0.1 Elementy matematické logiky

Výroky

Připomeňme, že ***výrok*** chápeme jako jazykové vyjádření myšlenek, jimiž přisuzujeme předmětům jisté vlastnosti nebo jimiž stanovíme vztahy mezi předměty; je to (jazykový) výraz, o němž má smysl říci, že je pravdivý nebo nepravdivý.

Například „číslo 3 je sudé“ je nepravdivý výrok, naproti tomu sdělení „přijď brzy domů“, „číslo Brno je modré“, „$\sin x > 0$“ výroky nejsou (druhé sdělení je nesmyslná snůška slov, třetí sdělení je tzv. výroková funkce s proměnnou x).

Výrokům přiřazujeme tzv. ***pravdivostní hodnoty***: je-li výrok pravdivý, má pravdivostní hodnotu 1, nepravdivý výrok má pravdivostní hodnotu 0.

Složené výroky sestavujeme pomocí výrokotvorných částic – spojek; jsou-li p, q výroky, definujeme:

definujeme:	***negace výroku*** p	$\bar{p},\ \neg p,\ p'$	opačný výrok
	konjunkce výroků p a q	$p \wedge q$	a, současně
	disjunkce výroků p a q	$p \vee q$	nebo (nevylučovací!)
	implikace výroků p a q	$p \Rightarrow q$	z p plyne q *
	ekvivalence výroků p a q	$p \Leftrightarrow q$	p je ekvivalentní s q **

* p implikuje q, jestliže p pak q, q je nutná podmínka pro p, p je postačující podmínka pro q,

** p právě když q, p tehdy a jen tehdy když q, p když a jen když q, p je nutná a postačující podmínka pro q.

Jednotlivé výrokové spojky mají specifické vlastnosti: například negací pravdivého výroku získáme výrok nepravdivý a naopak, konjunkce dvou výroků je pravdivá pouze v případě, jsou-li oba výroky pravdivé atd. Přehledněji vlastnosti jednotlivých výrokových spojek popíšeme pomocí pravdivostních hodnot:

p	$\neg p$	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	0	1	1	1	1	1
1		0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0		0	0	0	1	1

Stejně tak pomocí tabulky pravdivostních hodnot nejsnáze zjistíme, při jaké kombinaci elementárních výroků je pravdivý nebo nepravdivý komplikovanější výrok.

Příklad 0.1. Vyšetříme výrok $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q)$.

Řešení.

p	q	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow \neg q$	$\neg(p \Rightarrow \neg q)$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow \neg q)$
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1

Daný výrok je tedy pravdivý bez ohledu na to, jsou-li výroky p, q pravdivé nebo nepravdivé. □

Složitější výroky jsou někdy nepřehledné vzhledem k vysokému počtu závorek, které udávají pořadí, ve kterém se mají jednotlivé spojky aplikovat; proto užíváme konvenci o pořadí, jak „silně“ spojky vážou elementární výroky. Pořadí je následující:

- negace,
- konjunkce a disjunkce,
- implikace a ekvivalence.

Tedy např. místo

$$(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \qquad \text{píšeme} \qquad p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$

a místo

$$((\neg p) \wedge q) \Rightarrow (p \vee (\neg q)) \qquad \text{píšeme} \qquad \neg p \wedge q \Rightarrow p \vee \neg q.$$

V příkladu 0.1 jsme viděli, že složený výrok může mít takový tvar, že je vždy pravdivý bez ohledu na to, jsou-li jednotlivé elementární výroky, ze kterých je tento složený výrok sestaven, pravdivé nebo nepravdivé (tedy má pravdivostní hodnotu 1 při libovolném vyhodnocení); takové výroky se nazývají ***tautologie***; výrok, který je vždy nepravdivý (pro libovolné ohodnocení elementárních výroků má pravdivostní hodnotu 0), se nazývá ***kontradikce***.

Uvedeme si některé další tautologie (jako cvičení prověřte, že se o tautologie skutečně jedná):

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

negace implikace $\quad \neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

De Morganova pravidla	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
distributivita	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
dvojí negace	$p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$
zákon vyloučeného třetího	$p \vee \neg p$

Až na poslední vztah mají všechny uvedené tautologie tvar ekvivalence; výroky napravo jsou pravdivé právě tehdy, když jsou pravdivé výroky nalevo. Pravdivostní hodnota složeného výroku se tedy nezmění, nahradíme-li dílčí výrok v něm vystupující výrokem s ním ekvivalentním (provedeme ekvivalentní úpravu). To nám umožňuje složité výroky postupně zjednodušovat.

Příklad 0.2. Pomocí výše uvedených ekvivalentