených čísel menších než deset. Najděte všechny její podmnožiny.*

**Řešení:**
$\mathcal{M} = \{2, 4, 6, 8\}$
*jednoprvkové* $\{2\}, \{4\}, \{6\}, \{8\}$
*dvouprvkové* $\{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{4, 6\}, \{4, 8\}, \{6, 8\}$
*trojprvkové* $\{2, 4, 6\}, \{2, 4, 8\}, \{4, 6, 8\}, \{2, 6, 8\}$
*čtyřprvkové* $\{2, 4, 6, 8\}$
*množina prázdná*

## 2.3 Axiomy, definice, věty a důkazy

Základem logické výstavby matematiky je soubor **axiomů**, t.j. matematických výroků, které se považují za pravdivé a nedokazují se. K zavedení nových pojmů slouží **definice**, která stanoví název pojmu a určí jeho základní vlastnosti. **Věta** v matematice je pravdivý výrok, který musíme logicky odvodit - dokázat - z axiomů, definic a dříve dokázaných vět. Podle použitých postupů rozlišujeme důkaz přímý, nepřímý, důkaz sporem, důkaz matematickou indukcí.

**Příklad 2.6** *Věta: Součin dvou libovolných sudých čísel je dělitelný čtyřmi.*

**Důkaz přímý:**
*Jde o součin* $2l \cdot 2k = 4lk$ $(l, k \in \mathbb{Z})$ *a to bylo dokázat.*

**Příklad 2.7** *Věta: Nechť rovnice* $ax^2 + bx + c = 0$ *má celočíselné koeficienty,* $a \neq 0, b$ *je číslo liché. Dokažte, že rovnice nemůže mít dvojnásobný kořen.*

**Důkaz sporem:**
*Předpokládáme, že rovnice má dvojnásobný kořen. Pak diskriminant je nulový. Víme, že* $b = 2k + 1,\ k \in \mathbb{Z}$. *Tedy* $D = (2k + 1)^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 4k^2 + 4k + 1 = 4ac$. *Na levé straně rovnice je liché číslo, na pravé straně sudé a to je spor. Neplatí tedy předpoklad, že kvadratická rovnice má za daných podmínek dvojnásobný kořen.*

**Příklad 2.8** *Matematickou indukcí dokažte, že součet čtverců prvních n přirozených čísel je roven* $S_n = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$.

**Důkaz:**
*Matematickou indukcí dokazujeme výrok* $V(n)$ *tak, že nejprve dokážeme platnost* $V(a)$, *kde a je nejmenší přirozené číslo pro danou úlohu. Pak předpokládáme platnost* $V(n)$ *a ukážeme platnost implikace* $V(n) \Rightarrow V(n + 1)$. *Pak* $V(n)$ *platí pro všechna n.*
*V našem případě:*
$V(1) : S_1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$, *což odpovídá* $S_1 = 1^2$.
*Předpokládáme* $V(n) : S_n = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$.
*Počítáme* $V(n + 1) : S_(n + 1) = S_(n) + (n + 1)^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1) + (n + 1)^2 = \frac{1}{6}(n + 1)(2n^2 + 7n + 6) = \frac{1}{6}(n + 1)(n + 2)(2n + 3)$.

**Příklad 2.9** *Nechť množina* $\mathcal{M}$ *je množina všech řešení rovnice* $\cos\frac{\pi x}{2} = 0$, *množina* $\mathcal{N}$ *je množina všech řešení rovnice* $\sin \pi x = 0$. *Najděte* $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}, \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$.

*[*$\mathcal{M} \cup \mathcal{N} = \mathbb{Z}$; $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ = *kladná a záporná lichá čísla ]*

**Příklad 2.10** *Najděte sjednocení a průnik intervalů:*

*a)* $\langle 2; 3)$ *a* $\langle -1; \infty)$

*b)* $(-\infty; 3\rangle$ *a* $(-8; 15)$

*[a)* $\langle -1; \infty), \langle 2; 3)$ *b)* $(-\infty; 15), (-8; 3\rangle$*]*

**Příklad 2.11** *Přímým důkazem dokažte:*

*a) Zvětší-li se číslo* $a$ *o* $x$, *zvětší se jeho druhá mocnina o* $x(2a + x)$.

*b) Zvětší-li se číslo* $x$ *o* $h$, *zvětší se jeho dekadický logaritmus o* $\log(1 + \frac{h}{x})$.

*c) Součet dvou čísel lichých je sudé číslo.*

**Příklad 2.12** *Sporem dokažte:*

*a) Rovnice* $ax = b$, *kde* $a \neq 0$, *má jediné řešení.*

*b) V každém trojúhelníku leží proti stejným úhlům stejné strany.*

**Příklad 2.13** *Metodou matematické indukce dokažte:*

*a)* $1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

*b)* $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$

*c)* $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3}n(2n - 1)(2n + 1)$

# 3 Úpravy agebraických výrazů

Algebraický výraz je zápis, který je správně vytvořen z matematických operačních znaků, čísel, proměnných, výsledků operací a hodnot funkcí. Při úpravách používame poznatků o mocninách, odmocninách, zlomcích a mnohočlenech tak, abychom výraz převedli na nejjednodušší tvar. Nutnou součástí řešení jsou podmínky, které stanoví, kdy jsou výrazy definovány.

**Pravidla pro počítání s mocninami:**

Pro každé reálné $r, s$ a každé $a > 0,\ b > 0$, (respektive pro každé celé $r, s$ a každé $a \neq 0,\ b \neq 0$) platí:

$$a^0 = 1 \qquad (a^r)^s = a^{rs}$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}, \qquad (ab)^r = a^r \cdot b^r$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

$$a^r : a^s = a^{r-s} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

**Pravidla pro počítání s odmocninami:**

Nechť $m, n \in \mathbb{N},\ a \geq 0$. Pak platí:

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$. Pro $a = 0$ je $\sqrt[n]{0} = 0$.
Pro $n = 1$ je $\sqrt[1]{a} = a$.
Pro $n = 2$ zapisujeme $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad a \geq 0 \wedge b \geq 0$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \quad a \geq 0 \wedge b > 0$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad a \geq 0$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \quad a \geq 0$$

**Rozklady nejjednodušších mnohočlenů:**

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

**Rozklad kvadratického trojčlenu na součin kořenových činitelů:**

Jsou-li $x_1, x_2$ kořeny kvadratického trojčlenu $ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$, pak platí:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Připomínáme **definici absolutní hodnoty:**

Každému reálnému číslu $a$ přiřazujeme právě jedno nezáporné číslo $|a|$ takto:

$$|a| = \left\langle \begin{array}{ll} a & \text{pro } a \geq 0 \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{array} \right.$$

Jestliže $a, b$ jsou reálná čísla, pak absolutní hodnota má tyto vlastnosti:

1) $|a| = max\{a, -a\}$

2) $|a| = |-a|$

3) $a \leq |a|$

4) $|a| = \sqrt{a^2}$

5) $|ab| = |a| \cdot |b|$

6) $|a^n| = |a|^n$, pro každé přirozené $n$

7) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, pro každé $b \neq 0$

8) $|a + b| \leq |a| + |b|$, (trojuhelníková nerovnost)

9) Nechť $\varepsilon > 0$, pak pro libovolná reálná čísla $a, x$ platí:

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \Longleftrightarrow |x - a| < \varepsilon$$

**Příklad 3.1** *Upravte výraz V na nejjednodušší tvar:*

*a)* $V = |-2x|^3 - |(-2x)^2| + |-2x|^2 + \dfrac{|2x|}{x}, \quad x \neq 0$

**Řešení:**

*Pro* $x > 0$ : $\quad V = [-(-2x)]^3 - 4x^2 + [-(-2x)]^2 + \dfrac{2x}{x} = \underline{\underline{8x^3 + 2}}$

*Pro* $x < 0$ : $\quad V = (-2x)^3 - 4x^2 + (-2x)^2 + \dfrac{-2x}{x} = \underline{\underline{-8x^3 - 2}}$

*b)* $V = \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x}$

**Řešení:**

$$V = \frac{x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1)}{x(x^2 - 2x - 3)} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x - 3)}{x(x + 1)(x - 3)} = \underline{\underline{\frac{x - 1}{x}}},$$

*platí pro* $x \neq 0, \ x \neq -1, \ x \neq 3.$

$$c)\ V = \frac{a^2b^{-2} - ab^{-1} + a^{-2}b^2 - a^{-1}b}{(a^{-1} - b^{-1})(ab^{-1} + a^{-1}b + 1)}$$

**Řešení:**

$$V = \frac{\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{b}{a}}{(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1)} \cdot \frac{a^2b^2}{a^2b^2} = \frac{a^4 - a^3b + b^4 - ab^3}{(b-a)(a^2 + b^2 + ab)} =$$

$$= \frac{a^3(a-b) - b^3(a-b)}{-(a-b)(a^2 + ab + b^2)} = \frac{(a-b)(a^3 - b^3)}{-(a^3 - b^3)} = \underline{\underline{b - a}},$$

*pro* $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq b$.

$$d)\ V = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2} + 1} + \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{1 - \sqrt{x^2}}$$

**Řešení:**

$$\frac{(x^3 + x^2 - x - 1)(1 - \sqrt{x^2}) + (x^3 - x^2 - x + 1)(1 + \sqrt{x^2})}{1 - x^2} =$$

$$= \frac{2x^3 - 2x - 2x^2|x| + 2|x|}{1 - x^2} = 2\frac{x(x^2 - 1) - |x|(x^2 - 1)}{1 - x^2} = 2(|x| - x);$$

*Pro* $x \neq 1 \ \wedge x \geq 0 \ :\ \underline{\underline{V = 0}}$

*Pro* $x \neq -1 \ \wedge x < 0 \ :\ \underline{\underline{V = -2x}}$

**Příklad 3.2** *Užitím rozkladu kvadratického trojčlenu převeďte na součin:*

$a)\ x^5 - x^4 - 56\,x^3 \qquad b)\ x^4 + 2\,x^2 - 3 \qquad c)\ x^4 - 13\,x^2 + 40$

[$a)\ x^3(x-8)(x+7);\ b)\ (x-1)(x+1)(x^2+3);\ c)\ (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{8})(x-\sqrt{8})$]

**Příklad 3.3** *Zjednodušte následující výrazy:*

$$a)\ \frac{x - 2y}{x + y} - \frac{2x - y}{y - x} - \frac{2x^2}{x^2 - y^2} \qquad b)\ \frac{a^2 - x^2}{a + b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{ax + x^2} \cdot \left(a + \frac{ax}{a - x}\right)$$

$$c)\ \left(\frac{2x}{x + y} + \frac{y}{x - y} - \frac{y^2}{x^2 - y^2}\right) : \left(\frac{1}{x + y} + \frac{x}{x^2 - y^2}\right)$$

$$d)\ \frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)}{\left(\frac{a^4}{b^2} - \frac{b^4}{a^2}\right) : (a^2 - b^2)}$$

$$e)\ 1 + \frac{(4 - a^2)^{-\frac{1}{2}} - (2 - a)^{-\frac{1}{2}}}{(2 + a)^{-\frac{1}{2}} + (4 - a^2)^{-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1 - a}{1 - \sqrt{2 - a}}$$

$$f)\ \left(\frac{x^2 + y^2}{x} + y\right) : \left[\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) \cdot \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}\right]$$

$g)\ \left(v+\dfrac{u-v}{1+uv}\right):\left(1-\dfrac{v(u-v)}{1+uv}\right)$ $\qquad h)\ \dfrac{\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x-1}{x^2-x+1}}{\frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{x-1}{x^2-x+1}}:\dfrac{x-\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x^2-x}{x+1}}$

[$a)\frac{x-y}{x+y},\ x\neq\pm y;\ b)\frac{a^2(a-b)}{x},\ x\neq 0\wedge x\neq -a\wedge a\neq -b;\ c)\ x,\ x\neq\pm y\wedge 2x\neq y;$

$d)\ 1,\ a\neq 0\wedge b\neq 0\wedge a\neq\pm b;\ e)\ \sqrt{a+2},\ a\in(-2;1)\cup(1;2);$

$f)\ \frac{xy^2}{x-y},\ x\neq y\wedge x\neq 0\wedge y\neq 0;\ g)\ u,\ uv\neq -1;\ h)\ \frac{1}{x^3},\ x\neq 0\wedge x\neq -1$]

**Příklad 3.4** *Usměrněte zlomky:*

$a)\ \dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ $\qquad b)\ \dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}$

[$a)\ 5+2\sqrt{6};\ b)\ \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}, x>2$]

# 4 Rovnice

## 4.1 Rovnice lineární, kvadratické, s absolútní hodnotou, parametrické

Jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ funkce proměnné $x$ definované na množině $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}$, pak úloha najít všechna $x\in\mathcal{D}$, pro něž $f(x)=g(x)$, znamená řešit rovnici o jedné neznámé.

**Lineární rovnici** o jedné neznámé $x\in\mathbb{R}$ lze psát ve tvaru

$$ax+b=0,$$

kde $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}, a\neq 0$. Má právě jeden kořen $x=-\frac{b}{a}$.

Graficky tento kořen určíme jako průsečík přímky $y=ax+b$ s osou x.

**Příklad 4.1** *V oboru reálných čísel řešte rovnici*

$$\frac{2(x-1)}{11}-\frac{x-3}{2}=9-\frac{5(x+1)}{8}.$$

**Řešení:**

*Celou rovnici vynásobíme* $8\cdot 11$, *tím se zbavíme zlomků:*

$$16(x-1)-44(x-3)=792-55(x+1)$$

*a po roznásobení je:*

$$16x-16-44x+132=792-55x-55,$$

*sloučíme* $-28x+116=737-55x$,

*k oběma stranám rovnice přičteme* $55x - 737$

$$27x - 621 = 0$$

*a to je rovnice tvaru* $ax + b = 0$. *Takže*

$$x = \frac{621}{27} = \underline{\underline{23.}}$$

*Nemusíme provádět zkoušku, veškeré úpravy (násobení rovnice nenulovým číslem, přičítání stejného čísla k oběma stranám rovnice) jsou ekvivalentní. Zkouška pak má jen charakter kontroly výpočtu.*

**Příklad 4.2** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *rovnici:*

*a)* $2 + \dfrac{3}{x+7} = \dfrac{x+10}{x+7}$ *b)* $\dfrac{3+2x}{2} - (\dfrac{7}{6} - \dfrac{12x-1}{3}) = 5x.$

**Řešení:**

*a) Řešíme za předpokladu* $x + 7 \neq 0$, *tzn.* $x \neq -7$, *úpravou:*

$$\begin{aligned} 2(x+7)+3 &= x+10 \\ 2x+14+3 &= x+10 \\ x &= -7 \qquad \textit{což je spor} \Rightarrow \underline{\underline{x \in \{\ \}}} \end{aligned}$$

*b) Zbavíme se zlomků*

$$\begin{aligned} 3(3+2x) - 7 + 2(12x-1) &= 30x \\ 9 + 6x - 7 + 24x - 2 &= 30x \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

*Rovnice má nekonečně mnoho řešení* $\underline{\underline{x = t, t \in \mathbb{R}.}}$

**Kvadratickou rovnici** o jedné neznámé $x \in \mathbb{R}$ lze psát ve tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Kořeny této rovnice vypočítáme pomocí diskriminantu $D = b^2 - 4ac$.

Pro $D > 0$ dostaneme dva reálné různé kořeny $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Pro $D = 0$ dostaneme jeden dvojnásobný kořen $x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$.

Pro $D < 0$ nemá rovnice v $\mathbb{R}$ řešení.

Graficky kořeny určíme jako průsečíky paraboly $y = ax^2 + bx + c$ s osou $x$.

**Příklad 4.3** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *následující kvadratické rovnice:*

*a)* $x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \dfrac{-4 \pm 6}{2} \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 1}} \vee \underline{\underline{x_2 = -5}}$

*b)* $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \underline{\underline{3}}$ *dvojnásobný kořen*

*c)* $5x^2 - 4x + 8 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-160}}{10}$ *v* $\mathbb{R}$ *nemá rovnice řešení*

*d)* $x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x+6) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}} \vee \underline{\underline{x_2 = -6}}$

*e)* $5x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (\sqrt{5}x - 2)(\sqrt{5}x + 2) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5}}} \vee \underline{\underline{x_2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5}}}$

*f)* $x^2 + 16 = 0$ *v* $\mathbb{R}$ *neřešitelná rovnice*

**Příklad 4.4** *Napište kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou* $x_1 = -3\sqrt{3}$ *a* $x_2 = 2\sqrt{3}$.

**Řešení:**

$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Rightarrow (x + 3\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x^2 + \sqrt{3}x - 18 = 0}}$

*Nebo podle vztahů mezi kořeny* $x_1, x_2$ *a koeficienty* $p, q$ *kvadratické rovnice*

$$x^2 + px + q = 0 \quad \textit{kde} \quad x_1 + x_2 = -p,\ x_1 \cdot x_2 = q$$

*pak*

$$x^2 + (+3\sqrt{3} - 2\sqrt{3})x - 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 0$$

*a úpravou dostaneme*

$$\underline{\underline{x^2 + \sqrt{3}x - 18 = 0}}.$$

Při řešení **rovnic s absolutní hodnotou** vycházíme z definice absolutní hodnoty a řešíme rovnice v intervalech, které dostaneme pomocí tzv. kritických bodů.

**Příklad 4.5** *V oboru reálných čísel řešte rovnice s absolutními hodnotami:*

*a)* $3 + 4|x - 2| = 5x$ *b)* $|2x - 7| + |x - 2| = 3$

*c)* $3x - |2x - 1| = x + 1$ *d)* $|3x - 2| + 4 = 2x + 3$

**Řešení:**

*a) Pro* $x \in (-\infty, 2)$, *rovnice přejde v rovnici* $3 - 4(x - 2) = 5x$.
*Tato má řešení* $x = \dfrac{11}{9}$, *které patří do daného intervalu.*

*Pro* $x \in \langle 2, \infty) : \ 3 + 4(x-2) = 5x \Rightarrow x = -5 \notin \langle 2, \infty)$

*Sjednocení řešení pak je* $\underline{\underline{x = \dfrac{11}{9}}}$.

*b)* $x \in (-\infty, 2) : -2x + 7 - x + 2 = 3 \Rightarrow x = 2 \notin (-\infty, 2)$

$x \in \langle 2, \frac{7}{2}) : -2x + 7 + x - 2 = 3 \Rightarrow x = 2 \in \langle 2, \frac{7}{2})$

$x \in \langle \frac{7}{2}, \infty) : 2x - 7 + x - 2 = 3 \Rightarrow x = 4 \in \langle \frac{7}{2}, \infty)$

*Závěr:* $\underline{\underline{x \in \{2, 4\}}}$

*c)* $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) : 3x + 2x - 1 = x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin (-\infty, \frac{1}{2})$

$x \in \langle \frac{1}{2}, \infty) : 3x - 2x + 1 = x + 1 \Rightarrow 0 = 0$

*Závěr:* $\underline{\underline{x \in \langle \frac{1}{2}, \infty)}}$

*d)* $x \in (-\infty, \frac{2}{3}) : -3x + 2 + 4 = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{3}{5} \in (-\infty, \frac{2}{3})$

$x \in \langle \frac{2}{3}, \infty) : 3x - 2 + 4 = 2x + 3 \Rightarrow x = 1 \in \langle \frac{2}{3}, \infty)$

*Závěr:* $\underline{\underline{x \in \{1, \dfrac{3}{5}\}}}$

**Rovnice s parametrem** jsou rovnice, které kromě neznámých obsahují ještě další proměnné - parametry.

Řešení rovnic s parametry spočívá v určení kořenů v závislosti na parametrech a v úplném rozboru všech možností parametrů.

**Příklad 4.6** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *rovnici* $\quad x + 1 - \dfrac{2x + a + 1}{a} = \dfrac{a - x}{a}, \quad$ *kde* $a \in \mathbb{R}$ *je parametr.*

**Řešení:**

*Pro* $a = 0$ *rovnice nemá smysl.*
*Pro* $a \neq 0$ *dostaneme* $ax + a - 2x - a - 1 = a - x \Rightarrow$

$$(a-1)x = a + 1 = \begin{cases} \text{pro } a = 1: \ \ 0 \cdot x = 2, \ \text{spor} \\ \text{pro } a \neq 1: \ \ x = \frac{a+1}{a-1} \end{cases}$$

*Závěr:* $a = 0$ *rovnice nemá smysl*
$a = 1$ *rovnice nemá řešení*
$a \neq 0 \wedge a \neq 1$ *rovnice má jediné řešení* $\underline{\underline{x = \dfrac{a+1}{a-1}}}$

**Příklad 4.7** *Pro které hodnoty reálného parametru* $m$ *má kvadratická rovnice* $x^2 + 3x - 2m^2 + m + 3 = 0$ *o neznámé* $x \in \mathbb{R}$ *jeden kořen rovný nule?*
*Najděte druhý kořen.*

**Řešení:**

*Absolutní člen* $-2m^2 + m + 3 = 0 \Rightarrow m_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-4} \Rightarrow \underline{\underline{m = -1}} \vee \underline{\underline{m = \dfrac{3}{2}}}.$

*Druhý kořen* $\underline{\underline{x = -3.}}$

**Příklad 4.8** *Pro které hodnoty parametru $t$ má kvadratická rovnice* $2x^2 + tx + 2 = 0$ *reálné různé kořeny?*

**Řešení:**
*Reálné různé kořeny* $\Rightarrow D = t^2 - 16 > 0 \Rightarrow t^2 > 16 \Rightarrow |t| > 4 \Rightarrow$

$$\underline{\underline{t \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty)}}$$

**Příklad 4.9** *Na základě vět o absolutní hodnotě reálného čísla zjistěte, pro která čísla $x$ platí rovnosti:*

$a) |(x-2)(x-4)| = (x-2)(x-4)$ $\quad b) |(x-4)(x-3)| = |x-4||x-3|$

$c)\ |(x-2)(x-5)| = -(x-2)(x-5)$

$d)\ \left|\dfrac{x-0,5}{x-1,2}\right| = \dfrac{|x-0,5|}{|x-1,2|}$ $\quad e)\ |\dfrac{3-x}{x-2}| = \dfrac{3-x}{x-2}$

[$a)\ x \geq 4 \vee x \leq 2\ b)\ \forall x \in \mathbb{R}\ c)\ x \in \langle 2, 5\rangle;\ d)\ \forall x \in \mathbb{R} - \{1{,}2\}\ e)\ x \in (2, 3\rangle$]

**Příklad 4.10** *Rozhodněte, který z výroků je pravdivý:*

$a)\ -2 < x < 2 \iff |x| < 2$

$b)\ -1 \leq x < 3 \iff |x-1| \leq 2$

$c)\ |2x-1| < 3 \iff |x| < 4$

$d)\ x \in \langle -3; 5) \iff |x| < 5$

[*a) pravdivý; b) není pravdivý; c) není pravdivý; d) není pravdivý*]

**Příklad 4.11** *Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici* $\dfrac{1-x}{x-2} - \dfrac{x-2}{1-x} = -\dfrac{8}{3}.$

[$x_1 = \frac{5}{2} \vee x_2 = \frac{5}{4}$]

**Příklad 4.12** *Řešte v $\mathbb{R}$ následující rovnice:*

$a)\ x^2 + 2|x-1| - 6 = 0$ $\quad b)\ |2x+1| - |2x| + 1 = 2x$

$c)\ \dfrac{x+3}{x-3} + \dfrac{x-1}{x-5} = 4$ $\quad d)\ 3x^2 - 5x - 2 = 0$

$e)\ x^2 - 0,2x + 0,01 = 0\ f)\ 2(1-x)^2 = x - 3$

[$a)\ x_1 = 1 - \sqrt{5} \vee x_2 = 2;\ b)\ x = 1; c)\ x_1 = 9 \vee x_2 = 4;\ d)\ x_1 = 2 \vee x_2 = -\frac{1}{3};$

*e)* $x_{1,2} = 0, 1$ *f)* $x \in \{\ \}$]

**Příklad 4.13** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *rovnici* $x - \dfrac{2}{a^3} = \dfrac{1}{a^2}(4x+1)$, *parametr* $a \in \mathbb{R}$.

[$a \neq 0$; *pro* $a = 2$ *rovnice nemá řešení;*
$a = -2$ *nekonečně mnoho řešení* $x = t, t \in \mathbb{R}$; $a \neq -2, 0, 2$ *je* $x = \frac{1}{a(a-2)}$]

**Příklad 4.14** *Určete reálnou hodnotu parametru a tak, aby rovnice* $6a - ax + 2x = 15, x \in \mathbb{R}$ *měla kladný kořen.*

[$x = \frac{3(2a-5)}{a-2} > 0, a \in (-\infty, 2) \cup (\frac{5}{2}, \infty)$]

**Příklad 4.15** *Pro které reálné hodnoty parametru má rovnice*

*a)* $x^2 - tx + 1 - 2t^2 = 0$ *reálné různé kořeny?*

*b)* $x^2 - x + m^2 - m = 12$ *jeden kořen roven nule?*

[*a)* $t \in (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$; *b)* $m = -3 \vee m = 4$; $x_1 = 0, x_2 = 1$]

**Příklad 4.16** *Najděte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou* $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 3$.

[$2x^2 - 7x + 3 = 0$]

## 4.2 Rovnice vyššího stupně a iracionální rovnice

**Algebraické rovnice vyššího stupně** řešíme převodem na součinový tvar, někdy jako rovnice binomické.

**Příklad 4.17** *V oboru reálných čísel řešte rovnice:*

*a)* $x^4 = 16$ *b)* $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

**Řešení:**

*a)* $x^4 - 16 = 0$, *upravíme na součinový tvar* $(x-2)(x+2)(x^2+4) = 0 \Rightarrow$ *reálné kořeny jsou* $\underline{\underline{x_1 = 2, x_2 = -2}}$

*b)* $x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x^2+1)^2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x \in \{\ \}}}$

**Iracionální rovnice** obsahují odmocniny z výrazů s neznámou. Odmocniny odstraňujeme neekvivalentní úpravou - umocněním, proto je nutně součastí řešení zkouška.

**Příklad 4.18** *V oboru reálných čísel řešte iracionální rovnici:*

*a)* $x - 4 = \sqrt{2x}$ *b)* $\sqrt{x-7} - \sqrt{5-x} = 3$

**Řešení:**

*a) Řešíme za předpokladu* $x - 4 \geq 0 \wedge 2x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 4$
*Umocněním dostaneme*

$$(x-4)^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}$$

*Podmínce řešitelnosti vyhovuje pouze* $x = 8$.
*Umocnění je neekvivalentní operace, provedeme zkoušku:*

$$\left.\begin{array}{l} L(8) = 8 - 4 = 4 \\ P(8) = \sqrt{16} = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{x = 8}}$$

*b) Řešíme za předpokladu* $x - 7 \geq 0 \wedge 5 - x \geq 0 \Rightarrow x \in \{\}$

$\Rightarrow$ *rovnice nemá řešení.*

**Příklad 4.19** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *iracionální rovnice:*

*a)* $\sqrt{1+x} - \sqrt{4-x} = 1$ *b)* $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}$

*c)* $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$ *d)* $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = 2$

*e)* $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} = \dfrac{3}{2}$

*[a)* $x = 3$; *b)* $x = \frac{5}{2}$; *c)* $x = 16$ *d)* $x \in \{\}$; *e)* $x = \frac{5}{3}$*]*

## 4.3 Soustavy lineárních rovnic

Několik rovnic o dvou a více neznámých, které mají být současně splněny, tvoří **soustavu rovnic**. Řešením soustavy je průnik řešení jednotlivých rovnic.

Při řešení soustavy se používají **ekvivalentní úpravy soustavy rovnic,** tj. takové úpravy, jimiž se nemění řešení soustavy. V takovém případě není nutná zkouška, ale je vhodná pro kontrolu.

**Přehled ekvivalentních úprav soustavy rovnic:**

Nahrazení libovolné rovnice soustavy rovnicí, která je s ní ekvivalentní, tj.má totéž řešení.

Nahrazení libovolné rovnice soustavy součtem této rovnice a libovolné jiné rovnice soustavy.

Dosazení neznámé nebo výrazu s neznámou z jedné rovnice soustavy do jiné její rovnice.

My se budeme zabývat **soustavou lineárních rovnic.** Základním typem metod řešení lineárních algebraických rovnic jsou eliminační metody, jejichž podstatou je postupná eliminace (vylučování) neznámých z rovnic soustavy. Podle způsobu, jimž eliminujeme jednu neznámou, rozlišujeme několik metod řešení:

**Metoda sčítací** - rovnice soustavy násobíme čísly zvolenými tak, aby se po sečtení vynásobených rovnic jedna neznámá vyloučila.

**Příklad 4.20** *Metodou sčítací řešte v* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *soustavu rovnic.*

$2x - y = 1$
$x + 3y = 11.$

**Řešení:**

*První rovnici vynásobíme třemi, dostávame rovnici* $6x - 3y = 31$. *Získali jsme tímto způsobem ekvivalentní soustavu*

$6x - 3y = 3$
$x + 3y = 11.$

*Rovnice teď sečteme, tím vyloučíme neznámou* $y$ *a pro neznámou* $x$ *dostáváme rovnici*

$$7x = 14,\ x = 2.$$

*Obdobně lze vyloučit neznámou* $x$ *vynásobením druhé rovnice minus dvěma a sečtením s první rovnicí. Dostáváme rovnici*

$$-7y = -21,\ y = 3.$$

*Řešením soustavy je uspořádaná dvojice* $[x, y]$, $\underline{\underline{x = 2,\ y = 3.}}$

**Metoda dosazovací** - vyjádříme jednu neznámou z jedné rovnice soustavy a dosadíme ji do dalších rovnic, čímž se jedna neznámá ze soustavy vyloučí.

**Příklad 4.21** *Metodou dosazovací řešte v* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *soustavu rovnic.*

$2x - y = 5$
$3x + 4y = -9.$

**Řešení:**

*Z první rovnice vyjádříme* $y = 2x - 5$, *a dosadíme do druhé rovnice. Dostáváme*

$$3x + 4(2x - 5) = -9,\ 11x = -9 + 20,\ x = 1.$$

*Potom* $y = 2x - 5 = 2 - 5 = -3$. *Dostali jsme řešení* $\underline{\underline{x = 1,\ y = -3.}}$

Metodu sčítací a dosazovací můžeme také kombinovat.

**Příklad 4.22** *V* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *řešte soustavy rovnic:*

| | | |
|---|---|---|
| *a)* $x + y = 4$ | *b)* $14x + 4y = 13$ | *c)* $2x - 3y = 5$ |
| $2x + 3y = 7$ | $7x + 2y = 12$ | $4x - 6y = 10$ |

**Řešení:**

$$a)\ \begin{array}{l} x + y = 4 \quad / \cdot (-3) \\ 2x + 3y = 7 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} -3x - 3y = -12 \\ 2x + 3y = 7 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 5,\ y = -1}}$$

$$b)\ \begin{aligned} 14x + 4y &= 13 \\ 7x + 2y &= 12 \quad / \cdot 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 14x + 4y &= 13 \\ 14x + 4y &= 24 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\textit{soustava nemá řešení}}}$$

$$c)\ \begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \quad / \cdot 2 \\ 4x - 6y &= 10 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 4x - 6y &= 10 \\ 4x - 6y &= 10 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ *soustava má nekonečně mnoho řešení* $\underline{\underline{x = t,\ y = \frac{1}{3}(2t - 5), t \in \mathbb{R}}}$

Při řešení více než dvou rovnic je nejvýhodnější použití **Gaussovy eliminační metody,** která spočívá v postupném převedení dané soustavy rovnic ekvivalentními úpravami na tzv. trojúhelníkový tvar.

**Příklad 4.23** *Užitím Gaussovy eliminační metody řešte v* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *soustavu rovnic.*

$$\begin{aligned} 9x + 5y - 2z &= 15 \qquad (1) \\ 8x + 6y + 3z &= 15 \qquad (2) \\ 3x - 7y + 4z &= 27 \qquad (3) \end{aligned}$$

**Řešení:**
*Nejprve soustavu upravíme tak aby v první rovnici koeficient u neznámé $x$ byl 1. Bylo by možné toho dosáhnout dělením první rovnice číslem 9, tím bychom ovšem dostali v první rovnici desetinná čísla. Raději od první rovnice odečteme druhou, čímž dostaneme soustavu rovnic:*

$$\begin{aligned} x - y - 5z &= 0 \qquad (1) \\ 8x + 6y + 3z &= 15 \qquad (2) \\ 3x - 7y + 4z &= 27 \qquad (3) \end{aligned}$$

*Dále v získané soustavě od druhé rovnice odečteme 8-krát první, a od třetí rovnice odečteme 3-krát první. Tím eliminujeme neznámou $x$ v těchto rovnicích a dostáváme tuto ekvivalentní soustavu:*

$$\begin{aligned} x - y - 5z &= 0 \qquad (1) \\ 14y + 43z &= 15 \qquad (2) \\ -4y + 19z &= 27 \qquad (3) \end{aligned}$$

*Nyní druhou rovnici dělíme čtrnácti, abychom u neznámé $y$ získali koeficient 1. Dále k třetí rovnici přičteme 4-krát druhou, čímž v ní eliminujeme neznámou $y$. Tím přecházíme k této soustavě rovnic:*

$$\begin{aligned} x - y - 5z &= 0 \qquad (1) \\ y + \frac{43}{14}z &= \frac{43}{15} \qquad (2) \\ 219z &= 219 \qquad (3) \end{aligned}$$

*Tato soustava má trojúhelníkový tvar a její řešení určíme snadno takto: Z třetí rovnice po*

*dělení číslem 219 dostáváme:* $z = 1$. *Dosazením do druhé rovnice vypočteme*

$$y = \frac{1}{14}(15 - 43) = -2$$

*a po dosazení do první rovnice vychází* $x = -2 + 5 = 3$.

*Dostali jsme řešení* $\underline{\underline{x = 3,\ y = -2,\ z = 1.}}$

**Příklad 4.24** *V* $\mathbb{R}^3$ *řešte soustavy rovnic:*

$$a)\ \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 7 \\ 3x - y + z &= 6 \\ x + y + z &= 4 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ x + 3y + 5z &= 2 \\ 2x + 5y + 8z &= 12 \end{aligned} \qquad c)\ \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + 4y + 6z &= 2 \\ x - y + z &= 4 \end{aligned}$$

**Řešení:**

*Soustavy budeme řešit Gaussovou eliminační metodou.*

$$a)\ \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 7 \\ 3x - y + z &= 6 \\ x + y + z &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 7 \\ -7y - 8z &= -15 \\ y + 2z &= 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 7 \\ y + 2z &= 3 \\ 6z &= 6 \end{aligned}$$

*Tato soustava má trojúhelníkový tvar a můžeme jej snadno vyřešit.*

*Postupně dostáváme* $z = 1,\ y = 3 - 2z = 1,\ x = 7 - 2y - 3z = 7 - 2 - 3 = 2.$

*Dostali jsme tedy řešení* $\underline{\underline{x = 2,\ y = 1,\ z = 1.}}$

$$b)\ \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ x + 3y + 5z &= 2 \\ 2x + 5y + 8z &= 12 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \\ y + 2z &= 10 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \\ 0 &= 9 \end{aligned}$$

*Z trojuhelníkového tvaru vidíme, že* <u>*soustava nemá řešení.*</u>

$$c)\ \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + 4y + 6z &= 2 \\ x - y + z &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 0 &= 0 \\ 3y + 2z &= -3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 3y + 2z &= -3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ *soustava má nekonečně mnoho řešení.*

*Zvolíme-li* $z = t$, *pak postupně máme*

$$y = -\frac{2}{3}t - 1 \ a\ x = 1 + \frac{4}{3}t + 2 - 3t = 3 - \frac{5}{3}t.$$

*Řešením soustavy potom bude uspořádaná trojice* $\underline{\underline{x = 3 - \frac{5}{3}t,\ y = -1 - \frac{2}{3}t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}.}}$

**Příklad 4.25** *Řešte v* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *soustavy lineárních rovnic:*

$$a)\ \begin{aligned} 8x - 3y + 12 &= 0 \\ 3x + 2y - 33 &= 0 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} 2x - 6y &= -2 \\ x - 3y &= 4 \end{aligned} \qquad c)\ \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x + 4y &= 8 \end{aligned}$$

[*a*) $x = 3, y = 12$; *b*) *nemá řešení;* *c*) $x = 4 - 2a, y = a, a \in \mathbb{R}$]

**Příklad 4.26** *Převedením na trojúhelníkový tvar řešte v* $\mathbb{R}^3$ *soustavy rovnic:*

*a*) $\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= 8 \\ 3x + 5y - z &= 10 \\ 7x - y + 7z &= 15 \end{aligned}$ *b*) $\begin{aligned} x + 4y - 3z &= 0 \\ x - 3y - z &= 0 \\ 2x + y - 4z &= 0 \end{aligned}$ *c*) $\begin{aligned} x + 2y + 4z &= 31 \\ 5x + y + 2z &= 29 \\ 3x - y + z &= 10 \end{aligned}$

[*a*) *nemá řešení;* *b*) $x = 13t/7, y = 2t/7, z = t$; *c*) $x = 3, y = 4, z = 5$]

**Příklad 4.27** *Převedením na trojúhelníkový tvar řešte v* $\mathbb{R}^4$ *soustavy rovnic:*

*a*) $\begin{aligned} 2x - 3y + 6z - u &= 1 \\ x + 2y - z \quad &= \text{‘}0 \\ x + 3y - z - u &= -2 \\ 9x - y + 15z - 5u &= 1 \end{aligned}$ *b*) $\begin{aligned} x + 2y - z - 2u &= -2 \\ 2x + y + z + u &= 8 \\ x - y - z + u &= 1 \\ x + 2y + 2z - u &= 4 \end{aligned}$

[*a*) *soustava nemá řešení;* *b*) $x = 1, y = 2, z = 1, u = 3$]

**Příklad 4.28** *Určete vzájemnou polohu tří rovin:*

$\alpha: \ 2x - 3y + z = 0$
$\beta: \ x + 2y - z - 3 = 0$
$\gamma: 2x + y + z - 12 = 0$

[*roviny se protínají v bodě* $[2, 3, 5]$]

**Příklad 4.29** *Užitím Gaussovy eliminační metody řešte v* $\mathbb{R}^3$ *soustavu rovnic v závislosti na parametru* $a$.

$2x + 9y + 2z = 7a - 4$
$3x + 3y + 4z = 3a - 6$
$4x - 6y + 2z = -a - 8$

[$[x, y, z] = [a - 2, 2a/3, -a/2]$]

# 5 Řešení nerovnic

## 5.1 Operace s nerovnicemi

Jsou-li $f$ a $g$ funkce proměnné $x$ definované na množině $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, pak úloha:
"najděte všechna $x \in \mathcal{D}$, která po dosazení do jednoho ze vztahů:

$$f(x) < g(x),\ f(x) > g(x),\ f(x) \leq g(x),\ f(x) \geq g(x)$$

dají pravdivou nerovnost"znamená řešit nerovnici s neznámou $x$.

Při řešení nerovnic používáme ekvivalentní úpravy:

1. Záměna stran nerovnice se současnou změnou znaku nerovnice:

   $f(x) < g(x) \Leftrightarrow g(x) > f(x)$

2. Přičtení konstanty nebo funkce $h(x)$, definované v $\mathcal{D}$, k oběma stranám nerovnice:

   $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$

3. Násobení nenulovou konstantou nebo funkcí $h(x)$ definovanou v $\mathcal{D}$ :

   *a)* $h(x) > 0$ pro $x \in \mathcal{D} : f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) < g(x)h(x)$

   *b)* $h(x) < 0$ pro $x \in \mathcal{D} : f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) > g(x)h(x)$

4. Umocnění pro případ nezáporných stran nerovnice:

   $0 \leq f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^n(x) < g^n(x), n \in \mathbb{N}$

5. Odmocnění pro případ nezáporných stran nerovnice:

   $0 \leq f(x) < g(x) \Leftrightarrow \sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{g(x)}, n \in \mathbb{N}$

Pokud používáme při řešení nerovnic ekvivalentní úpravy, není potřeba provádět zkoušku, snad jen pro vyloučení vlastních chyb.

### Klasifikace nerovnic

Elementární nerovnice s neznámou $x$ můžeme rozdělit (podobně jako rovnice) podle toho, v jaké pozici se v dané nerovnici nachází neznámá. Rozlišujeme nerovnice lineární a kvadratické, nerovnice s absolutní hodnotou, exponenciální a logaritmické nerovnice, iracionální nerovnice.

Postup řešení pro jednotlivé typy nerovnic ukážeme na příkladech.

## 5.2 Lineární nerovnice

**Příklad 5.1** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *nerovnici*

$$\frac{2x-17}{4} - \frac{8-x}{2} - 2 \leq x - 4 + \frac{x}{8}.$$

**Řešení:**

*Odstraníme zlomky a upravíme roznásobením.*

$$\begin{aligned}
2(2x-17) - 4(8-x) - 16 &\leq 8(x-4) + x \\
4x - 34 - 32 + 4x - 16 &\leq 8x - 32 + x \\
4x + 4x - 8x - x &\leq -32 + 34 + 32 + 16 \\
-x &\leq 50 \setminus \cdot (-1) \\
x &\geq -50 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x \in \langle -50; \infty)}}
\end{aligned}$$

**Příklad 5.2** *Řešte v* $\mathbb{N}$ *nerovnici*

$$\frac{3x-1}{4} - \frac{5-6x}{2} - 2 \leq 8 + \frac{3x}{2}.$$

**Řešení:**

*Odstraníme zlomky a upravíme roznásobením, stejně jako když hledáme řešení nerovnice v* $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\frac{3x-1}{4} - \frac{5-6x}{2} - 2 &\leq 8 + \frac{3x}{2} \setminus \cdot 4 \\
3x - 1 - 2(5-6x) &\leq 32 + 2 \cdot 3x \\
3x - 1 - 10 + 12x &\leq 32 + 6x \\
3x + 12x - 6x &\leq 32 + 1 + 10 \\
9x &\leq 43 \\
x &\leq \frac{43}{9} \ \wedge \ x \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

*Hledáme řešení v oboru přirozených čísel. Dostaneme*

$$\underline{\underline{x \in \{1, 2, 3, 4\}}}$$

**Příklad 5.3** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *nerovnici v podílovém tvaru* $\dfrac{12-x}{x-4} > 0$.

**Řešení:**

$$\frac{12-x}{x-4} > 0 \Leftrightarrow \ [(12-x) > 0 \ \wedge \ (x-4) > 0] \ \vee \ [(12-x) < 0 \ \wedge \ (x-4) < 0]$$
$$[x < 12 \ \wedge \ x > 4] \ \vee \ [x > 12 \ \wedge \ x < 4]$$
$$4 < x < 12 \ \vee \ x \in \{\ \}$$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x \in (4; 12)}}$

***Jiný způsob řešení:***

*Najdeme tzv. nulové body čitatele a jmenovatele - to jsou body, ve kterých je polynom v čitateli nebo ve jmenovateli rovný nule - a v intervalech mezi nulovými body zjistíme znaménko čitatele, jmenovatele a nakonec celého zlomku.*

| | $(-\infty; 4)$ | $(4; 12)$ | $(12; \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $12-x$ | + | + | - |
| $x-4$ | - | + | + |
| *podíl* | - | + | - |

*Máme ostrou nerovnost, takže řešením naší nerovnice je* $\underline{\underline{x \in (4; 12).}}$

**Příklad 5.4** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *nerovnici* $\dfrac{2-x}{4+x} \leq 1.$

**Řešení:**

*Upravíme na podílový tvar:*

$$\frac{2-x-4-x}{4+x} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2(x+1)}{4+x} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x+1}{4+x} \geq 0.$$

*Můžeme využít nulových bodů čitatele a jmenovatele, pak dostaneme řešení*

$\underline{\underline{x \in (-\infty; -4) \cup \langle -1; \infty)}}$

*Danou rovnici můžeme řešit i jinak:*

$$\frac{2-x}{4+x} \leq 1 \ \backslash \cdot (4+x)$$

*a)* $4 + x > 0 \Rightarrow 2 - x \leq 4 + x \Rightarrow -2 \leq 2x \Rightarrow x \geq -1$

*Dostali jsme, že*

$$(x > -4 \ \wedge \ x \geq -1) \ \Rightarrow \ x \geq -1.$$

*b)* $4 + x < 0 \Rightarrow 2 - x \geq 4 + x \Rightarrow x \leq -1$

*Dostali jsme, že*

$$(x < -4 \ \wedge \ x \leq -1) \ \Rightarrow \ x < -4.$$

*Tedy* $x < -4 \vee x \geq -1$ *čili* $\underline{\underline{x \in (-\infty; -4) \cup \langle -1; \infty).}}$

## 5.3 Kvadratická nerovnice

**Příklad 5.5** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *nerovnici* $x^2 - 4x - 5 \geq 0$.

**Řešení:**

$x^2 - 4x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad [(x-5) \geq 0 \wedge (x+1) \geq 0] \quad \vee \quad [(x-5) \leq 0 \wedge (x+1) \leq 0]$

$$x \geq 5 \quad \vee \quad x \leq -1 \;\Rightarrow \underline{\underline{x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 5; \infty)}}$$

*Úlohu můžeme řešit i pomocí nulových bodů polynomu nebo také graficky:*

$y = x^2 - 4x - 5$ *je rovnice paraboly,*

*její vrcholový tvar je* $y + 9 = (x-2)^2$,

*vrchol je* $V[2; -9]$, *průsečíky s osou* $x$ :

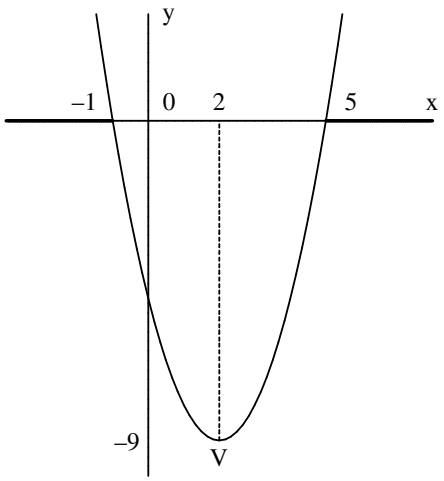
$P_1[-1; 0] \qquad P_2[5; 0]$,

*protože* $(x-2)^2 = 9 \quad \Leftrightarrow x - 2 = \pm 3$

$\Rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = -1.$

*Načrtneme graf.*

*Vidíme, že* $y \geq 0$ *pro* $\underline{\underline{x \in (-\infty; -1) \cup \langle 5; \infty)}}$.




***Příklad 5.6*** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *nerovnici* $\dfrac{x+3}{x-1} + \dfrac{x+4}{x-4} \geq 2$.

**Řešení:**

*Převedeme na podílový tvar* $\dfrac{(x+3)(x-4) + (x+4)(x-1) - 2(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-4)} \geq 0$ *a po úpravě čitatele* $\dfrac{12(x-2)}{(x-1)(x-4)} \geq 0$.

*Pomocí nulových bodů:*

| | $(-\infty; 1)$ | $(1; 2\rangle$ | $(2; 4)$ | $(4; \infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | - | + | + | + |
| $x-2$ | - | - | + | + |
| $x-4$ | - | - | - | + |
| *zlomek* | - | + | - | + |

$\underline{\underline{x \in (1; 2\rangle \cup (4; \infty)}}$

## 5.4 Nerovnice s absolutními hodnotami

**Příklad 5.7** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *nerovnici* $|12 - x| > 15 - |x + 3|$.

**Řešení:**

*Pomocí nulových bodů výrazů v absolutních hodnotách rozdělíme* $\mathbb{R}$ *na intervaly, ve kterých nerovnice řešíme.*

*Pro* $\underbrace{x \in (-\infty; -3\rangle : 12 - x > 15 + (x + 3) \Rightarrow x < -3.}_{x < -3}$

*Pro* $\underbrace{x \in (-3; 12\rangle : 12 - x > 15 - (x + 3) \Rightarrow 12 < 12.}_{x \in \{\ \}}$

*Pro* $\underbrace{x \in (12; \infty) : -12 + x > 15 - (x + 3) \Rightarrow x > 12.}_{x > 12}$

*Celé řešení rovnice* $\underline{\underline{x \in (-\infty; -3) \cup (12; \infty).}}$

## 5.5 Iracionální nerovnice a soustavy nerovnic

**Příklad 5.8** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *nerovnici* $\sqrt{x - 3} < 5$.

**Řešení:**

*Nerovnice má smysl pouze pro* $x - 3 \geq 0$ *t.j.* $x \geq 3$, *potom na obou stranách nerovnice jsou nezáporná čísla a lze umocnit:*

$$x - 3 < 25 \Rightarrow x < 28.$$

*Řešení je pak* $\underline{\underline{x \in \langle 3; 28).}}$

**Příklad 5.9** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *nerovnici* $x + 1 < \sqrt{6x - 14}$.

**Řešení:**

*Řešíme za předpokladu* $6x - 14 \geq 0 \wedge x + 1 \geq 0$, *tedy* $x \geq \frac{7}{3}$.

*Po umocnění* $x^2 + 2x + 1 < 6x - 14 \Rightarrow x^2 - 4x + 15 < 0$.

*Kvadratický trojčlen* $x^2 - 4x + 15$ *má komplexní kořeny* ($D < 0$).

*Parabola* $y = x^2 - 4x + 15$ *nikde neprotne osu* $x$, *proto řešení je* $\underline{\underline{x \in \{\ \}.}}$

**Příklad 5.10** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *soustavu nerovnic*

$$\frac{1}{x+1} > 0 \ \wedge \ x^3 - x^2 < 0.$$

**Řešení:**

*Ekvivalentní soustava je* $x + 1 > 0 \wedge x^2(x-1) < 0$.

*Na znaménko polynomu nemají vliv kořeny se sudou násobností.*

*Tedy* $\underline{\underline{x \in (-1; 0) \cup (0; 1).}}$

**Příklad 5.11** *Která přirozená čísla splňují nerovnici* $\frac{3}{2}x - \frac{2x+6}{3} > \frac{4x-2}{5}$.

[$x \in \{49, 50, 51, \ldots\}$ ]

**Příklad 5.12** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *nerovnice:*

*a)* $\frac{1-3x}{x+4} < 2$ *b)* $\frac{x+2}{1-x} \leq -2$ *c)* $\frac{3x-1}{x+1} < 2$ *d)* $\frac{x^2+x}{x^2+1} \leq 1$

[*a)* $(-\infty; -4) \cup (-\frac{7}{5}; \infty)$; *b)* $(1; 4\rangle$; *c)* $(-1; 3)$; *d)* $(-\infty; 1\rangle$]

**Příklad 5.13** *V množině celých záporných čísel řešte nerovnici*

$\frac{x+3}{2} - \frac{x-2}{3} - 5 > \frac{x-1}{2}$.

[$x \in \{-8, -9, -10, \ldots\}$ ]

**Příklad 5.14** *Jaké musí být číslo* $k$, *aby rovnice* $5kx - 9 = 10x - 3k$ *měla kladné řešení?*

[$2 < k < 3$ ]

**Příklad 5.15** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *kvadratické nerovnice:*

*a)* $2x^2 - 3x - 2 > 0$ *b)* $20x - x^2 \geq 36$

*c)* $x^2 + x + 1 < 0$ *d)* $x^2 - 0{,}2x + 0{,}01 \leq 0$

[*a)* $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$; *b)* $x \in \langle 2; 18\rangle$; *c)* $x \in \{\ \}$; *d)* $x = 0{,}1$]

**Příklad 5.16** *Pro která* $m \in \mathbb{R}$ *bude platit* $x^2 + 6x + (5m-1)(m-1) > 0$ *pro všechna reálná* $x$*?*

[$m \in (-\infty; -\frac{4}{5}) \cup (2; \infty)$ ]

**Příklad 5.17** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *nerovnice:*

*a)* $\dfrac{x+2}{x+3} - \dfrac{2x-1}{3x+1} \geq 0$ *b)* $x(x^2 - 7x + 10) > 0$

*c)* $\dfrac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - x - 2} < 0$ *d)* $\dfrac{x^4}{x+2} + \dfrac{x^4}{3-x} < \dfrac{(10x-6)x^2}{-x^2 + x + 6}$

[*a)* $x \in (-\infty; -3) \cup (-\frac{1}{3}; \infty)$; *b)* $x \in (0; 2) \cup (5; \infty)$;
*c)* $x \in (-1; 2) \cup (3; 6)$; *d)* $x \in (-\infty; -2) \cup (3; \infty)$]

**Příklad 5.18** *V oboru reálných čísel řešte nerovnice:*

*a)* $|x - 3| > 5$ *b)* $|x + 2| < 8$

[*a)* $x \in (-\infty; -2) \cup (8; \infty)$; *b)* $x \in (-10; 6)$ ]

**Příklad 5.19** *Pomocí absolutní hodnoty zapište nerovnice:*

*a)* $-2 < x < 2$ *b)* $1 \leq x \leq 3$ *c)* $-3 \leq x \leq -1$

[*a)* $|x| < 2$; *b)* $|x - 2| \leq 1$; *c)* $|x + 2| \leq 1$ ]

**Příklad 5.20** *Najděte množinu všech řešení nerovnic s absolutní hodnotou:*

*a)* $|x| + \dfrac{1}{x} < 0$ *b)* $\dfrac{|x|}{x} - 1 < 0$

*c)* $|x + 1| + |x| \leq 2$ *d)* $1 - |x| \leq |x + 1|$

*e)* $\dfrac{|2x - 2|}{2 - x} < 1$ *f)* $|x| \leq |x - 1|$

*g)* $|3x + 1| < 2x$ *h)* $|x + 2| - 2|2x + 4| \leq |3x - 1|$

*i)* $|x - 3| \cdot |x - 2| \cdot |x + 4| > 0$

[*a)* $x \in (-1; 0)$; *b)* $x \in (-\infty; 0)$; *c)* $x \in \langle -\frac{3}{2}; \frac{1}{2} \rangle$; *d)* $x \in \mathbb{R}$; *e)* $x \in (0; \frac{4}{3}) \cup (2; \infty)$;
*f)* $x \in (-\infty; \frac{1}{2} \rangle$; *g)* $x \in \emptyset$; *h)* $x \in \mathbb{R}$; *i)* $x \in \mathbb{R}, x \neq -4, 2, 3$ ]

**Příklad 5.21** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *iracionální nerovnice:*

*a)* $\sqrt{x^2 + x - 12} \leq 6 - x$ *b)* $x - 3\sqrt{x} - 4 \geq 0$

*c)* $\sqrt{x + 2} < \sqrt{2x - 8}$ *d)* $\sqrt{x - 2} + x > 4$

*e)* $\sqrt{-x^2 + 8x - 12} > \sqrt{3}$

[*a)* $x \in (-\infty; -4\rangle \cup \langle 3; \frac{48}{13} \rangle$; *b)* $x \in \langle 16; \infty)$; *c)* $x \in (10; \infty)$;
*d)* $x \in (3; \infty)$; *e)* $x \in (3; 5)$]

**Příklad 5.22** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *soustavu nerovnic*

$x^2 - 4x - 5 < 0 \quad \wedge \quad x^2 - 8x + 15 < 0.$

[$x \in (3;5)$]

**Příklad 5.23** *Najděte $x \in \mathbb{R}$, která splňují složenou nerovnost.*

*a)* $\dfrac{x}{2} - 1 < |x| < \dfrac{x}{2} + 1$ *b)* $|3x-1| < x < |3x+1|$

[*a)* $-\frac{2}{3} < x < 2$; *b)* $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$ ]

**Příklad 5.24** *Najděte zlomek, pro nějž platí:*

*zmenšíme-li jmenovatele o 1, je zlomek roven* $\dfrac{1}{2}$, *zvětšíme-li čitatele o 20, dostaneme zlomek z intervalu (2;3).*

[$\frac{4}{9}$, $\frac{5}{11}$ ]

# 6 Elementární funkce

## 6.1 Lineární funkce

**Lineární funkcí** nazýváme každou funkci $f$, která je daná předpisem

$$f : y = kx + q, \quad k, q \in \mathbb{R}.$$

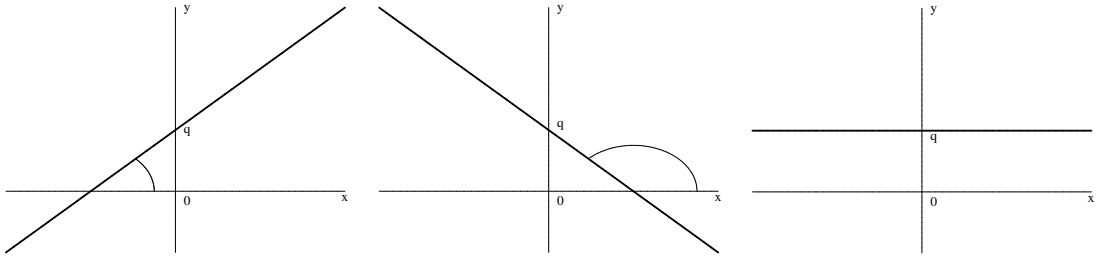
Grafem lineární funkce je vždy přímka různoběžná s osou $O_y$.

Definiční obor $\mathcal{D}$ lineární funkce $f$ (značíme $\mathcal{D}_f$) je $\mathbb{R}$.

Obor hodnot funkce $f$ pro $k \neq 0$ (značíme $\mathcal{H}_f$) je $\mathbb{R}$.

Význam konstant $k, q$ je vidět z následujícího obrázku:

Pro $k = 0$ dostáváme **konstantní funkci.**




| | | |
|---|---|---|
| $k > 0$ | $k < 0,$ | $k = 0$ |
| $k = \operatorname{tg}\alpha,\ \alpha < \frac{\pi}{2}$ | $k = \operatorname{tg}\alpha,\ \alpha > \frac{\pi}{2}$ | $k = \operatorname{tg}\alpha,\ \alpha = 0$ |
| rostoucí funkce | klesající funkce | konstantní funkce |

**Příklad 6.1** *Určete lineární funkci, jejímiž prvky jsou uspořádané dvojice* $[-2; -3], [-1; -4]$ *a jejíž obor funkčních hodnot je interval* $\langle -6; 0\rangle$.
*Sestrojte graf.*

**Řešení:**

*Je* $y = kx + q$ *a dosadíme souřadnice bodů.*

*Pak* $-3 = -2k + q \ \wedge\ -4 = -k + q$.

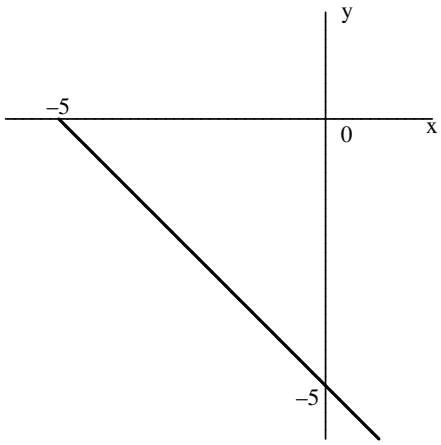
*Řešením této soustavy dostaneme*

$k = -1,\ q = -5.$

*Lineární funkce pak je*

$$\underline{\underline{y = -x - 5.}}$$

*Pro* $y \in \langle -6; 0\rangle$ *dostaneme krajní body úsečky* $[1; -6],\ [-5; 0]$.



**Příklad 6.2** *Nakreslete grafy těchto funkcí:*

*a)* $f_1 : \ y = -x + 3$

*Funkce je definována pro každé* $x \in \mathbb{R}$, *grafem lineární závislosti je přímka.*

$H(f_1) = \mathbb{R}$

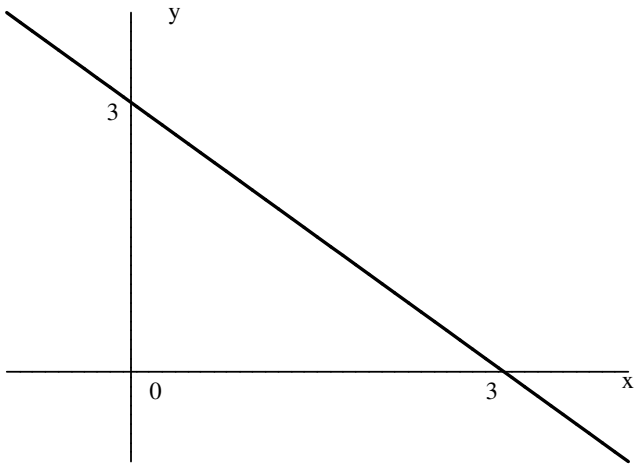
*Zvolíme* $x_1 = 0 \ \Rightarrow \ y_1 = 3$, *dále* $y_2 = 0 \ \Rightarrow \ x_2 = 3$.

*Tyto průsečíky se souřadnicovými osami nám určí přímku.*

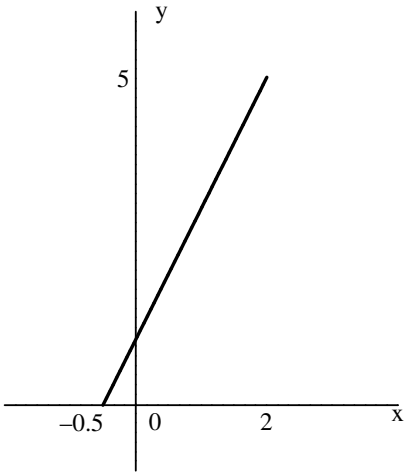
*b)* $f_2 : \ y = 2x + 1$ *pro* $x \in \langle -0{,}5; 2 \rangle$

*Příslušná úsečka má krajní body* $[-\frac{1}{2}; 0]$ *a* $[2; 5]$

$D(f_2) = \langle -0{,}5; 2 \rangle, \quad H(f_2) = \langle 0; 5 \rangle$




$f_1 : \ y = -x + 3$



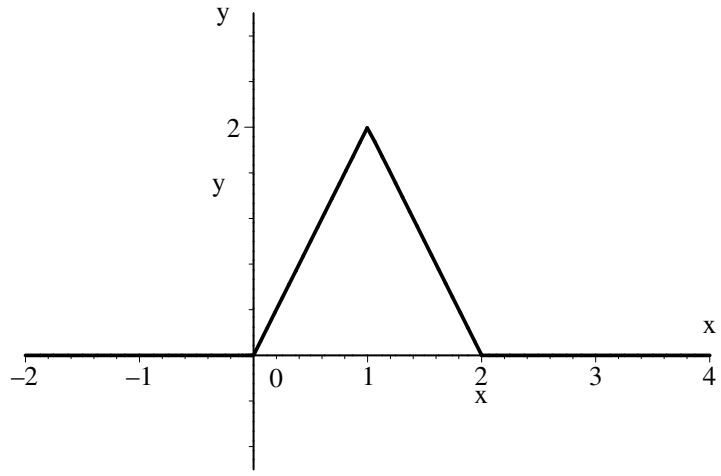

$f_2 : \ y = 2x + 1$

**Příklad 6.3** *Nakreslete graf funkce* $y = |x| - 2|x - 1| + |x - 2|$.

**Řešení:**

*Body* $x = 0, 1, 2$ *rozdělí osu* $x$ *na čtyři intervaly a určíme tvar funkce* $y$ *v jednotlivých intervalech:*

| | $(-\infty;0\rangle$ | $(0;1\rangle$ | $(1;2\rangle$ | $(2;\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert x\rvert$ | $-x$ | $x$ | $x$ | $x$ |
| $-2\lvert x-1\rvert$ | $-2(-x+1)$ | $-2(-x+1)$ | $-2(x-1)$ | $-2(x-1)$ |
| $\lvert x-2\rvert$ | $-x+2$ | $-x+2$ | $-x+2$ | $x-2$ |
| $y$ | $0$ | $2x$ | $-2x+4$ | $0$ |




$y = |x| - 2|x-1| + |x-2|$

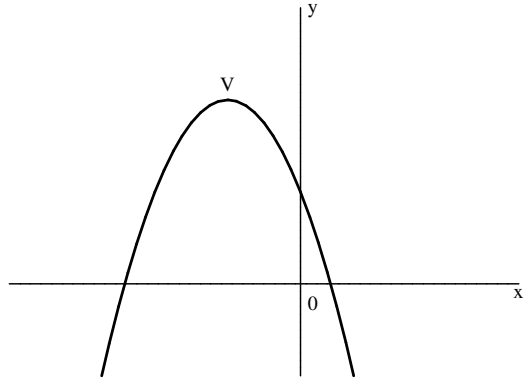
## 6.2 Kvadratická funkce

**Kvadratickou funkcí** nazýváme každou funkci, která je daná předpisem

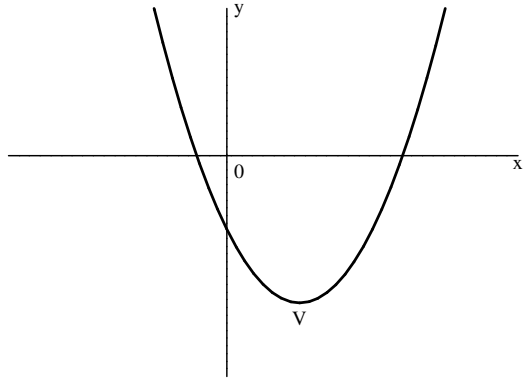
$$f:\ y = ax^2 + bx + c,\ \text{kde } a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Definiční obor kvadratické funkce $f$ je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Grafem kvadratické funkce je parabola s osou rovnoběžnou s osou $y$.




$f:\ y = ax^2 + bx + c,\ a < 0$




$f:\ y = ax^2 + bx + c,\ a > 0$

Máme-li sestrojit graf kvadratické funkce

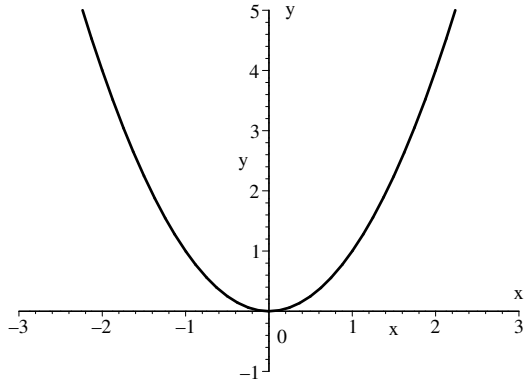
$$y = ax^2 + bx + c,$$

vyjdeme ze základní paraboly $y = x^2$ a postupnými transformacemi určíme souřadnice vrcholu. Je také vhodné určit průsečíky s osami.

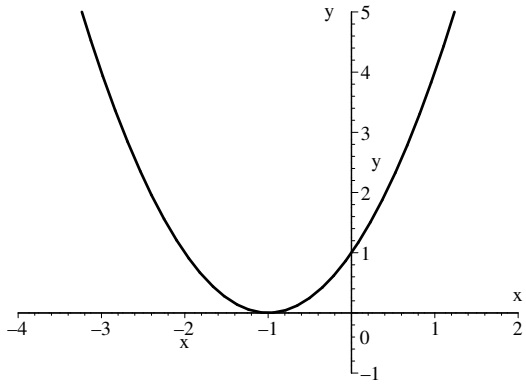
**Příklad 6.4** *Načrtněte graf kvadratické funkce* $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$.

**Řešení:**

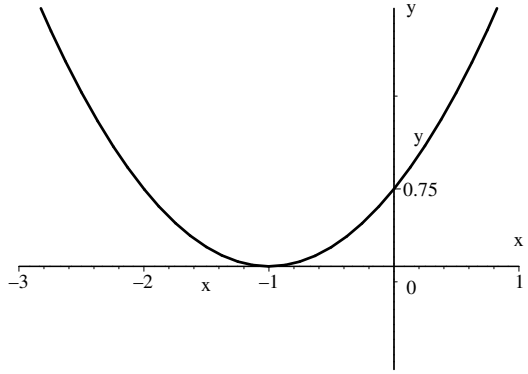
*Předpis upravíme na tvar* $y + 3 = \frac{3}{4}(x+1)^2$ *a postupně sestrojíme*
$y_1 = x^2,\ y_2 = (x+1)^2,\ y_3 = \frac{3}{4}(x+1)^2,\ y = \frac{3}{4}(x+1)^2 - 3$ *neboli* $y - 3 = \frac{3}{4}(x+1)^2$.



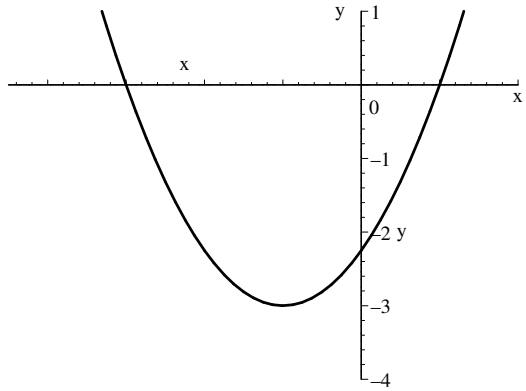

$y_1 = x^2$




$y_2 = (x+1)^2$




$y_3 = \frac{3}{4}(x+1)^2$




$y + 3 = \frac{3}{4}(x+1)^2$

*Obecně tedy:*

*Rovnoběžným posunutím paraboly* $y = ax^2$ *do vrcholu* $V(m;n)$ *dostaneme parabolu*

$$y - n = a(x-m)^2.$$

*Osa paraboly zůstává rovnoběžná s osou* $y$.

## 6.3 Mocninná funkce

**Mocninná funkce s přirozeným exponentem** je funkce

$$f : y = x^n,\ n \in \mathbb{N}, n > 2.$$

Definiční obor mocninné funkce je $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

**Příklad 6.5** *Načrtněte grafy funkcí*

$f_1 : y = x^3 - 1,\ f_2 : y = (x-1)^3,\ f_3 : y = \frac{1}{4}x^4,\ f_4 : y = |x^4 - 3|.$

**Řešení:**

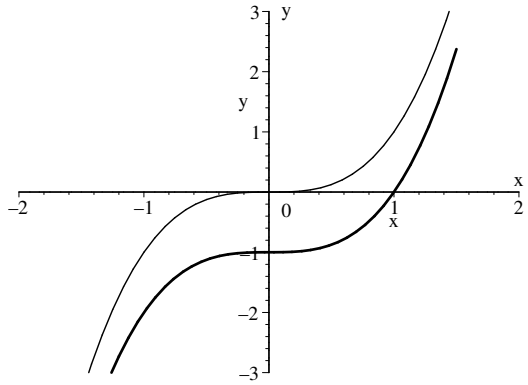
*Upravíme analogicky jako u kvadratické funkce:*

$f_1 : y + 1 = x^3$, *graf dostaneme posunutím grafu funkce* $y = x^3$ *do vrcholu* $V[0; -1]$.

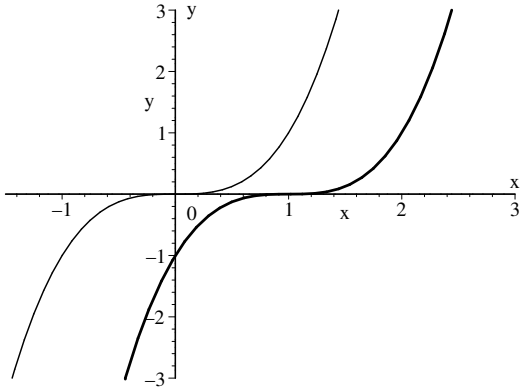
$f_2 : y + 0 = (x-1)^3,\ V[1; 0]$

$f_3 : y + 0 = \frac{1}{4}(x+0)^4,\ V[0; 0]$

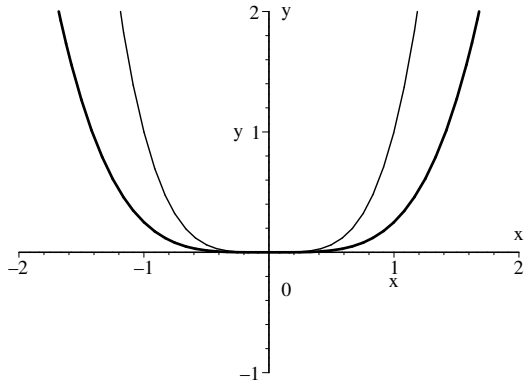
$f_4$ : *Nakreslíme postupně grafy* $y_1 + 3 = x^4$ *a pak* $y = |y_1|$.



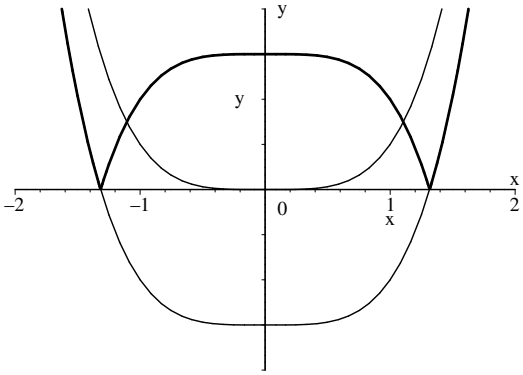

$f_1 : y + 1 = x^3$




$f_2 : y + 0 = (x-1)^3$




$f_3 : y = \frac{1}{4}x^4$




$f_4 : y = |x^4 - 3|$

**Příklad 6.6** *Bez výpočtu rozhodněte, které z čísel* $4^{300}$, $3^{400}$*je větší.*

**Řešení:**

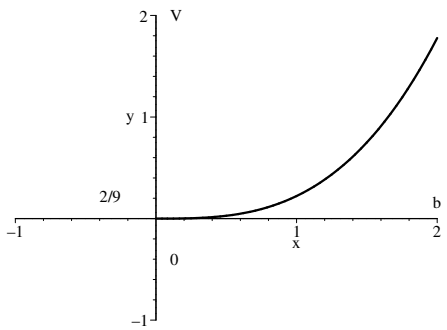
*Upravíme* $4^{300} = (4^3)^{100}$, $3^{400} = (3^4)^{100}$.

*Obě mocniny lze chápat jako hodnoty funkce* $y = x^{100}$.

*Tato funkce je pro* $x \in \langle 0 : \infty)$ *rostoucí,* $4^3 < 3^4$, *proto* $4^{300} < 3^{400}$.

**Příklad 6.7** *Uvažujme množinu všech kvádrů, jejichž délky hran jsou v poměru* $1 : 2 : 3$. *Určete funkci vyjadřující závislost objemu kvádru na délce jeho nejdelší hrany a načrtněte její graf.*

**Řešení:**




*Označme délku nejdelší hrany* $b$,

*pak* $a = \frac{b}{3}$; $c = \frac{2}{3}b$ *pro* $b > 0$.

*Pak* $V = \underline{\underline{\frac{2}{9}b^3}}$.

**Příklad 6.8** *Určete definiční obor funkcí:*

*a)* $y = \sqrt{2x - 6}$ *b)* $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

**Řešení:**

*a) Aby byla funkce* $y = \sqrt{2x - 6}$ *definovaná, musí být* $2x - 6 \geq 0$, *tedy* $x \geq 3$.

*Můžeme tedy psát, že*

$$\underline{\underline{D(f) =< 3, \infty)}}$$

*b) Definičním oborem funkce bude řešení nerovnice* $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$, $x \neq -1$

*Nulové body čitatele a jmenovatele jsou* $x = -1$ *a* $x = 1$.

*Dostaneme*

$$\underline{\underline{D(f) = (-\infty, -1) \cup < 1, \infty)}}$$

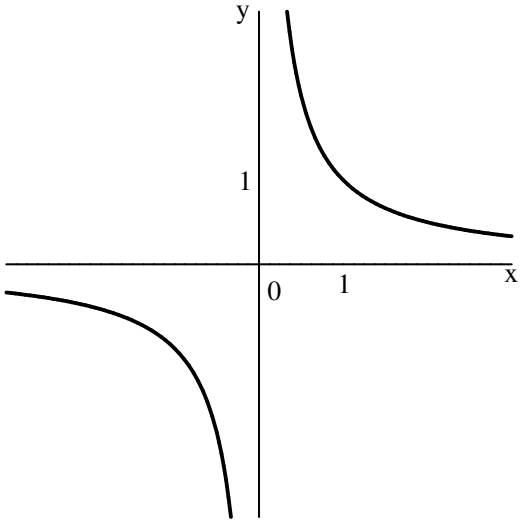
**Mocninná funkce s celým záporným exponentem** je funkce

$$f : y = x^{-n},\ n \in \mathbb{N}$$

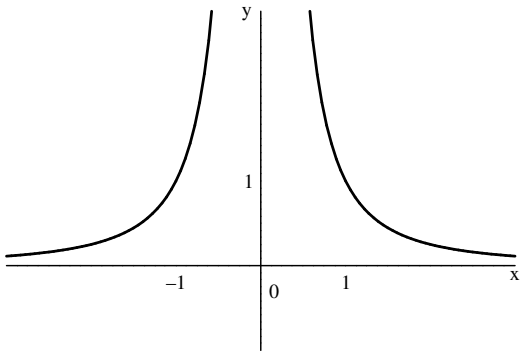
Definiční obor této funkce $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

**Příklad 6.9** *Nakreslete grafy funkcí* $f_1 : y = \frac{1}{x}$ *a* $f_2 : y = \frac{1}{x^2}$.

**Řešení:**




$f_1 : y = \frac{1}{x}$




$f_2 : y = \frac{1}{x^2}$

**Lineární lomená funkce** je funkce daná předpisem

$$f : y = \frac{ax+b}{cx+d},\ \text{kde } a, b, c, d \in \mathbb{R}, x \neq -\frac{d}{c}, c \neq 0.$$

Definiční obor této funkce je $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$.

Nejjednodušší případ nastane pro $a = d = 0$, pak $y = \frac{k}{x}$ a grafem je **rovnoosá hyperbola.**

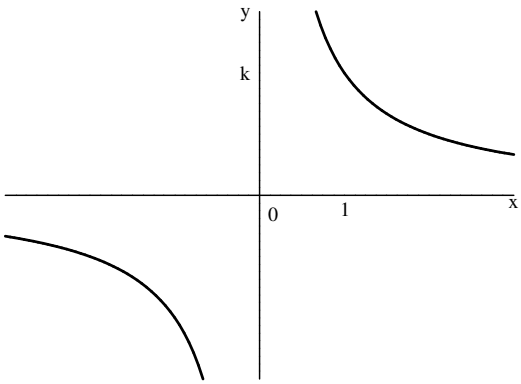
V případě, kdy $ad - cb \neq 0$ dostaneme po úpravě

$$y - \frac{a}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{x + \frac{d}{c}}$$

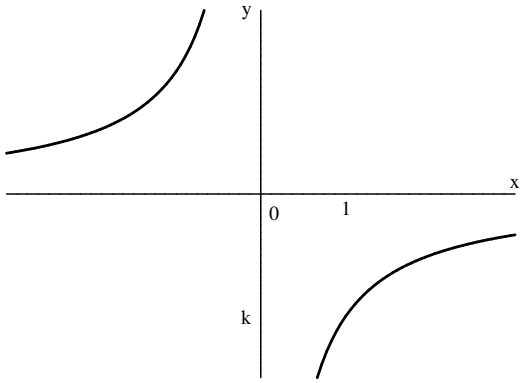
opět rovnoosou hyperbolu se středem v bodě $S[-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}]$, asymptoty procházejí středem a jsou rovnoběžné s osami souřadnými.

**Příklad 6.10** *Nakreslete graf funkce* $f : y = \dfrac{k}{x}$ *(nepřímá úměrnost).*

**Řešení:**




$f : y = \frac{k}{x}\ k > 0$




$f : y = \frac{k}{x}\ k < 0$

**Příklad 6.11** *V kartézském souřadnicovém systému nakreslete graf funkce*

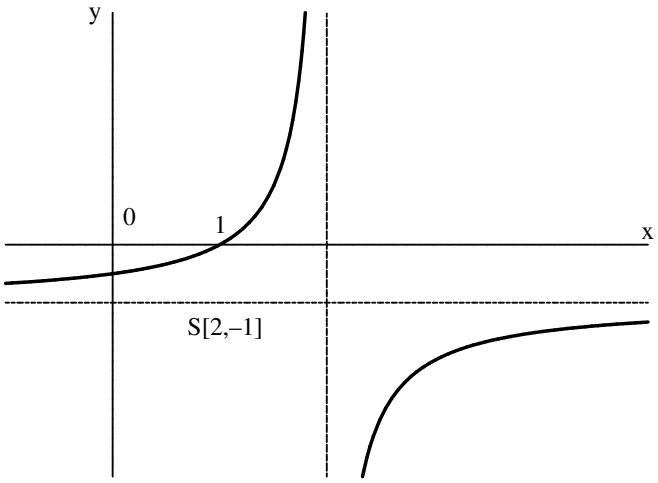
$f : y = \dfrac{1-x}{x-2}$.

**Řešení:**

*Upravíme* $y = \dfrac{1-x+2-2}{x-2} = \dfrac{-x+2-1}{x-2} = -1 - \dfrac{1}{x-2}$, *tedy* $y + 1 = \dfrac{-1}{x-2}$.

*Asymptoty procházejí bodem* $S[2; -1]$.

*Můžeme určit průsečíky se souřadnicovými osami:* $X[1; 0]$, $Y[0; -0{,}5]$



## 6.4 Exponenciální funkce a logaritmická funkce

**Exponenciální funkce o základu** $a > 0 \ \wedge \ a \neq 1$ je každá funkce

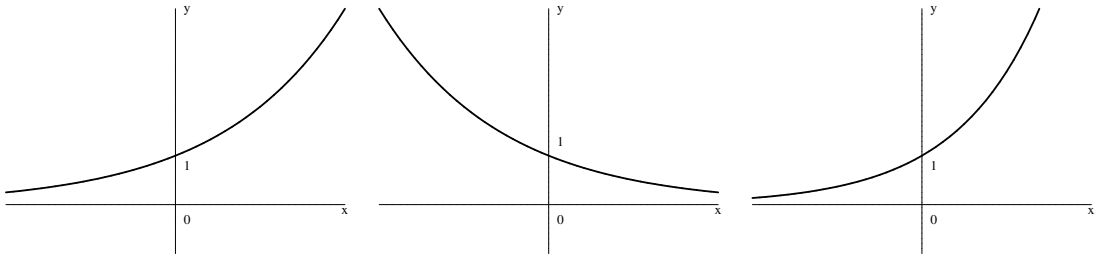
$$f : y = a^x.$$

Definiční obor této funkce $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Obor hodnot $\mathcal{H}_f = (0; \infty)$.

Pro případ $a = e$ dostaneme **přirozenou** exponenciální funkci.

Graficky:




$y = a^x, \ a > 1$ $\qquad$ $y = a^x, \ 0 < a < 1$ $\qquad$ $y = e^x$

Inverzní k exponenciální funkci $y = a^x$ je:

**Logaritmická funkce o základu** $a > 0 \ \wedge \ a \neq 1$. Značíme

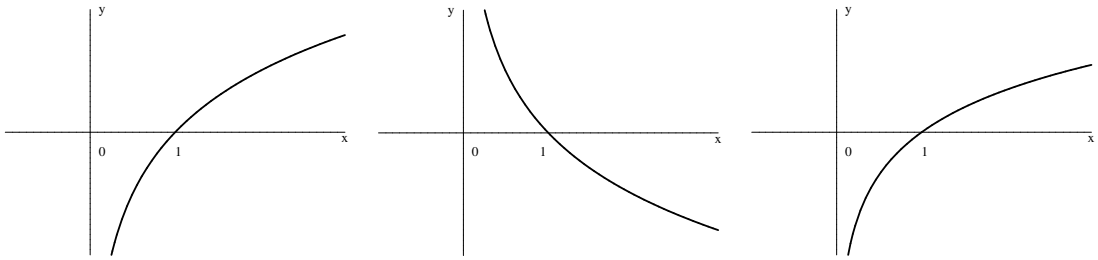
$$f : y = \log_a x.$$

Definiční obor $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$.

Obor hodnot $\mathcal{H}_f = \mathbb{R}$.

Pro základ $a = e$ dostaneme **přirozený** logaritmus, který používáme nejčastěji.

Graficky:




$y = \log_a x, \ a > 1$ $\qquad$ $y = \log_a x, \ 0 < a < 1$ $\qquad$ $y = \ln x$

**Příklad 6.12** *V téže kartézské soustavě souřadnic načrtněte grafy funkcí:*

$f_1 = 2^x,\ f_2 = 2^{-x},\ f_3 = 2^x + 2^{-x}$ *a* $f_4 = 2^x - 2^{-x}$.

**Řešení:**
*Sestavíme tabulku pro získání několika funkčních hodnot:*

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2^x$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $4$ |
| $2^{-x}$ | $4$ | $2$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $2^x + 2^{-x}$ | $\frac{17}{4}$ | $\frac{5}{2}$ | $2$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{17}{4}$ |
| $2^x - 2^{-x}$ | $-\frac{15}{4}$ | $-\frac{3}{2}$ | $0$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{15}{4}$ |

## 6.5 Logaritmické a exponenciální rovnice

**Logaritmické rovnice** jsou rovnice, v nichž se vyskytují logaritmy výrazů s neznámou $x \in \mathbb{R}$. Jestliže stanovíme podmínky řešitelnosti a řešíme ekvivalentními úpravami, pak zkouška není nutná.

**Příklad 6.13** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *logaritmické rovnice:*

*a)* $\log x + \dfrac{3}{\log x} = 4$ *b)* $\dfrac{1}{2}\log(2x-3) = \log(x-3)$

**Řešení:**

*a) Podmínky:* $x > 0 \wedge \log x \neq 0 \Rightarrow x \in (0,1) \cup (1,\infty)$.
*Rovnici vynásobíme* $\log x$, *dostaneme*

$$\log^2 x - 4\log x + 3 = 0$$

*Odtud* $\log x_1 = 3 \vee \log x_2 = 1$, *je tedy* $\underline{\underline{x_1 = 10^3 \vee x_2 = 10^1.}}$

*Obě řešení patří do oboru řešitelnosti.*

*b) Podmínky* $x > \frac{3}{2} \wedge x > 3 \Rightarrow x > 3$.

*Úpravou* $\log(2x-3) = 2\log(x-3)$.

*Pak* $2x - 3 = (x-3)^2$, *neboli* $2x - 3 = x^2 - 6x + 9$.

*Z toho* $0 = x^2 - 8x + 6 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 2$.

*Podmínkám vyhovuje pouze* $\underline{\underline{x_1 = 4.}}$

**Exponenciální rovnice** jsou rovnice, kde neznámá $x \in \mathbb{R}$ se vyskytuje v exponentu nějaké mocniny. Rovnice řešíme buď logaritmováním, nebo porovnáním exponentu při stejném základu, často až po úpravách.

**Příklad 6.14** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *exponenciální rovnice.*

*a)* $(\frac{4}{25})^{x+3} \cdot (\frac{125}{8})^{4x-1} = \frac{5}{2}$ *b)* $3 \cdot 2^x + 2^{3-x} = 10$ *c)* $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$

**Řešení:**

*a) Upravíme vše na mocniny o základu* $a = \frac{5}{2}$.

$$(\frac{5}{2})^{-2(x+3)} \cdot (\frac{5}{2})^{3(4x-1)} = \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$-2x - 6 + 12x - 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad 10x = 10 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 1}}$$

*b) Položíme* $2^x = y$, *pak* $3y + 8 \cdot \frac{1}{y} = 10$, *neboli* $3y^2 - 10y + 8 = 0$.
*Kořeny*

$$y_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ \frac{4}{3} \end{array} \right.$$

*Pak je* $2^{x_1} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 1.}}$

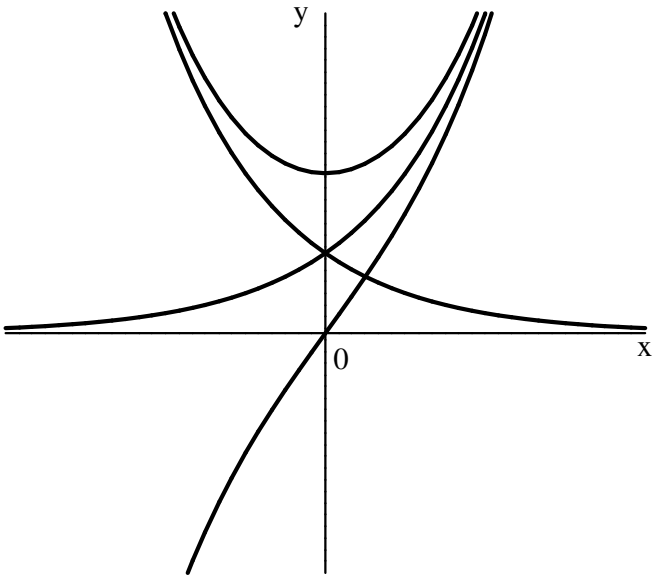
*Druhý kořen* $2^{x_2} = \frac{4}{3}$ *a logaritmováním* $\underline{\underline{x_2 = 2 - \log_2 3.}}$

*c) Položíme* $3^x = y$, *pak* $y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow (y-1)(y+3) = 0$.

$y_1 = 1 \Rightarrow 3^{x_1} = 1 \Rightarrow x_1 = 0$

$y_2 = -3$ *není možné, neboť* $3^x > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$.

*Zůstává* $\underline{\underline{x = 0.}}$



**Příklad 6.15** *Načrtněte grafy funkcí:*

*a)* $y = 2|x+1| - 3|x-1|,\ x \in \mathbb{R}$ *b)* $y = |x| + x,\ x \in \mathbb{R}$

*c)* $y = \sqrt{(x-1)^2},\ x \in \langle -3; \infty)$

[*a)* $y = x - 5, x \in (-\infty; -1);\ y = 5x - 1, x \in \langle -1; 1);\ y = -x + 5, x \in \langle 1; \infty);$
*b)* $y = 0, x \in (-\infty; 0);\ y = 2x, x \in \langle 0; \infty);$
*c)* $y = -x + 1, x \in \langle -3; 1);\ y = x - 1, x \in \langle 1; \infty)$]

**Příklad 6.16** *Úpravou rovnice paraboly určete souřadnice vrcholu a průsečíky $P_1$ a $P_2$ s osou $O_x$, průsečík $Q$ s osou $O_y$.*

*a)* $y = 2x^2 - 4x - 6$ *b)* $y = -x^2 + 4x$

[*a)* $y = 2(x-1)^2 - 8, V[1; -8], P_1[-1; 0], P_2[3; 0], Q[0; -6];$
*b)* $y = -(x-2)^2 + 4, V[2; 4], P_1[0; 0], P_2[4; 0], Q[0; 0]$ ]

**Příklad 6.17** *Sestrojte graf lineární lomené funkce:*

*a)* $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ *b)* $y = \dfrac{1+4x}{x}$ *c)* $y = \dfrac{2x}{2+x}$

***Příklad 6.18*** *Najděte všechna $p \in \mathbb{R}$, pro něž exponenciální funkce $\left(\dfrac{p}{p+2}\right)^x$ je*

*a) rostoucí,*

*b) klesající.*

[ *a)* $p \in (-\infty; -2);$ *b)* $p \in (0; \infty)$ ]

**Příklad 6.19** *V téže kartézské soustavě souřadnic nakreslete grafy funkcí:*

*a)* $y = 1{,}5^x,\ y = 1{,}5^{|x|},\ y = 1{,}5^{-|x|},\ y = -1{,}5^{|x|}$

*b)* $y = \log_3 x,\ y = \log_3(x-2),\ y = \log_3(x+2),\ y = 2 - \log_3 x$

**Příklad 6.20** *Najděte definiční obor těchto funkcí:*

*a)* $y = \log_a(x+3)$ *b)* $y = \log_3 x^2$ *c)* $y = \log_5(-x)$

*d)* $y = \ln\dfrac{x-2}{x+1}$ *e)* $y = \log_5\sqrt{4-x}$ *f)* $y = \sqrt{\log_3 x}$

*g)* $y = \log_{\frac{1}{10}}\sqrt{\frac{x}{3-2x}}$ *h)* $y = \ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

[*a)* $(-3; \infty);$ *b)* $x \in \mathbb{R}, x \neq 0;$ *c)* $(-\infty; 0);$
*d)* $(-\infty; -1) \cup (2; \infty);$ *e)* $(-\infty; 4);$ *f)* $\langle 1; \infty);$ *g)* $(0; \frac{3}{2});$ *h)* $(0; 1\rangle$]

**Příklad 6.21** *Najděte definiční obor následujících funkcí:*

*a)* $y = \sqrt{-x^2 + 7x - 12}$ *b)* $y = 2^{\sqrt{9-x^2}} + \log(3x - 5)$

*c)* $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}} + \ln\,(x+2)$ *d)* $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 + 5x - 3}}$

*e)* $y = \sqrt{1 - \log \frac{1-x}{1+x}}$ *f)* $y = \sqrt{x^2 + 2x + 10} + \sqrt{\log\,(2x+5)}$

[*a)* $\langle 3; 4\rangle$; *b)* $(\frac{5}{3}; 3\rangle$; *c)* $(1; \infty)$; *d)* $(-\infty; -3) \cup (\frac{1}{2}; \infty)$; *e)* $\langle -\frac{9}{11}; 1)$; *f)* $\langle -2; \infty)$]

**Příklad 6.22** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *logaritmické rovnice:*

*a)* $\log\,(4x+6) - \log\,(2x-1) = 1$ *b)* $2\log\,(x-2) = \log\,(14-x)$

*c)* $\log\,(x+1) + \log\,(x-1) = \log x + \log\,(x+2)$ *d)* $\frac{1}{2}\log\,(2x-3) = \log\,(x-3)$

[*a)* $x = 1$; *b)* $x = 5$; *c)* $x \in \{\ \}$; *d)* $x = 6$]

**Příklad 6.23** *Řešte v* $\mathbb{R}$ *exponenciální rovnice:*

*a)* $5^x + 1 - 3 \cdot 5^x = -49$

*b)* $3^{x+1} + 3^x = 4^{x-1} + 4^x$

*c)* $3 \cdot 2^{2x+1} + 2 \cdot 3^{2x+3} = 3 \cdot 2^{2x+4} - 3^{2x+2}$

*d)* $\dfrac{64}{25} \cdot \left(\dfrac{8}{5}\right)^{\frac{3}{x-1}} = \left(\dfrac{125}{512}\right)^{3-x}$

[*a)* $x = 2$; *b)* $x = 4,0408$; *c)* $x = -\frac{1}{2}$; *d)* $x = 4 \vee x = \frac{2}{3}$]

# 7 Vlastnosti funkce jedné proměnné

## 7.1 Vlastnosti a druhy funkcí

### Sudá funkce, lichá funkce

Nechť je $f$ funkce definována na množině $D(f) \subset \mathbb{R}$, taková, že pro každé $x \in D(f)$ je také $-x \in D(f)$.

Říkáme, že funkce $f$ je **sudá funkce,** jestliže pro každé $x \in D(f)$ je $f(x) = f(-x)$.

Říkáme, že funkce $f$ je **lichá funkce,** jestliže pro každé $x \in D(f)$ je $f(x) = -f(-x)$.

Graf sudé funkce je souměrný podle osy y, graf liché funkce je souměrný podle počátku.

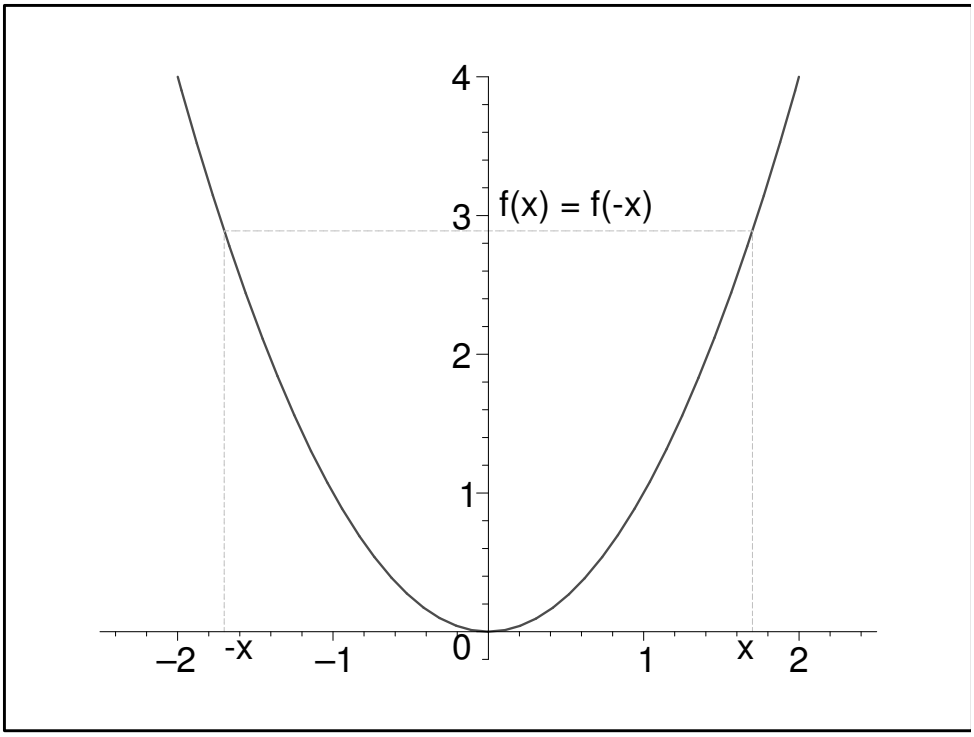
**Příklad 7.1** *Zjistěte zda funkce :*

*a)* $y = x^2$ *b)* $y = x^3$ *c)* $y = (x-1)^2$

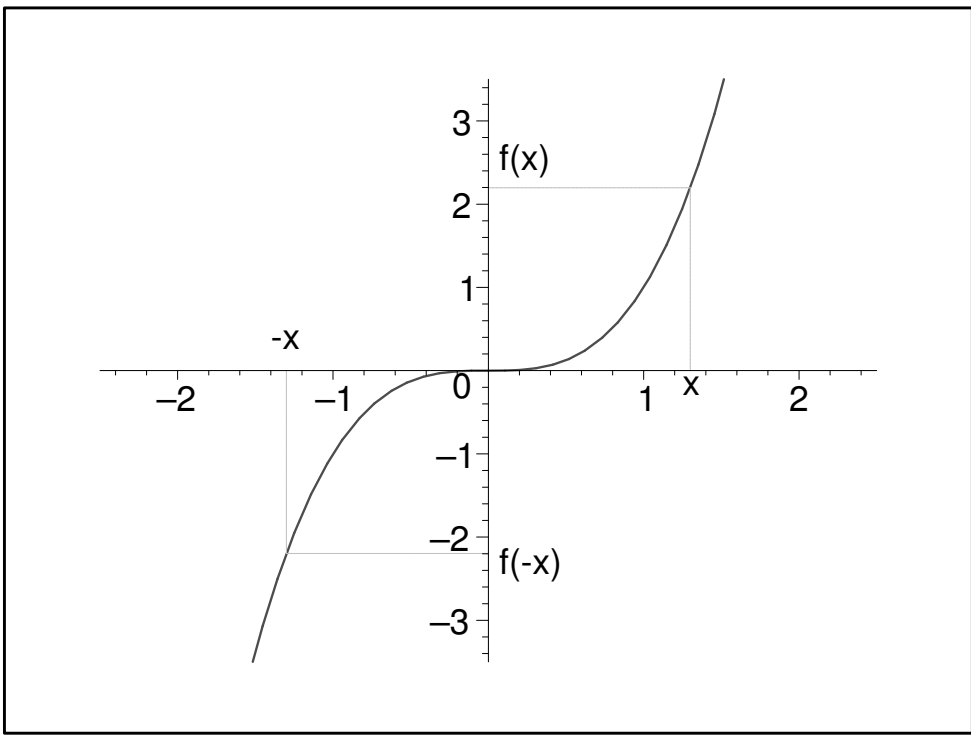
*je sudá nebo lichá.*

**Řešení:**

*a)* $D(f) = \mathbb{R}$, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. *Funkce je* <u>*sudá.*</u>




**Obrázek 7.1**: Sudá funkce




**Obrázek 7.2**: Lichá funkce

*b)* $D(f) = \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. *Funkce je* *lichá.*

*c)* $D(f) = \mathbb{R},\ f(-x) = (-x-1)^2 = (x+1)^2 \neq f(x),\ (x+1)^2 \neq f(-x)$.

*Funkce není ani sudá ani lichá.*

**Periodická funkce**

Funkce $f$ se nazývá **periodická funkce,** právě když existuje takové reálné číslo $p \neq 0$, že pro každé $x \in D(f)$ je také $x \pm p \in D(f)$ a platí

$$f(x \pm p) = f(x).$$

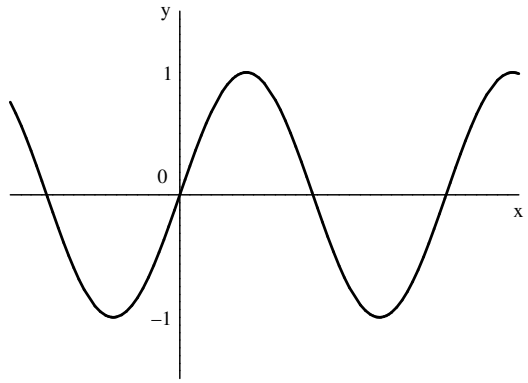
Číslo $p$ se nazývá **perioda funkce** $f$.

Jestliže $p$ je perioda funkce $f$, potom platí, že

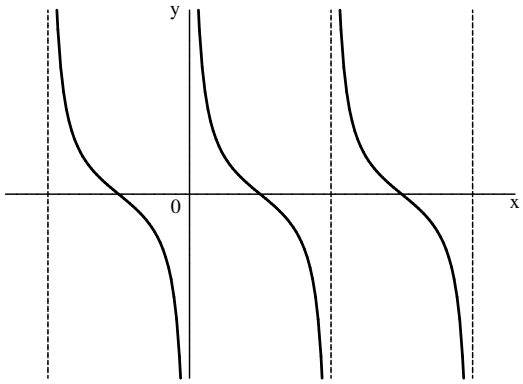
$$f(x + kp) = f(x)$$

pro každé $x \in D(f)$ a každé celé $k$. Má-li tedy periodická funkce $f$ periodu $p$, pak také každé číslo $kp$, ($k \neq 0$, celé) je rovněž periodou funkce $f$.

Nejvýznamnějšími příklady periodických funkcí jsou goniometrické funkce.




$y = \sin x$, perioda $p = 2\pi$




$y = \operatorname{cotg} x$, perioda $p = \pi$

**Omezená funkce**

Funkce $f$ se nazývá **zdola omezená na množině** $M \subset D(f)$, právě když existuje takové reálné číslo $d$, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \geq d$.

Funkce $f$ se nazývá **shora omezená na množině** $M \subset D(f)$, právě když existuje takové reálné číslo $h$, že pro všechna $x \in M$ je $f(x) \leq h$.

Funkce $f$ se nazývá **omezená na množině** $M \subset D(f)$, právě když je zdola omezená a shora omezená na množině $M$.

**Monotonní funkce**

Funkce $f$ se nazývá **rostoucí na množině** $M \subset D(f)$, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí:
Je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce $f$ se nazývá **klesající na množině** $M \subset D(f)$, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí:
Je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce $f$ se nazývá **neklesající na množině** $M \subset D(f)$, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí:
Je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkce $f$ se nazývá **nerostoucí na množině** $M \subset D(f)$, právě když pro každé dva prvky $x_1, x_2 \in M$ platí:
Je-li $x_1 < x_2$ pak $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Rostoucí a klesající funkce se souhrnně nazývají **ryze monotonní funkce na množině** $M$; nerostoucí a neklesající funkce se souhrnně nazývají **monotonní funkce na množině** $M$.

## 7.2 Inverzní funkce

Funkce $f$ s definičním oborem $D(f)$ se nazývá **prostá funkce** právě když pro každou dvojici $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Je-li $f$ prostá funkce s definičním oborem $D(f)$, a oborem hodnot $H(f)$, potom k tomuto zobrazení existuje zobrazení inverzní, které je opět prosté a zobrazuje množinu $H(f)$ na množinu $D(f)$. Je to **funkce inverzní k funkci** $f$ a značíme ji $f^{-1}$.

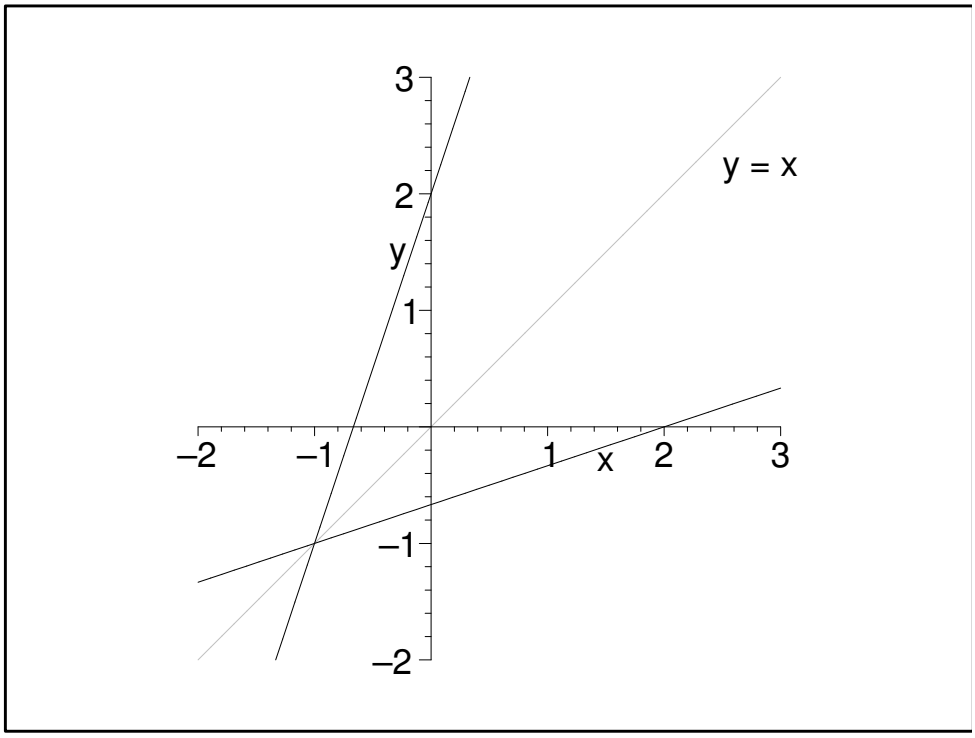
Platí, že $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$ a $x = f^{-1}(y)$ právě když $y = f(x)$.

Graf inverzní funkce $f^{-1}$ je souměrný s grafem funkce $f$ podle přímky o rovnici $y = x$.

**Příklad 7.2** *Určete funkci inverzní k funkci* $f : y = 3x + 2$.

**Řešení:**

*Funkce* $f$ *je lineární a je prostá.*




**Obrázek 7.3**: Inverzní funkce k funkci $f : y = 3x + 2$

*Inverzní funkci budeme hledat tak, že zaměníme* $x$ *a* $y$ *a z nové rovnice vyjádříme* $y$.

$f^{-1} : x = 3y + 2$

*Z toho* $\underline{\underline{f^{-1} : y = \frac{1}{3}(x - 2).}}$

*Pro definiční obor inverzní funkce platí, že* $D(f^{-1}) = H(f) = \mathbb{R}$.

**Příklad 7.3** *Určete funkci inverzní k funkcím :*

*a)* $y = \ln(2x+8)$ *b)* $y = \dfrac{2x-5}{x-1}$

**Řešení:**

*a) Definičním oborem funkce bude řešení nerovnice* $2x + 8 > 0$.

*Dostaneme* $D(f) = (-4, \infty)$.

*Funkce* $f$ *je logaritmická funkce složená s lineární. Je to funkce složená ze dvou prostých funkcí, tedy je i* $f$ *prostá funkce.*
*Zaměníme* $x$ *a* $y$ *a z této nové rovnice vyjádříme* $y$.

$$f^{-1} : x = \ln(2y+8)$$

*Inverzní funkce k logaritmické funkci je exponenciální funkce. Aplikujeme tedy exponenciální funkci na obě strany rovnice a dostaneme:*

$$e^x = 2y + 8 \qquad e^x - 8 = 2y$$

*Proto inverzní funkce k funkci* $f : y = \ln(2x+8)$ *je funkce*

$$\underline{\underline{f^{-1} : y = \frac{e^x - 8}{2}}}$$

*Pro definiční obor inverzní funkce platí, že*

$$D(f^{-1}) = \mathbb{R},$$

*a pro obor hodnot inverzní funkce platí, že*

$$H(f^{-1}) = D(f) = (-4, \infty).$$

*b) Aby byla funkce* $y = \dfrac{2x-5}{x-1}$ *definovaná, musí být* $x \neq 1$.

*Můžeme tedy psát, že* $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

*Funkce* $f$ *je lineární lomená funkce, a je i prostá (grafem této funkce je hyperbola).*
*Pro výpočet inverzní funkce zaměníme v zadání funkce* $x$ *a* $y$.

$$f^{-1} : x = \frac{2y-5}{y-1} \Rightarrow$$

$$x(y-1) = 2y - 5 \;\Rightarrow\; xy - x = 2y - 5 \;\Rightarrow\; xy - 2y = x - 5 \;\Rightarrow\; y(x-2) = x - 5$$

$$\underline{\underline{f^{-1} : y = \frac{x-5}{x-2}}}$$

*Pro definiční obor inverzní funkce platí, že* $x \neq 2$.

$$D(f^{-1}) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty) = H(f),$$

*a pro obor hodnot inverzní funkce platí, že*

$$H(f^{-1}) = D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty).$$

**Příklad 7.4** *Zjistěte zda je funkce :*

*a)* $y = \dfrac{x^3}{\sin x}$ *b)* $y = x^2 \sin x$ *c)* $y = \dfrac{\sin x}{x-1}$ *d)* $y = e^x \cos x$

*sudá nebo lichá.*

*[a) sudá b) lichá c) ani sudá ani lichá d) ani sudá ani lichá ]*

**Příklad 7.5** *Určete funkci inverzní k funkcím :*

*a)* $y = 3x - 4$ *b)* $y = 10^x + 5$ *c)* $y = \dfrac{2x+1}{3x-6}$

*[a)* $(x+4)/3$ *b)* $\log(x-5)$ *c)* $(6x+1)/(3x-2)$*]*

**Příklad 7.6** *Najděte příklad (načrtněte graf) funkce, která je :*

*a) omezená zdola na svém definičním oboru*

*b) omezená shora na svém definičním oboru*

*c) omezená shora i zdola na intervalu* $(0, 5)$

*d) rostouci na svém definičním oboru*

*e) klesající na intervalu* $(-6, 0)$

*f) periodická na svém definičním oboru*

*g) prostá na svém definičním oboru*

*h) není prostá na svém definičním oboru*

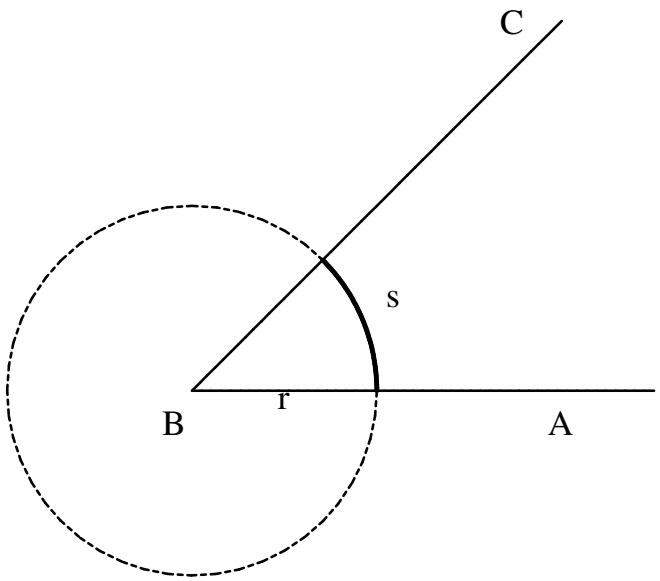
# 8 Goniometrické funkce

## 8.1 Oblouková míra

V matematice, ve fyzice a v technické praxi se používá na určování velikosti úhlu tzv. **oblouková míra.**
Je dán úhel $ABC$. Sestrojíme kružnici se středem v bodě $B$, (ve vrcholu úhlu). Jestliže $r$ je poloměr kružnice a $s$ je délka oblouku kružnice uvnitř úhlu $ABC$, potom velikost tohoto úhlu je $\frac{s}{r}$ radiánů.

$$\angle ABC = \frac{s}{r} \text{ rad.}$$

Toto číslo nezávisí na poloměru kružnice.




**Příklad 8.1** *Vyjádřete úhel* $15°$ *v obloukové míře.*

**Řešení:**

*Kružnice má délku* $2\pi r$ *a velikost úhlu* $360°$ *v radiánech je* $\dfrac{2\pi r}{r} = 2\pi$.

*Z toho* $1° = \dfrac{2\pi}{360} = \dfrac{\pi}{180}$ *radiánů.*

*Tedy* $15° = 15 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \underline{\underline{\dfrac{\pi}{12}}}$.

Dále budeme pracovat s orientovanými úhly. **Orientovaný úhel** si můžeme představit jako počáteční a koncovou polohu polopřímky (nejlépe kladné poloosy $O_x$) otáčející se kolem svého počátku a to v jednom ze dvou navzájem opačných smyslů. Buď proti pohybu hodinových ručiček, tak dostaneme kladné úhly (např. $\frac{\pi}{2}, 6\pi$, atd), nebo ve směru hodinových ručiček a tak dostaneme záporné úhly (např. $-\frac{\pi}{12}, -4\pi$, atd).

## 8.2 Goniometrické funkce

V kartézské souřadnicové soustavě sestrojme kružnici o středu v počátku a poloměru 1. Uvažujme orientovaný úhel o velikosti $\psi$ radiánů jehož vrchol je v počátku a počáteční rameno kladná poloosa $x$. Druhé rameno protne kružnici v bodě $P$. Potom definujeme **kosinus** úhlu $\psi$ jako $x$-ovou souřadnici bodu $P$. Označujeme $\cos\psi$.

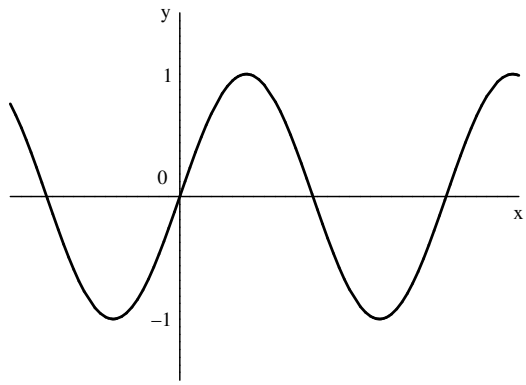
Podobně $y$-ová souřadnice bodu $P$ se nazývá **sinus** úhlu $\psi$. Označujeme $\sin\psi$.

Obě funkce jsou periodické, jejich nejmenší perioda je $2\pi$.

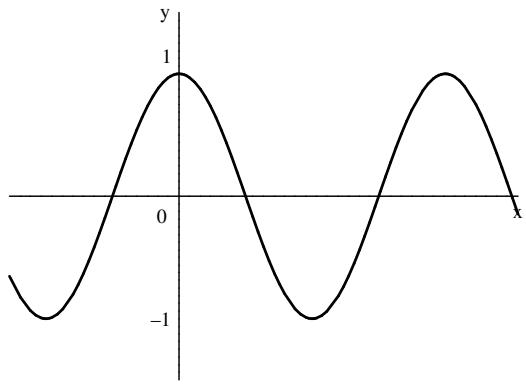
Definičním oborem obou funkcí je $\mathbb{R}$, oborem hodnot je $\langle -1; 1\rangle$.

Grafem je sinusoida (kosinusoida).

Snadno se dá ukázat, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.




$y = \sin x$




$y = \cos x$

Funkce $f : y = \sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ je lichá: $\sin(-x) = -\sin x$.

Funkce $f : y = \cos x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ je sudá: $\cos(-x) = \cos x$.

**Tangens** je funkce, která každému reálnému číslu $x$, pro něž je $\cos x \neq 0$, přiřadí číslo

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Definičním oborem této funkce je $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{2k+1}{2}\pi$, kde $k$ je celé číslo $\}$.

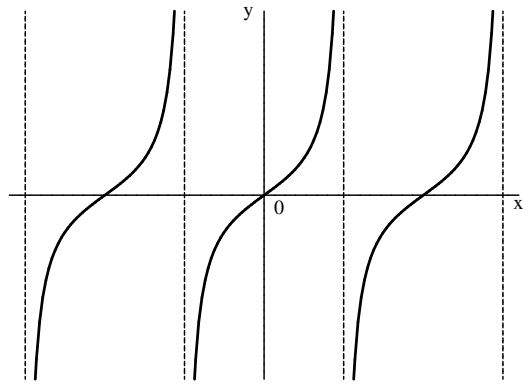
Oborem hodnot je $\mathcal{H} = \mathbb{R}$.

**Kotangens** je funkce, která každému reálnému číslu $x$, pro něž je $\sin x \neq 0$, přiřadí číslo

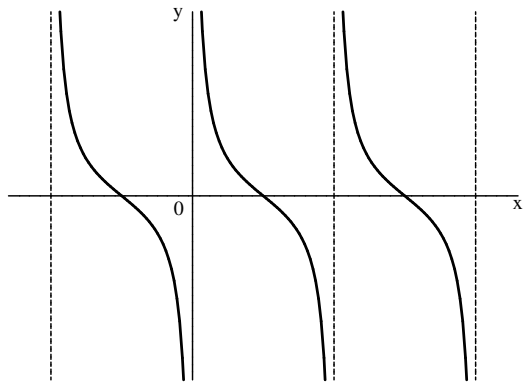
$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Definičním oborem této funkce je $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi$, kde $k$ je celé číslo $\}$.

Oborem hodnot je $\mathcal{H} = \mathbb{R}$.




$y = \operatorname{tg} x$




$y = \operatorname{cotg} x$

Funkce $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ jsou periodické funkce s periodou $\pi$.

Obě funkce jsou liché: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$ pro všechna $x$ z definičního oboru.

V následující tabulce jsou vypočteny hodnoty goniometrických funkcí pro některá $x \in \langle 0; 2\pi)$, které je vhodné si pamatovat.

**Tabulka 8.1**: Hodnoty goniometrických funkcí pro některé důležité úhly

| | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ | $-1$ |
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | | $0$ | |
| $\operatorname{cotg} x$ | | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | | $0$ |

Dále uvedeme některé důležité vzorce, které budou užitečné při řešení úloh souvisejících s goniometrickými funkcemi.

Pro každé $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ platí:

$\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x)$

$\cos x = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x)$

$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x)$ ; $\qquad \operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg}(\pi - x)$

**Příklad 8.2** *Vypočítejte hodnoty goniometrických funkcí v daných bodech :*

*a)* $\alpha = \dfrac{5}{3}\pi \qquad$ *b)* $\alpha = -\dfrac{2}{3}\pi \qquad$ *c)* $\alpha = \dfrac{25}{4}\pi$

**Řešení:**

*a)* $\alpha = \frac{5}{3}\pi = 2\pi - \frac{1}{3}\pi$

$\sin(2\pi - \frac{1}{3}\pi) = -\sin(\frac{1}{3}\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$

$\cos(2\pi - \frac{1}{3}\pi) = \cos(\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \underline{\underline{-\sqrt{3}}} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{3}}}$

*b)* $\alpha = -\frac{2}{3}\pi$

*Funkce* $\sin x,\ \cos x$ *jsou periodické s periodou* $2\pi$. *Platí:*

$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi) = \sin\frac{4}{3}\pi = \sin(\pi + \frac{1}{3}\pi) = -\sin(\frac{1}{3}\pi) = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$

$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi) = \cos\frac{4}{3}\pi = \cos(\pi + \frac{1}{3}\pi) = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \underline{\underline{\sqrt{3}}} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}}$

*c)* $\alpha = \frac{25}{4}\pi$

$\sin(\frac{25}{4}\pi) = \sin(\frac{1}{4}\pi + 6\pi) = \sin\frac{1}{4}\pi = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$

$\cos(\frac{25}{4}\pi) = \cos(\frac{1}{4}\pi + 6\pi) = \cos\frac{1}{4}\pi = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\alpha = \underline{\underline{1}}$

## Důležité vztahy a vzorce

Pro každé reálné $x$ platí:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Pro každé reálné $x$ a celé $k,\ x \neq k \cdot \frac{\pi}{2}$ platí:

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$$

Funkce dvojnásobného a polovičního argumentu

$\forall x \in \mathbb{R}:\ \sin 2x = 2\sin x \cos x;$

$\forall x \in \mathbb{R}:\ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\forall x \in \mathbb{R}:\ \left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}};$

$\forall x \in \mathbb{R}:\ \left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

Součtové vzorce

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \sin x - \sin y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ x, y \neq \frac{2k+1}{2}\pi: \ \operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$

**Příklad 8.3** *Vypočítejte* $\cos \dfrac{5}{12}\pi$.

**Řešení:**

$$\cos \frac{5}{12}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}}$$

**Příklad 8.4** *Vypočtěte hodnoty funkcí* $\cos\alpha$, $\sin(2\alpha)$, $\operatorname{tg}(2\alpha)$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, *jestliže* $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

**Řešení:**

$$|\cos\alpha| = \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{25} = \underline{\underline{\frac{24}{25}}}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25} \quad \Rightarrow \operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \underline{\underline{\frac{24}{7}}}$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow \ 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{1}{10}}}}$$

## 8.3 Goniometrické rovnice

**Goniometrické rovnice** jsou rovnice, které obsahují neznámou jako argument jedné nebo několika goniometrických funkcí.

**Příklad 8.5** *Vyřešte v* $\mathbb{R}$ *goniometrické rovnice:*

*a)* $2\sin(3x) = \sqrt{2}$ *b)* $\sin^2 x - \cos^2 x = 0{,}5$ *c)* $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0$

**Řešení:**

*a) Upravíme:* $\sin(3x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

*Funkce sinus má kladné hodnoty v I. a II. kvadrantu.*

*Tedy* $3x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad 3x = \dfrac{3}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. *Odtud*

$$\underline{\underline{x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi}},\ k \in \mathbb{Z}.$$

*b) Upravíme levou stranu rovnice:*

$$\sin^2 x - \cos^2 x = -(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\cos(2x).$$

*Potom rovnice má tvar* $-\cos(2x) = 0{,}5$, *tzn.* $\cos(2x) = -0{,}5$.

*Funkce kosinus má záporné hodnoty v II. a III. kvadrantu.*

*Potom* $2x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = \pi + \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. *Odtud*

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{3}\pi + k\pi}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x = \frac{2}{3}\pi + k\pi}},\ k \in \mathbb{Z}.$$

*c) Upravíme levou stranu rovnice:*

$$2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 2(1 - \cos^2 x) - 5\cos x + 1 = -2\cos^2 x - 5\cos x + 3$$

*Potom rovnice má tvar* $-2\cos^2 x - 5\cos x + 3 = 0$ *t.j.* $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$.

*Položíme* $y = \cos x$ *a dostaneme kvadratickou rovnici* $2y^2 + 5y - 3 = 0$.

*Tato rovnice má kořeny* $y_1 = -3$ *a* $y_2 = \frac{1}{2}$.

*Protože* $|-3| > 1$, *řešíme jen rovnici* $\cos x = \frac{1}{2}$.

*Funkce kosinus má kladné hodnoty v I. a IV. kvadrantu. Dostaneme*

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi}},\ k \in \mathbb{Z}.$$

**Příklad 8.6** *Vypočítejte následující úhly v obloukové míře:*

*a)* $\alpha = 135°$ *b)* $\alpha = -75°$ *c)* $\alpha = 200°$

[*a)* $\frac{3}{4}\pi$; *b)* $-\frac{5}{12}\pi$; *c)* $\frac{10}{9}\pi$]

**Příklad 8.7** *Vypočítejte hodnoty goniometrických funkcí* $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ *v daných bodech :*

*a)* $\alpha = -\dfrac{7}{3}\pi$ *b)* $\alpha = \dfrac{21}{4}\pi$ *c)* $\alpha = \dfrac{5}{6}\pi$ *d)* $\alpha = -\dfrac{11}{4}\pi$

[*a)* $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}$; *b)* $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1$; *c)* $\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{3}$;
*d)* $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 1$]

**Příklad 8.8** *Vypočítejte hodnoty goniometrických funkcí* $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ *jestliže platí, že* $\operatorname{cotg} x = -3$ *a* $x \in \langle \frac{3}{2}\pi; 2\pi \rangle$.

[$\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $-\frac{1}{3}$]

**Příklad 8.9** *Dokažte, že pro každá dvě reálná čísla* $\alpha$, $\beta$ *platí vzorce:*

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

[*postupným sečtením a odečtením součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus*]

**Příklad 8.10** *Vyřešte v* $\mathbb{R}$ *goniometrické rovnice:*

*a)* $\cos(x - \dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *b)* $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

*c)* $\dfrac{\sin x}{\sqrt{2} + \cos x} = 1$ *d)* $\sqrt{3}\,\operatorname{tg}^2 x - 4\,\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$

*e)* $2\sin x = \sqrt{3}\,\operatorname{tg} x$ *f)* $\sin x + \cos 2x = 1$

*g)* $\sin^4 x - \cos^4 x = \dfrac{1}{2}$ *h)* $1 + \sin x = 2\cos^2 x$

[*a)* $\frac{13}{12}\pi + 2k\pi \ \vee\ \frac{17}{12}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; *b)* $2k\pi \ \vee\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee\ \frac{5}{3}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
*c)* $\frac{1}{4}\pi + 2k\pi \ \vee\ \frac{3}{4}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; *d)* $\frac{\pi}{3} + k\pi \ \vee\ \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
*e)* $k\pi \ \vee\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee\ \frac{11}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; *f)* $k\pi \ \vee\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
*g)* $\frac{\pi}{3} + k\pi \ \vee\ \frac{2}{3}\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$; *h)* $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee\ \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \ \vee\ \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$]

**Příklad 8.11** *Řešte v intervalu* $\langle 0; 2\pi\rangle$ *rovnici* $\dfrac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1} = 2 + \sqrt{3}$.

$[\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi]$

**Příklad 8.12** *Řešte v intervalu* $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$ *rovnici* $\sin^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{3}{2}$.

$[\frac{\pi}{4}]$

**Příklad 8.13** *Upravte následující výrazy pro každé* $x \in \mathbb{R}$, *pro které jsou definovány:*

*a)* $\dfrac{2\sin x + \sin 2x}{\cos^2 \frac{x}{2}}$ *b)* $\dfrac{\sin^3 x - \sin x}{\cos^3 x - \cos x}$

*c)* $\dfrac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x - \operatorname{cotg}^2 x}$ *d)* $\dfrac{(\sin x + \cos x)^2}{1 + \sin 2x}$

$[a) 4\sin x;\ b)\ \operatorname{cotg} x;\ c)\ \operatorname{tg}^6 x;\ d)\ 1]$

**Příklad 8.14** *Načrtněte grafy funkcí:*

*a)* $y = -\sin(3x)$ *b)* $y = 1 + \cos\frac{x}{2}$ *c)* $y = 2 + \operatorname{cotg} x$ *d)* $y = 5 + 2\sin(x + \pi)$

# 9 Komplexní čísla

## 9.1 Algebraický tvar komplexního čísla

**Komplexní číslo** je číslo $z = a + ib$, kde $a, b$ jsou reálná čísla a $i^2 = -1$. Výraz je jednoznačně určen uspořádanou dvojicí [a;b], kde $a, b$ jsou reálná čísla.

Pro komplexní čísla se dají operace sčítání a násobení definovat takto:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc),$$

kde $a + ib$ a $c + id$ jsou libovolná komplexní čísla.

Sčítání a násobení komplexních čísel jsou operace asociativní a komutativní. Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.

**Příklad 9.1** *Vypočítejte součin* $(2 + i)(3 + i)$.

*Řešení:*

$(2 + i)(3 + i) = 6 + 3i + 2i - 1 = (6 - 1) + i(3 + 2) = \underline{\underline{5 + 5i}}$

Zápis $z = a + ib$ nazýváme **algebraickým tvarem** komplexního čísla.
Reálné číslo $a$ nazýváme **reálnou částí** $z$.
Reálné číslo $b$ nazýváme **imaginární částí** $z$:

$$z = a + ib,\ a = \mathbf{Re}\, z,\ b = \mathbf{Im}\, z.$$

Číslo $\overline{z} = a - ib$ nazýváme **komplexně sdruženým** číslem k číslu $z = a + ib$.

Při dělení komplexních čísel využíváme komplexně sdružené číslo jmenovatele:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{a + ib}{c + id} \cdot \frac{c - id}{c - id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \quad a + ib, c + id \in \mathbb{C},\ c, d \neq 0$$

**Příklad 9.2** *Vyjádřete v algebraickém tvaru komplexní číslo* $\dfrac{2 + i}{1 - i}$.

**Řešení:**

$$\frac{2 + i}{1 - i} = \frac{2 + i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{2 + 2i + i + i^2}{1 - i^2} = \frac{2 - 1 + 3i}{1 - (-1)} = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i}}$$

Komplexní čísla zjednodušujeme podle pravidel:

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i, \ldots,$$

to znamená, že pro každé $k \in \mathbb{Z}$ je

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i.$$

**Příklad 9.3** *Vypočítejte* $i + i^3 + i^5 + i^7 + i^9$.

**Řešení:**

$$i + i^3 + i^5 + i^7 + i^9 = i + i^2 i + i^4 i + i^4 i^3 + (i^4)^2 i = i - i + i - i + i = \underline{\underline{i}}$$

**Absolutní hodnotou** komplexního čísla $a + ib$ nazýváme nezáporné číslo $\sqrt{a^2 + b^2}$,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Komplexní číslo $z$, pro které je $|z| = 1$ nazýváme **komplexní jednotkou.**

**Komplexní rovina** (Gaussova rovina komplexních čísel) je rovina s kartézským systémem souřadnic, ve které je každé komplexní číslo $a + ib$ znázorněno bodem $[a; b]$.

Absolutní hodnota čísla $z = a + ib$ se potom rovná vzdálenosti bodu $[a; b]$ od počátku.

Absolutní hodnota rozdílu dvou komplexních čísel se rovná jejich vzdálenosti v komplexní rovině.

## 9.2 Goniometrický tvar komplexního čísla

Úhel $\varphi$ - orientovaný úhel mezi kladnou částí osy $x$ a polopřímkou spojující bod $[0; 0]$ s bodem $[a; b]$ se nazývá **argumentem** komplexního čísla $z = a + ib$. Platí, že

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Odtud dostaneme, že

$$a = |z|\cos\varphi \qquad b = |z|\sin\varphi.$$

Zápis nenulového komplexního čísla $z$ ve tvaru

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

nazýváme **goniometrickým tvarem** komplexního čísla $z$ .

Omezíme-li se na $-\pi < \varphi \leq \pi$ (ev. $0 \leq \varphi < 2\pi$), je toto číslo určeno jednoznačně.

**Příklad 9.4** *Zapište v goniometrickém tvaru číslo* $z = 2 + 2i$.

**Řešení:**

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

*Takže* $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ *a* $\varphi \in (-\pi; \pi\rangle$, *potom* $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

*Tedy :*

$$2 + 2i = \underline{\underline{\sqrt{8}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})}}$$

## 9.3 Moivreova věta

Vyjádření komplexních čísel v goniometrickém tvaru podstatně zjednodušuje výpočty spojené s násobením a dělením komplexních čísel. Pro každá dvě nenulová komplexní čísla $u = |u|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ a $v = |v|(\cos\beta + i\sin\beta)$ platí:

$$uv = |u| \cdot |v|(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$$

a

$$\frac{u}{v} = \frac{|u|}{|v|}(\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)).$$

Pro umocňování platí **Moivreova věta**:

$$z^n = (|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), n \in \mathbb{N}$$

**Příklad 9.5** *Vypočtěte $uv, u/v$ a $u^3$, jestliže*

$$u = 2(\cos\frac{1}{3}\pi + i\sin\frac{1}{3}\pi) \quad v = 6(\cos(-\frac{1}{2}\pi) + i\sin(-\frac{1}{2}\pi)).$$

**Řešení:**

*Absolutní hodnota součinu je $2 \cdot 6 = 12$ a argument $\frac{1}{3}\pi + (-\frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{6}\pi$. Proto*

$$uv = 12(\cos(-\frac{1}{6}\pi) + i\sin(-\frac{1}{6}\pi)) = 12(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = \underline{\underline{6\sqrt{3} - 6i}}$$

*Absolutní hodnota podílu je $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ a argument $\frac{1}{3}\pi - (-\frac{1}{2}\pi) = \frac{5}{6}\pi$. Tedy*

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{3}(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi) = \frac{1}{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{6}i}}$$

*Podobně dostaneme podle Moivreovy věty:*

$$u^3 = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = 8(-1) = \underline{\underline{-8}}$$

## 9.4 Řešení binomických rovnic v $\mathbb{C}$

**Binomickou rovnici** se nazývá rovnice tvaru $z^n - a = 0$, kde $a \neq 0$ je dané komplexní číslo, $z$ je neznámá a $n > 1$ je číslo přirozené. Tato rovnice má v oboru komplexních čísel právě $n$ různých kořenů. Řešit binomickou rovnici v $\mathbb{C}$ znamená využitím Moivreovy věty najít všech $n$ komplexních řešení této rovnice. Zapíšem číslo $a$ v goniometrickém tvaru:

$$a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Potom podle důsledku Moivreovy věty dostaneme řešení ve tvaru:

$$z_k = |a|^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}),\ k = 0, 1, \ldots n-1$$

**Příklad 9.6** *V $\mathbb{C}$ řešte rovnici $z^3 + 27 = 0$.*

**Řešení:**

*Upravíme na $z^3 = -27$. Napišme $a = -27$ v goniometrickém tvaru:*

$$-27 = 27(\cos\pi + i\sin\pi) = 27(\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi))$$

*Z Moivreovy věty dostaneme řešení*

$$z = \sqrt{27}(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}),\ k = 0, 1, 2.$$

$$\Rightarrow z_1 = 3(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \underline{\underline{\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}}}$$

$$z_2 = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = \underline{\underline{-3}}$$

$$z_3 = 3(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 3(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \underline{\underline{\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}}}$$

**Příklad 9.7** *Vypočítejte:*

*a)* $(2 - 3i)(4 + i)$ *b)* $(1 + i)i$ *c)* $(-1 + i)^{-2}$

*d)* $(-i)^{27}$ *e)* $i^{2000}$ *f)* $5 - 8i + 6i^2 - 3i^3 + 6i^4$

*[a)* $11 - 10i$; *b)* $-1 + i$; *c)* $i/2$; *d)* $i$; *e)* $1$; *f)* $5 - 5i$*]*

**Příklad 9.8** *Vyjádřete v algebraickém tvaru komplexní čísla:*

*a)* $(i^{10} - i^{12} - 4i^{15}) : (i^5 - i^3)$ *b)* $\dfrac{2 + i}{3 - i} + (i - 2)(4 - i)$

*c)* $(\dfrac{i - 1}{i} + \dfrac{2i}{i - 1})(2i - 3) - (i - 1)i$

*[a)* $2 + i$; *b)* $-13/2 + 13i/2$; *c)* $-5 + 5i$*]*

**Příklad 9.9** *Přesvedčte se, že* $\dfrac{1}{\frac{1}{1-i} - i} - \dfrac{1}{\frac{1}{1+i} + i} = 2i.$

*[Platí]*

**Příklad 9.10** *Najděte dvojici komplexních čísel tak, aby jejich součet byl 4 a součin 13.*

*[*$2 + 3i,\ 2 - 3i$*]*

**Příklad 9.11** *Určete reálná čísla $x, y$ pro která platí:*

*a)* $\dfrac{3-2i}{1-i} = 2x + yi$

*b)* $(x+y)(5-4i) + (x-y)(4-5i) = 94 - 68i$

*c)* $\dfrac{x+1+(y+3)i}{5+3i} = 1 + i$

[*a)* $x = 5/4, y = 1/2$; *b)* $x = 9, y = 13$; *c)* $x = 1, y = 5$]

**Příklad 9.12** *K číslu $z$ napište číslo komplexně združené $\overline{z}$ a vypočítejte $|z|$ :*

*a)* $z = 4 - 3i$ *b)* $z = \dfrac{1+2i}{3}$

[*a)* $4 + 3i, |z| = 5$; *b)* $\frac{1-2i}{3}, |z| = \sqrt{5}/3$]

**Příklad 9.13** *Určete komplexní čísla $z$, pro něž platí $z = \overline{z}$.*

[$z \in \mathbb{R}$]

**Příklad 9.14** *V komplexní rovině zobrazte množinu všech komplexních čísel, pro něž platí:*

*a)* $|1 + z| < 2$ *b)* $|1 - i| \geq |z| > \frac{1}{2}$ *c)* $\mathbf{Im}\, z < 4$

**Příklad 9.15** *Pomocí vztahu $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ vypočítejte absolutní hodnotu komplexního čísla*

$$\frac{x^2 - y^2 + 2xyi}{xy\sqrt{2} + i\sqrt{x^4 + y^4}},\ x, y \neq 0.$$

[1]

**Příklad 9.16** *Vyjádřete následující komplexní čísla v goniometrickém tvaru:*

*a)* $1 - i$ *b)* $-2$ *c)* $5i$ *d)* $\dfrac{i-3}{2+i}$ *e)* $\dfrac{2-i}{3i-1}$

[*a)* $\sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4))$; *b)* $2(\cos\pi + i\sin\pi)$;
*c)* $5(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$; *d)* $\sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)$;
*e)* $(\sqrt{2}/2)(\cos(-3\pi/4) + i\sin(-3\pi/4)$]

**Příklad 9.17** *Napište algebraický tvar komplexního čísla $z = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$.*

[$\sqrt{3}/2 + i/2$]

**Příklad 9.18** *Vypočítejte algebraický tvar součinu a podílu komplexních čísel:*

*a)* $z_1 = 6(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ $\quad z_2 = \frac{1}{3}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

*b)* $z_1 = \sqrt{3} + i$ $\quad z_2 = 6(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

[*a)* $z_1 z_2 = -1 + \sqrt{3}\, i$; $z_1/z_2 = 9 + 9\sqrt{3}\, i$; *b)* $z_1 z_2 = 12i$; $z_1/z_2 = \frac{1}{6}(\sqrt{3} - i)$]

**Příklad 9.19** *Pomocí Moivreovy věty vypočítejte:*

*a)* $(-1 + i\sqrt{3})^3$ $\qquad$ *b)* $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)^{100}$

[*a)* 8; *b)* $-1/2 - \sqrt{3}\, i/2$]

**Příklad 9.20** *Jestliže* $z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$, *najděte algebraický tvar komplexního čísla* $z^3 + \frac{1}{z^3}$.

[$-\sqrt{2}$]

**Příklad 9.21** *Vyřešte v* $\mathbb{C}$ *kvadratické rovnice:*

*a)* $z^2 + 2z + 2 = 0$ $\qquad$ *b)* $z^2 + 6z + 25 = 0$

[*a)* $-1 \pm i$; *b)* $-3 \pm 4i$]

**Příklad 9.22** *Vyřešte v* $\mathbb{C}$ *následující rovnice:*

*a)* $z^4 = 1$ $\qquad$ *b)* $z^3 = 1/8$ $\qquad$ *c)* $z^6 = -64$

[*a)* $1, i, -1, -i$; *b)* $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}i), -\frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}i)$;
*c)* $2i, -2i, \sqrt{3} + i, -\sqrt{3} + i, \sqrt{3} - i, -\sqrt{3} - i$]

# 10 Vektorová algebra a analytická geometrie

## 10.1 Základní operace s vektory

**Vektorem** nazýváme množinu všech souhlasně orientovaných úseček téže velikosti.
Je-li $\vec{u} = \vec{AB}$ libovolný nenulový vektor s počátečním bodem $A[a_1; a_2; a_3]$ a koncovým bodem $B[b_1; b_2; b_3]$, pak **souřadnice vektoru** $\vec{u}$ jsou:

$$u_1 = b_1 - a_1,\ u_2 = b_2 - a_2,\ u_3 = b_3 - a_3.$$

Zapisujeme $\vec{u}(u_1; u_2; u_3)$.

Je-li $A = B$, pak dostáváme vektor nulový $\vec{o}(0; 0; 0)$.

U vektorů v rovině vypustíme třetí souřadnici.

Pro vektory $\vec{u}(u_1; u_2; u_3)$ a $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$ zavádíme:

**velikost vektoru** $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

**rovnost vektorů** $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (u_1 = v_1) \wedge (u_2 = v_2) \wedge (u_3 = v_3)$

**součet vektorů** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} = (u_1 + v_1; u_2 + v_2; u_3 + v_3)$

**rozdíl vektorů** $\vec{u} - \vec{v} = \vec{w} = (u_1 - v_1; u_2 - v_2; u_3 - v_3)$

**opačný vektor k** $\vec{u}$ $-\vec{u} = (-u_1; -u_2; -u_3)$

$k$**-násobek vektoru** $k\vec{u} = (ku_1; ku_2; ku_3),\ k \in \mathbb{R}, k \neq 0$

**skalární součin** $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

**úhel** $\varphi$ **dvou vektorů** $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|},\ \varphi \in \langle 0; 2\pi)$

## 10.2 Přímka v rovině

**Přímka** $p$ **v rovině:**

Je-li přímka $p$ určena bodem $A[a_1; a_2]$ a nenulovým směrovým vektorem $\vec{s}(s_1; s_2)$ jsou její **parametrické rovnice**

$$x = a_1 + ts_1, y = a_2 + ts_2,\ t \in \mathbb{R}.$$

Budeme používat i zkrácený zápis $p \equiv \{[a_1 + ts_1; a_2 + ts_2],\ t \in \mathbb{R}\}$. Vyloučením parametru $t$ z parametrických rovnic dostaneme **obecnou rovnici** přímky

$$p \equiv ax + by + c = 0.$$

Je-li v této rovnici $b \neq 0$, lze najít **směrnicový tvar** $p \equiv y = kx + q;\ k, q \in \mathbb{R}$.

**Vzdálenost bodu** $M[x_0; y_0]$ **od přímky** $p \equiv ax + by + c = 0$ je dána

$$d(M, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Pro **odchylku dvou přímek** $p_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ a $p_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ lze odvodit

$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}},\ \varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle.$$

Jsou-li přímky $p_1$ a $p_2$ kolmé, pak pro jejich směrnice $k_1$ a $k_2$ platí $k_1 \cdot k_2 = -1$.

**Příklad 10.1** *Přímka je určena body* $A[6; -1], B[2; 3]$. *Najděte všechny tvary rovnice této přímky.*

**Řešení:**
*Směrový vektor této přímky je* $\vec{s} = (-4; 4)$. *Parametrické rovnice tedy jsou*

$$\underline{\underline{x = 6 - 4t,\ y = -1 + 4t,\ t \in \mathbb{R}.}}$$

*Sečtením těchto rovnic a vyloučením parametru* $t$ *dostaneme obecnou rovnici*

$$\underline{\underline{x + y - 5 = 0.}}$$

*Jednoduchou úpravou dostáváme*

$$\underline{\underline{\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1,}}$$

*připomínáme tímto úsekový tvar rovnice přímky. Úseky, které přímka vytíná na souřadnicových osách jsou stejné a rovny pěti.*

*Z obecného tvaru odvodíme směrnicový*

$$\underline{\underline{y = -x + 5.}}$$

*Vidíme, že směrnice* $k = -1$, *úhel přímky s kladným směrem osy* $x$ *je* $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

**Příklad 10.2** *V trojúhelníku* $ABC$, *kde* $A[7; 8], B[5; -2], C[-3; -6]$, *určete velikost výšky* $v_a$ *a napište rovnici přímky, na níž leží výška* $v_a$.

**Řešení:**
*Výška* $v_a$ *má velikost rovnou vzdálenosti bodu* $A$ *od přímky* $p$, *na níž leží strana* $BC$.
*Je* $\vec{BC} = C - B = (-8; -4)$.
*Parametrické rovnice přímky* $p$ *jsou:*

$$x = -3 - 8t,\ y = -6 - 4t.$$

*Odtud obecná rovnice* $x - 2y - 9 = 0$. *Tedy*

$$d(A, p) = \frac{|1 \cdot 7 - 2 \cdot 8 - 9|}{\sqrt{1 + 4}} = \underline{\underline{\frac{18\sqrt{5}}{5}}}.$$

*Směrnicová rovnice přímky p je* $y = \frac{x}{2} - \frac{9}{2}$, *směrnice výšky* $v_a$ *je tedy*

$$k = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2.$$

*Rovnice přímky rovnoběžné s výškou pak je* $y = -2x + q$ *a posunutí* $q$ *dostaneme z podmínky, že výška* $v_a$ *bodem A prochází, tedy* $8 = -2 \cdot 7 + q \Rightarrow q = 22$.

*Je tedy* $\underline{\underline{-2x + 22 = y}}$ *rovnice přímky na níž výška* $v_a$ *leží.*

**Příklad 10.3** *Určete odchylku přímek*

$$p_1 \equiv 3x - 2y + 10 = 0 \text{ a } p_2 \equiv 5x + y - 13 = 0.$$

**Řešení:**
*Je* $\cos\varphi = \dfrac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} = \dfrac{|3 \cdot 5 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{9+4}\sqrt{25+1}} = \dfrac{|13|}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, *tedy* $\underline{\underline{\varphi = \dfrac{\pi}{4}}}$.

## 10.3 Přímka v prostoru a rovnice roviny

**Přímka $p$ v prostoru:**

Je-li přímka $p$ určena bodem $A[a_1; a_2; a_3]$ a nenulovým směrovým vektorem $\vec{s}(s_1; s_2; s_3)$ jsou její **parametrické rovnice**

$$x = a_1 + ts_1,\ y = a_2 + ts_2,\ z = a_3 + ts_3,\ t \in \mathbb{R}.$$

Zkrácený zápis $p \equiv \{[a_1 + ts_1; a_2 + ts_2; a_3 + ts_3],\ t \in \mathbb{R}\}$.

Přímku v prostoru lze také zadat jako průsečnici dvou různoběžných rovin.

**Rovina $\varrho$ v prostoru:**

Je-li rovina $\varrho$ určena bodem $A[a_1; a_2; a_3]$ a dvěma nenulovými, nekolineárními vektory $\vec{u}(u_1; u_2; u_3)$ a $\vec{v}(v_1; v_2; v_3)$ jsou její **parametrická rovnice**

$$x = a_1 + tu_1 + rv_1, y = a_2 + tu_2 + rv_2, z = a_3 + tu_3 + rv_3,\ t, r \in \mathbb{R}.$$

Zkrácený zápis $\varrho \equiv \{[a_1 + tu_1 + rv_1; a_2 + tu_2 + rv_2; a_3 + tu_3 + rv_3],\ t, r \in \mathbb{R}\}$.

Vyloučením parametrů $t, r$ z parametrických rovnic dostaneme **obecnou (normálovou) rovnici** roviny $\varrho$ ve tvaru

$$ax + by + cz + d = 0,$$

kde alespoň jeden z koeficientů $a, b, c$ je nenulový.

Vektor $\vec{n}(a; b; c)$ je normálový vektor roviny $\varrho$.

**Vzdálenost bodu $X[x_0; y_0; z_0]$ od roviny $\varrho$** je

$$d(X, \varrho) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

**Příklad 10.4** *Najděte rovnici roviny $\varrho$, která prochází bodem $A[5;-1;0]$ a má normálový vektor $\vec{n}(-1;1;2)$.*

**Řešení:**
*Souřadnice normálového vektoru jsou koeficienty $a, b, c$ v obecné rovnici roviny. Tedy*

$$\varrho \equiv -x + y + 2z + d = 0.$$

*Bod A leží v rovině, potom $-5 - 1 + 0z + d = 0 \Rightarrow d = 6$.*

$$\underline{\underline{\varrho \equiv -x + y + 2z + 6 = 0}}$$

**Příklad 10.5** *Rovina $\varrho$ je určena body $A[4;0;3], B[4;1;5], C[1;2;-3]$. Najděte parametrické vyjádření a obecnou (normálovou) rovnici $\varrho$.*

**Řešení:**
*Je $\vec{AB} = (0;1;2), \vec{AC} = (-3;2;-6)$. Pak parametrické rovnice roviny $\varrho$ jsou*

$$\underline{\underline{x = 4 + 0t - 3r,\ y = 0 + t + 2r,\ z = 3 + 2t - 6r,\ t, r \in \mathbb{R}.}}$$

*Vyloučením parametrů $t, r$ z těchto rovnic dostaneme*

$$\underline{\underline{\varrho \equiv 10x + 6y - 3z - 31 = 0.}}$$

**Příklad 10.6** *Určete vzdálenost dvou rovnoběžných rovin:*
$\varrho_1 \equiv 4x - 2y - 2z - 3 = 0,\ \varrho_2 \equiv 2x - y - z - 1 = 0.$

**Řešení:**
*V rovině $\varrho_1$ volíme například bod $X(0;0;-\frac{3}{2})$ a počítame*

$$d(X, \varrho_2) = \frac{|\frac{3}{2} - 1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{12}}}.$$

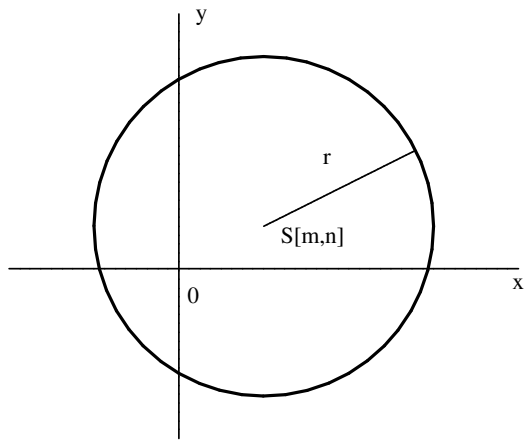
## 10.4 Kuželosečky v rovině

**Kružnice** $k(S,r)$ se středem v $S[m;n]$ a poloměrem $r>0$ má středovou rovnici

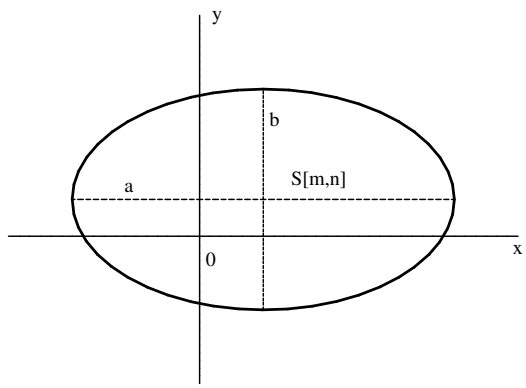
$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2.$$

**Elipsa** se středem v bodě $S[m;n]$ a poloosami (rovnoběžnými se souřadnicovými osami) velikosti $a$ a $b$ má středovou rovnici

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1.$$




Kružnice $k(S,r)$




Elipsa

**Příklad 10.7** *Určete rovnici kružnice $k$, je-li určena středem $S$ a poloměrem $r$ :*

*a)* $S[0;-3],\ r=\sqrt{2}$ *b)* $S[-1;1],\ r=1$

**Řešení:**
*Dosazením do středového tvaru rovnice kružnice dostaneme:*

*a)* $(x-0)^2+(y+3)^2=(\sqrt{2})^2 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{x^2+(y+3)^2=2}}$

*b)* $\underline{\underline{(x+1)^2+(y-1)^2=1}}$

**Příklad 10.8** *Najděte střed a poloměr kružnice* $k\equiv x^2+y^2-5x+4y=2.$

**Řešení:**
*Rovnici kružnice upravíme doplněním na úplný čtverec:*

$$x^2-5x+(\frac{5}{2})^2+y^2+4y+4=2+(\frac{5}{2})^2+4$$

$$(x-\frac{5}{2})^2+(y+2)^2=(\frac{7}{2})^2 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{S[\frac{5}{2};-2],\ r=\frac{7}{2}.}}$$

**Příklad 10.9** *Rozhodněte, zda rovnice*

*a*) $25x^2 + 16y^2 + 100x - 96y - 156 = 0$

*b*) $9x^2 + 4y^2 - 36x + 40y + 152 = 0$

*je rovnicí elipsy. Určete střed a délku poloos.*

**Řešení:**
*a*) *Upravíme:*

$$25(x^2+4x+4)+16(y^2-6y+9) = 156+100+144 \quad \Rightarrow 25(x+2)^2+16(y-3)^2 = 400 \;\Rightarrow$$

$$\frac{(x+2)^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{5^2} = 1$$

*Je tedy* $\underline{\underline{S[-2;3],\ a=4,\ b=5.}}$

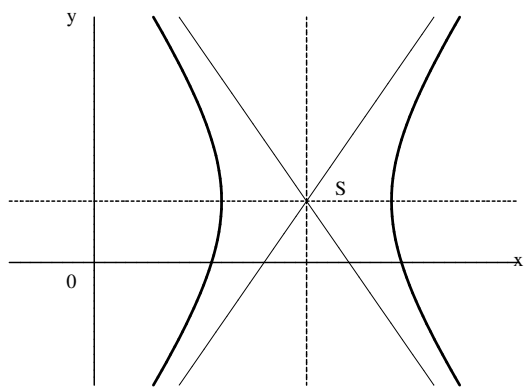
*b*) *Podobně*

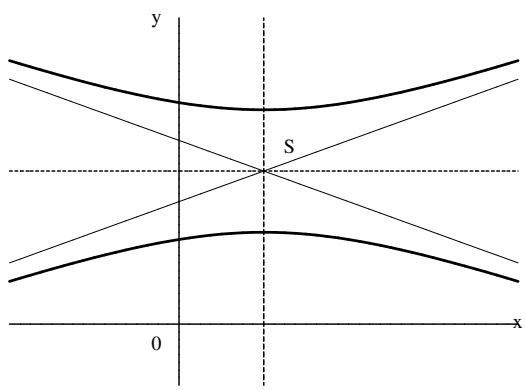
$$9(x^2-4x+4)+4(y^2+10y+25) = -152+36+100 \quad \Rightarrow 9(x-2)^2+4(y+5)^2 = -16.$$

*Na levé straně je číslo nezáporné, na pravé záporné,* <u>*daná rovnice není rovnici elipsy.*</u>

**Hyperbola** se středem v bodě $S[m;n]$ a poloosami (rovnoběžnými se souřadnicovými osami) $a$ a $b$ má středovou rovnici

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \quad \text{nebo} \quad -\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1.$$



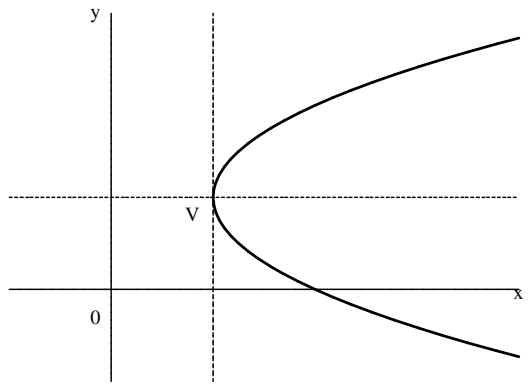

**Příklad 10.10** *Najděte průsečíky hyperboly* $-49x^2 + 16y^2 = -25$ *s osou* $O_x$ *(vrcholy hyperboly).*

**Řešení:**
*Rovnice osy* $O_x$ *je* $y = 0$, *pak* $-49x^2 = -25 \;\Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{5}{7}$.

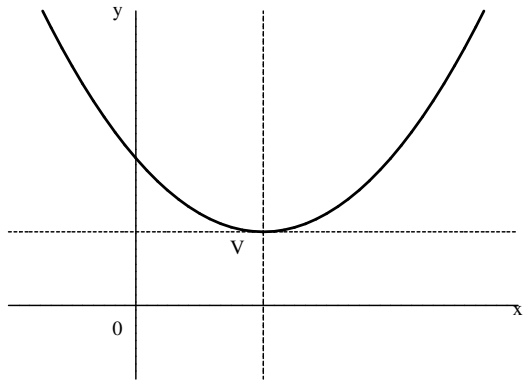
*Je tedy* $\underline{\underline{V_1[\frac{5}{7};0],\ V_2[-\frac{5}{7};0].}}$

**Parabola** je nestředová kuželosečka. Je-li její vrchol $V[m;n]$, pak rovnice paraboly je

$$(y-n)^2 = 2p(x-m) \qquad \text{nebo} \qquad (x-m)^2 = 2p(y-n).$$




osa paraboly je rovnoběžná
s osou $x$, $p > 0$




osa paraboly je rovnoběžná
s osou $y$, $p > 0$

**Příklad 10.11** *Najděte vrchol a osu paraboly* $3y^2 - 6x + 12y + 15 = 0$.

**Řešení:**
*Upravíme na vrcholový tvar* $3(y^2 + 4y + 4) = 6x - 15 + 12$, *tedy* $(y+2)^2 = 2(x - \frac{1}{2})$.

*Vrchol paraboly je* $\underline{\underline{V[\frac{1}{2}; -2]}}$, *osa je* $\underline{\underline{\text{rovnoběžná s osou } O_x}}$, *parametr* $\underline{\underline{p = 1.}}$

**Příklad 10.12** *Jsou dány tři po sobě jdoucí vrcholy rovnoběžníka* $ABCD$, *kde* $A[2;-2;2]$, $B[4;2;0]$, $C[7;4;3]$. *Určete vrchol* $D$.

[$D[5;0;5]$]

**Příklad 10.13** *Najděte vnitřní úhly trojúhelníku o vrcholech* $A[2;-4;9]$, $B[-1;-4;5]$, $C[6;-4;6]$.

[$\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \gamma = \frac{\pi}{4}$]

**Příklad 10.14** *Pro jakou hodnotu parametru* $a$ *jsou přímky* $p$ *a* $q$ *rovnoběžné, je-li* $p \equiv 3ax - 8y + 13 = 0$ *a* $q \equiv (a+1)x - 2ay - 21 = 0$.

[$a \in \{2, -\frac{2}{3}\}$]

**Příklad 10.15** *Přímka* $p \equiv ax + 3y - 1 = 0$.
*Určete* $a$ *tak, aby přímka svírala s kladným směrem osy* $x$ *úhel* $\frac{3}{4}\pi$.

[$a = 3$]

**Příklad 10.16** *Najděte rovnici přímky, která prochází bodem* $A[4;-2]$ *a má od počátku vzdálenost* $d = 2$.

[$p_1 \equiv y + 2 = 0$, $p_2 \equiv 4x + 3y - 10 = 0$]

**Příklad 10.17** *Najděte obecnou rovnici přímky, která prochází bodem* $M[15;-3]$ *a průsečíkem přímek* $3x-5y+12=0,\ 5x+2y-42=0$.

$[x+y-12=0]$

**Příklad 10.18** *Určete množinu bodů, které mají od bodů* $A[7;-3],\ B[-2;1]$ *stejnou vzdálenost.*

$[18x-8y-53=0]$

**Příklad 10.19** *Přímka* $p$ *je dána rovnicemi* $x=1+2t, y=3-t, t\in\mathbb{R}$.
*Určete parametrické rovnice přímky* $q$, *je-li* $p\perp q$ *a dále* $q$ *prochází bodem* $Q[1;3]$.

$[x=1+t, y=3+2t, t\in\mathbb{R}]$

**Příklad 10.20** *Najděte číslo* $n$, *aby body* $A[3;-4],\ B[1;n],\ C[-1;2]$ *ležely na jedné přímce.*

$[n=-1]$

**Příklad 10.21** *Najděte parametrické rovnice přímky procházející bodem* $A[4;-5;7]$ *rovnoběžně*

*a)* *s osou* $O_x$,

*b)* *s osou* $O_y$,

*c)* *s osou* $O_z$,

*d)* *s přímkou* $p\equiv x=3-t, y=2+2t, z=3,\ t\in\mathbb{R}$.

$[a)\ x=4+t, y=-5, z=7, t\in\mathbb{R};\ b)\ x=4, y=-5+t, z=7, t\in\mathbb{R};$
$c)\ x=4, y=-5, z=7+t, t\in\mathbb{R};\ d)\ x=4-t, y=-5+2t, z=7, t\in\mathbb{R}]$

**Příklad 10.22** *Určete odchylku* $\varphi$ *rovin* $\varrho\equiv 2x+y-z+1=0$ *a* $\sigma\equiv x-y+z=0$.

$[\varphi=\frac{\pi}{2}]$

**Příklad 10.23** *Rozhodněte, která z rovin* $\varrho\equiv x-y-3=0, \sigma\equiv x+y-z+1=0$ *má větší vzdálenost od počátku souřadnic.*

[*rovina* $\varrho$]

**Příklad 10.24** *Určete rovnici průsečnice rovin* $\varrho\equiv 3x+y-z=0$ *a* $\sigma\equiv y+z=0$.

$[p\equiv x=2t, y=-3t, z=3t,\ t\in\mathbb{R}]$

**Příklad 10.25** *Najděte rovnici kružnice opsané trojúhelníku o vrcholech*
$A[1;-1],\ B[7;7],\ C[11;-1]$.

$[k\equiv x^2+y^2-12x-3y+7=0]$

**Příklad 10.26** *Najděte rovnici kružnice, která se dotýká obou souřadnicových os a prochází bodem* $M[2;4]$.

$$[k_1 \equiv (x-10)^2 + (y-10)^2 = 100,\ k_2 \equiv (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4]$$

**Příklad 10.27** *Jsou dány body* $A[1;-3],\ B[1;4],\ C[-3;5]$.
*Popište jejich polohu vzhledem k elipse* $25x^2 + 9y^2 = 450$.

*[A je uvnitř, B je uvnitř, C je bod elipsy]*

**Příklad 10.28** *Najděte rovnici elipsy s osami rovnoběžnými se souřadnicovými, jestliže se osy* $O_x$ *dotýká v bodě* $A[-4;0]$ *a osy* $O_y$ *v bodě* $B[0;5]$.

$$[\tfrac{(x+4)^2}{16} + \tfrac{(y-5)^2}{25} = 1]$$

**Příklad 10.29** *Hyperbola má rovnici* $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0$.
*Najděte její střed a délky poloos.*

$$[S[1,-1], a = 2, b = 3]$$

**Příklad 10.30** *Najděte rovnici hyperboly, jsou-li její vrcholy* $V_1[0;2],\ V_2[8;2]$ *a prochází bodem* $M[-1;5]$.

$$[\tfrac{(x-4)^2}{16} - \tfrac{(y-2)^2}{16} = 1]$$

**Příklad 10.31** *Najděte rovnici paraboly, která má vrchol v počátku a prochází body* $A[8;3],\ B[-8;3]$.

$$[x^2 = \tfrac{64}{3}y]$$

**Příklad 10.32** *Najděte rovnici paraboly, jejíž osa je rovnoběžná s osou* $O_x$, *vrchol* $V[8;5]$, *parametr* $p = 4$.

$$[(y-5)^2 = 8(x-8)]$$

**Příklad 10.33** *Najděte rovnici přímky, která prochází průsečíky paraboly* $y^2 = 18x$ *a kružnice* $x^2 + y^2 + 12x - 64 = 0$.

$$[p \equiv x - 2 = 0]$$

# 11 Posloupnosti a řady

## 11.1 Aritmetická a geometrická posloupnost

**Nekonečnou posloupností** se nazývá každá funkce, jejímž definičním oborem je množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$.

**Konečnou posloupností** nazýváme každou funkci, jejíž definiční obor je množina $\{n \in \mathbb{N}, n \leq n_0\}$, kde $n_0 \in \mathbb{N}$ je pevně dané číslo.
Posloupnost je zadána buď výčtem prvků, rekurentně, nebo vzorcem pro $n$-tý člen.

**Příklad 11.1** *Posloupnost všech čísel dělitelných třemi zapište výše uvedenými způsoby.*

**Řešení:**

$\{a_n\}_1^\infty = \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$ *výčet prvků*

$a_{n+1} = a_n + 3,\ a_1 = 3$ *rekurentně*

$a_n = 3n$ *vzorec pro $n$-tý člen*

**Příklad 11.2** *Je daná posloupnost $\{a_n\}_1^\infty, a_n = \log 3^n$. Vyjádřete ji rekurentně.*

**Řešení:**

*Pro $\forall n \in \mathbb{N}$ je $a_{n+1} = \log 3^{n+1} = \log 3^n \cdot 3 = \log 3^n + \log 3$.*
*Zkoumanou posloupnost lze zapsat*

$$\underline{\underline{a_{n+1} = a_n + \log 3,\ a_1 = \log 3.}}$$

**Příklad 11.3** *Posloupnost zadanou rekurentně $a_1 = -1,\ a_{n+1} = -a_n$ vyjádřete vzorcem pro $n$-tý člen.*

**Řešení:**

$\{a_n\}_1^\infty = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$. *Odtud* $\underline{\underline{a_n = (-1)^n.}}$

Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ se nazývá **aritmetická,** právě když existuje takové číslo $d$ (diference), že pro každé přirozené $n$ platí: $a_{n+1} = a_n + d$, neboli $a_{n+1} - a_n = d$.

V aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$ s diferencí $d$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ :

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Dále jsou-li $r, s \in \mathbb{N}$ libovolná, pak $a_s = a_r + (s-r)d$.

Pro součet $S_n$ prvních $n$ členů aritmetické posloupnosti lze odvodit:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

**Příklad 11.4** *Dokažte, že posloupnost* $\{a_n\}_1^\infty, a_n = 2n - 4$ *je aritmetická. Určete diferenci.*

**Řešení:**

*Musíme dokázat existenci čísla* $d \in \mathbb{R}$ *tak, že pro* $\forall n \in \mathbb{N}$ *platí* $a_{n+1} = a_n + d$.

*Je* $a_n = 2n - 4, a_{n+1} = 2n - 2$ *a tedy* $a_{n+1} - a_n = 2$, *čili* $a_{n+1} = a_n + 2$.

*Posloupnost* $\{2n - 4\}_1^\infty$ *je aritmetická s diferencí* $d = 2$.

**Příklad 11.5** *Rozhodněte, které z čísel* 71 *a* 100 *je členem aritmetické posloupnosti* $\{a_n\}_1^\infty$, *v níž* $a_1 = -10,\ d = 4{,}5$.

**Řešení:**

*V dané posloupnosti platí* $a_n = -10 + (n - 1) \cdot 4{,}5$.

*Je-li* $a_n = 71$, *pak* $71 = -10 + (n - 1) \cdot 4{,}5$. *Z toho* $n = 19$.

*Je-li* $a_n = 100$, *pak* $100 = -10 + (n - 1) \cdot 4{,}5$. *Z toho* $n = \frac{229}{9}$.

*Členem aritmetické posloupnosti* $\{a_n\}$ *je pouze číslo* $\underline{\underline{71.}}$

**Příklad 11.6** *V aritmetické posloupnosti je*

*a)* $a_6 = 18,\ d = -2$. *Vypočítejte* $a_9$.

*b)* $a_{16} = 20,\ d = 1{,}5$. *Vypočítejte* $a_1$.

*c)* $a_1 = 12{,}6,\ d = 0{,}2,\ a_n = 27{,}4$. *Určete* $n$.

**Řešení:**

*a)* $a_s = a_r + (s - r)d \ \Rightarrow\ a_9 = a_6 + 3d = 18 - 6 = \underline{\underline{12}}$

*b)* $a_{16} = a_1 + 15d \ \Rightarrow\ a_1 = a_{16} - 15d = \underline{\underline{-2{,}5}}$

*c)* $a_n = a_1 + (n - 1)d \ \Rightarrow\ n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \underline{\underline{75}}$

**Příklad 11.7** *Vypočítejte součet všech přirozených čísel od jedné do 300.*

**Řešení:**

*Je* $a_1 = 1,\ d = 1$. *Součet* $S_{300} = \dfrac{300}{2}(a_1 + a_{300}) = \underline{\underline{45150.}}$

Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ se nazývá **geometrická,** právě když existuje číslo $q$ tak, že pro každé přirozené $n$ platí:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q, \text{ neboli } \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \text{ pro } a_1 \neq 0,\ q \neq 0.$$

Číslo $q$ se nazývá kvocient geometrické posloupnosti.

V geometrické posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$ s kvocientem $q$ platí pro každé $n \in \mathbb{N}$ :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Dále jsou-li $r, s \in \mathbb{N}$ libovolná, pak $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$.

Pro součet $S_n$ prvních $n$ členů geometrické posloupnosti platí:

*a)* pro $q = 1$ je $S_n = n \cdot a_1$.

*b)* pro $q \neq 1$ je $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

**Příklad 11.8** *V geometrické posloupnosti je*

*a)* $a_1 = 18,\ q = 3$. *Napište prvních pět členů.*

*b)* $a_1 = 4,\ q = 3$. *Vypočítejte* $a_5$.

*c)* $a_6 = 8192,\ q = 4$. *Určete* $a_4$.

*d)* $a_1 = 40,\ q = -\frac{1}{4}$. *Vypočítejte* $a_5$ *a* $S_5$.

**Řešení:**

*a)* $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \ \Rightarrow\ \underline{\underline{18, 54, 162, 486, 1458}}$

*b)* $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 4 \cdot 3^4 = \underline{\underline{324}}$

*c)* $a_4 = a_6 \cdot q^{4-6} = 8192 \cdot 4^{-2} = \underline{\underline{512}}$

*d)* $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 40 \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right)^4 = \underline{\underline{\dfrac{5}{32}}} \qquad S_5 = a_1 \dfrac{q^5 - 1}{q - 1} = \underline{\underline{\dfrac{1025}{32}}}$

**Příklad 11.9** *Najděte geometrickou posloupnost tak, aby* $a_1 + a_3 = 5$ *a* $a_2 + a_4 = 10$.

**Řešení:**

*Je tedy* $\begin{aligned} a_1 + a_1 \cdot q^2 &= 5 \\ a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^3 &= 10 \end{aligned} \ \Rightarrow\ \begin{aligned} a_1(1 + q^2) &= 5 \\ a_1 q(1 + q^2) &= 10 \end{aligned}$

*Druhou rovnici vydělíme první, dostaneme* $\underline{\underline{q = 2, a_1 = 1.}}$

**Příklad 11.10** *Zjistěte, na jakou částku vzroste vklad* $a_0$ *Kč uložený na vkladní knížku na* $n$ *let, jestliže spořitelna připisuje na konci každého roku* $p$ *% z částky v tom roce uložené.*

**Řešení:**

*Na konci 1. roku připíše spořitelna* $p\,\%$ *z původně vložené částky* $a_0$, *takže vklad vzroste na částku*

$$a_1 = a_0 + \frac{p}{100} a_0 = a_0 (1 + \frac{p}{100}).$$

*Na konci 2. roku připíše k této částce p% z $a_1$, takže vklad vzroste na částku*

$$a_2 = a_1 + \frac{p}{100}a_1 = a_1(1 + \frac{p}{100}).$$

*Obdobně je tomu v dalších letech.*

*Vklady po připsání úroků v jednotlivých letech tvoří zřejmě geometrickou posloupnost s kvocientem $q = 1 + \frac{p}{100}$ a s prvním členem $a_1 = a_0 q$. Tedy podle vzorce $a_n = a_1 q^{n-1}$ dostaneme, že částka $a_0$ Kč při p-procentním složeném úrokování vzroste po n-letech na částku $a_n$ Kč, kde*

$$a_n = a_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n-1} = \underline{\underline{a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}}.$$

## 11.2 Nekonečná geometrická řada

Nechť $\{a_n\}_1^\infty$ je geometrická posloupnost, pro jejíž kvocient $q$ platí $|q| < 1$.

Pak posloupnost $\{S_n\}_1^\infty, S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, je konvergentní a platí:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Takto dostáváme **nekonečnou geometrickou řadu**

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + \ldots = \frac{a_1}{1-q}.$$

**Příklad 11.11** *Sečtěte geometrickou řadu:*

*a)* $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \ldots$

*b)* $1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \ldots$

**Řešení:**

*a)* *Je* $a_1 = 1,\ q = \frac{a_2}{a_1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

*Dále* $|q| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, *řada konverguje a*

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \underline{\underline{2 - \sqrt{2}.}}$$

*b)* *Je* $a_1 = 1,\ q = \cos^2 x$.

*Pro* $|\cos^2 x| < 1 \ \Rightarrow\ |\cos x| < 1 \ \Rightarrow x \neq k\pi$ *řada konverguje,*

$$S = \frac{1}{1-\cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{1}{\sin^2 x}}}.$$

**Příklad 11.12** *Převeďte na zlomek číslo* $8{,}\overline{4}$.

**Řešení:**

$$8{,}\overline{4} = 8 + \underbrace{\frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \dots}_{a_1 = \frac{4}{10},\ q = \frac{1}{10}} = 8 + \frac{\frac{4}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 8 + \frac{4}{9} = \underline{\underline{\frac{76}{9}}}.$$

*Jiné řešení:*

*Na jedné straně platí, že* $10 \cdot 8{,}\overline{4} - 8{,}\overline{4} = 9 \cdot 8{,}\overline{4}$.

*Na druhé straně je* $10 \cdot 8{,}\overline{4} - 8{,}\overline{4} = 9 \cdot 8{,}\overline{4} = 84{,}\overline{4} - 8{,}\overline{4} = 76$

*Potom* $9 \cdot 8{,}\overline{4} = 76$.

*Je tedy* $8{,}\overline{4} = \underline{\underline{\frac{76}{9}}}$.

**Příklad 11.13** *Závitnice byla sestrojena ze čtvrtkružnic poloměru* $r, \frac{r}{2}, \frac{r}{4}, \frac{r}{8}, \dots$. *Vypočítejte její délku.*

**Řešení:**

$$d = \frac{1}{4}(2\pi r + 2\pi\frac{r}{2} + 2\pi\frac{r}{4} + 2\pi\frac{r}{8}\dots) = \frac{2\pi r}{4}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots) = \frac{\pi r}{2}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \underline{\underline{\pi r.}}$$

**Příklad 11.14** *V aritmetické posloupnosti je*

*a)* $a_5 = 8,\ a_8 = -10$. *Vypočítejte* $a_{20}$.

*b)* $a_{10} = 23,\ a_{16} = 15$. *Vypočítejte* $a_1$.

*c)* $a_1 = 15,\ S_{25} = 75$. *Určete* $d$.

*d)* $a_1 = 450,\ a_n = 210,\ d = -24$. *Vypočítejte* $n$ *a* $S_n$.

*e)* $a_n = 47,\ S_n = 245,\ d = 5$. *Vypočítejte* $a_1$ *a* $n$.

[*a)* $-82$, *b)* $35$, *c)* $-1$, *d)* $11,\ 3630$ *e)* $2,\ 10$]

***Příklad 11.15*** *Ve které aritmetické posloupnosti je* $a_1 + a_5 = 30,\ a_3 + a_4 = 36$?

[$a_1 = 3, d = 6$]

**Příklad 11.16** *Kolik členů aritmetické posloupnosti, ve které* $a_1 = 2,\ d = 3$, *musíme sečíst, aby součet přesáhl 2000?*

[*37 členů*]

**Příklad 11.17** *Mezi čísla 8 a 20 vložte tolik členů aritmetické posloupnosti, aby součet vložených členů byl 196.*

[$d = \frac{4}{5},\ k = 14$]

**Příklad 11.18** *V geometrické posloupnosti je*

*a)* $a_4 = -\frac{8}{3},\ a_6 = -\frac{32}{3}$. *Vypočítejte* $a_1$ *a* $q$.

*b)* $a_1 + a_4 = 112,\ a_2 + a_3 = 48$. *Vypočítejte* $a_1$ *a* $q$.

*c)* $a_1 = 6144,\ q = \frac{1}{2},\ a_n = 48$. *Vypočítejte* $n$ *a* $S_n$.

*d)* $a_1 = 18,\ a_n = 288,\ S_n = 558$. *Vypočítejte* $n$ *a* $q$.

[*a)* $\frac{1}{3}, -2,$ nebo $-\frac{1}{3}, 2;$ *b)* $4, 3,$ nebo $108, \frac{1}{3}$ *c)* $8,\ 12240$ *d)* $5,\ 2$]

**Příklad 11.19** *Mezi čísla 5 a 640 vložte tolik čísel, aby s danými čísly tvořila geometrickou posloupnost a součet vložených členů byl 630.*

[$10, 20, 40, 80, 160, 320$]

**Příklad 11.20** *Najděte kvocient geometrické posloupnosti, jestliže součet příslušné geometrické řady je 6, a součet prvních pěti členů je* $\frac{93}{16}$.

[$q = \frac{1}{2}$]

**Příklad 11.21** *Dělník souhlasil, že bude pracovat, jestliže jeho mzda bude za první den práce 1 Kč, za druhý den práce 2 Kč, za třetí den práce 4 Kč, atd. Kolik si vydělá za 12 dní práce?*

[4095 *Kč*]

**Příklad 11.22** *Najděte součet geometrické řady* $1 - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^3 x + \ldots$. *Stanovte podmínky.*

[$S = \frac{1}{1+\operatorname{tg} x};\ x \in (-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$]

**Příklad 11.23** *Řešte rovnici* $\dfrac{8}{x+10} = 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{9}{x^2} - \dfrac{27}{x^3} + \ldots$. *Prověřte řešitelnost rovnice.*

[$x \in \{-6, 4\}$]

**Příklad 11.24** *Do čtverce o straně a je vepsána kružnice, do ní opět čtverec, pak kružnice atd. Vypočítejte obsah všech takto vzniklých čtverců.*

[$2a^2$]

**Příklad 11.25** *Poločas přeměny (rozpadu jader) rádia je přibližně 20 minut. Kolik rádia zbude bez přeměny z 1mg po n hodinách? (Poločas přeměny radioaktivní látky je doba, za kterou dojde k radioaktivní přeměně přibližně poloviny jader atomů té látky.)*

[$a_n = q^n = \frac{1}{8^n}$]

**Příklad 11.26** *Pro* $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$ *řešte rovnici* $1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \ldots = 2\operatorname{tg} x$.

[$x \neq \frac{\pi}{2} \wedge x \neq \frac{3\pi}{2}$, *pak dostaneme* $\sin 2x = 1 \Rightarrow x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$ ]

# 12 Kombinatorika

## 12.1 Permutace, variace a kombinace

**Permutace** $n$ prvků dané základní $n$-prvkové množiny je každá uspořádaná $n$-tice těchto prvků, přičemž každý prvek základní množiny se v této $n$-tici vyskytuje právě jedenkrát.

Pro počet $P(n)$ všech permutací $n$ prvků platí:

$$P(n) = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Symbol $n!$ čteme $n$ faktoriál, definujeme $0! = 1$.

**Příklad 12.1** *Kolik pěticiferných čísel je možno sestavit z číslic* $0, 1, 3, 4, 7$? *Kolik je z nich sudých?*

**Řešení:**
*Všech pětic cifer je* $P(5) = 5! = 120$.
*Na prvním místě nesmí být nula, těchto pětic je* $P(4) = 4! = 24$.
*Celkem je pěticiferných čísel* $\underline{\underline{120 - 24 = 96.}}$

*Sudá čísla mají na místě jednotek* $0$, *těch je*

$$P(4) = 4! = 24,$$

*nebo mají na místě jednotek číslici* $4$, *ale současně nesmí mít na prvním místě číslici* $0$, *těch je*

$$P(4) - P(3) = 4! - 3! = 18.$$

*Celkem je sudých čísel* $\underline{\underline{42.}}$

**Příklad 12.2** *Zmenšíme-li počet prvků o dva, zmenší se počet permutací dvacetkrát. Určete původní počet prvků!*

**Řešení:**

$P(n) = n!,\ P(n-2) = (n-2)! \Rightarrow n! = 20(n-2)! \Rightarrow n(n-1) = 20 \Rightarrow$

$n^2 - n - 20 = 0 \Rightarrow (n-5)(n+4) = 0$

*Číslo* $n$ *je přirozené, proto původní počet prvků* $\underline{\underline{n = 5.}}$

**Variace $k$-té třídy** z $n$ prvků dané základní $n$-prvkové množiny $(0 \leq k \leq n)$ je každá uspořádaná $k$-tice různých prvků, vybraná ze základní $n$-prvkové množiny tak, že **záleží** na pořadí prvků (a prvky se neopakují).

Pro počet $V_k(n)$ všech těchto variací platí:

$$V_k(n) = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}_{k\text{činitelů}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**Příklad 12.3** *Kolika způsoby může být odměněno zlatou, stříbrnou nebo bronzovou medailí 13 účastníků sportovní soutěže?*

**Řešení:**

*Ze 13 sportovců vybíráme 3, záleží na pořadí - jedná se o variace.*

$$V_3(13) = \frac{13!}{10!} = 11 \cdot 12 \cdot 13 = \underline{\underline{1716}}$$

**Příklad 12.4** *Pro kolik prvků je poměr variací druhé třídy ku počtu variací třetí třídy roven 1:20.*

**Řešení:**

$$V_2(n) : V_3(n) = 1 : 20 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} : \frac{n!}{(n-3)!} = 1 : 20 \Rightarrow \frac{1}{n-2} = \frac{1}{20} \Rightarrow \quad \underline{\underline{n = 22}}$$

**Kombinace $k$-té třídy** z $n$ prvků dané základní $n$-prvkové množiny $(0 \leq k \leq n)$ je každá $k$-tice různých prvků, vybraná ze základní $n$-prvkové množiny tak, že **nezáleží** na pořadí prvků (a prvky se neopakují).

Pro počet $C_k(n)$ všech těchto kombinací platí:

$$C_k(n) = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

Pro kombinační číslo $\binom{n}{k}$, čteme n nad k, $0 \leq k \leq n$ platí:

$$\binom{n}{1} = n; \qquad \binom{n}{n} = 1; \qquad \binom{n}{0} = 1; \qquad \binom{0}{0} = 1;$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1};$$

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}.$$

**Příklad 12.5** *Ve třídě je 5 studentů a 3 studentky, kteří hrají tenis. Kolik lze sehrát zápasů, v nichž budou hrát dvě studentky proti dvěma studentům? Každá čtveřice bude hrát pouze jednou.*

**Řešení:**

*Počet dvojic studentů, které lze vybrat z pěti studentů je dán* $C_2(5) = \binom{5}{2}$ *(nezáleží na pořadí).*

*Počet dvojic studentek, které lze vybrat ze tří studentek je* $C_2(3) = \binom{3}{2}$.

*Počet zápasů je pak* $\binom{5}{2} \cdot \binom{3}{2} = \frac{5!}{3!2!}\frac{3!}{2!} = \underline{\underline{30.}}$

**Příklad 12.6** *Kolika přímkami lze spojit 10 bodů, jestliže tři z nich leží na jedné přímce?*

**Řešení:**

*Každé dva různé body určují přímku, nezáleží na pořadí, tedy*

$$C_2(10) = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = 45.$$

*Třemi body (ležícími na přímce) by byly určeny tři přímky, takže počet přímek je*

$$p = 45 - 2 = \underline{\underline{43.}}$$

## 12.2 Binomická věta

**Binomická věta.** Pro libovolná reálná (i komplexní) čísla $a, b$ a pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí, že

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

Binomické koeficienty - kombinační čísla - lze vypočítat z Pascalova trojúhelníka:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

atd.

$$1$$

$$\underbrace{1 \quad 1}$$

$$\underbrace{1 \quad 2} \quad 1$$

$$\underbrace{1 \quad 3} \quad 3 \quad 1$$

$$\underbrace{1 \quad 4} \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

atd.

**Příklad 12.7** *Umocněte podle binomické věty* $(2x - \frac{3}{2})^4$.

**Řešení:**

$$(2x - \frac{3}{2})^4 = \binom{4}{0}(2x)^4 + \binom{4}{1}(2x)^3(-\frac{3}{2}) + \binom{4}{2}(2x)^2(-\frac{3}{2})^2 +$$

$$+ \binom{4}{3}(2x)^1(-\frac{3}{2})^3 + \binom{4}{4}(-\frac{3}{2})^4 = \underline{\underline{16x^4 - 48x^3 + 54x^2 - 27x + \frac{81}{16}}}$$

**Příklad 12.8** *V rozvoji výrazu* $(2x^2 - \frac{3}{x})^6$ *určete prostý člen.*

**Řešení:**
*Označme* $A_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ *v obecném binomickém rozvoji.*

*Potom*

$$A_{k+1} = \binom{6}{k} (2x^2)^{6-k} \left(-\frac{3}{x}\right)^k = \binom{6}{k} 2^{6-k} (-3)^k x^{12-2k-k}$$

*Jde-li o prostý člen, pak* $x^{12-2k-k} = x^0 \Rightarrow k = 4$.

*Tedy pátý člen neobsahuje* $x$ *a je roven*

$$\binom{6}{4} (2x^2)^2 \left(-\frac{3}{x}\right)^4 = \frac{6!}{2!4!} 4 \cdot 81 = \underline{\underline{4860}}$$

**Příklad 12.9** *Upravte výraz*

$$V = \frac{(n+2)!}{n!} - 2\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!}, \quad n \in \mathbb{N} - \{1, 2\}.$$

[2]

**Příklad 12.10** *V lavici je šest studentů, z nichž dva sourozenci chtějí sedět vedle sebe. Kolika způsoby je lze přesadit?*

[240]

**Příklad 12.11** *Bylo zakoupeno 20 lístků do jedné řady v kině. Kolika způsoby je lze rozdělit mezi 10 chlapců a 10 děvčat, chtějí-li chlapci a děvčata sedět střídavě vedle sebe?*

[$2(10!)^2$]

**Příklad 12.12** *V kolika bodech se protíná 9 přímek, z nichž čtyři jsou navzájem rovnoběžné?*

[30]

**Příklad 12.13** *Kolik různých signálů lze utvořit z pěti praporků různých barev, jestliže každý signál lze vytvořit umístěním jednoho až všech pěti praporků vedle sebe?*

[325]

**Příklad 12.14** *Pro přípustné hodnoty upravte*

$$\frac{(n+1)!}{(n-2)!} - 4\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + 9\frac{n!}{(n-1)!}.$$

[$n(n-2)^2$ *pro* $n \geq 2$]

**Příklad 12.15** *Z kolika prvků dostaneme 380 variací druhé třídy?*

*[20]*

**Příklad 12.16** *Řešte v* $\mathbb{N}$ *rovnici*

$$\binom{x-1}{x-3} + \binom{x-2}{x-4} = 9.$$

*[*$x = 5$*]*

**Příklad 12.17** *Řešte v* $\mathbb{N}$ *nerovnici.*

$$\frac{(n-1)!}{(n-3)!} < 2\binom{9}{7}$$

*[*$n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$*]*

**Příklad 12.18** *V rozvoji* $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right)^{10}$ *určete* $x \in \mathbb{R}$ *tak, aby pátý člen rozvoje byl roven 105.*

*[*$x = \frac{1}{8}$*]*

**Příklad 12.19** *Který člen rozvoje* $(\frac{1}{x} + 2x^3)^{10}$ *obsahuje* $x^6$*?*

*[pátý]*

**Příklad 12.20** *Najděte komplexní číslo* $\left(\frac{i\sqrt{3}-1}{2}\right)^6$.

*[1]*

# Reference

[1] Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky. Praha, Prometheus, 1999.

[2] Chrastinová, M., Kolářová E.: Matematika - Přijímací zkoušky na vysoké školy. Brno, FEI VUT, 2000.

[3] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky. Praha, Prometheus, 2002.

[4] Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II. Praha, Prometheus, 1999.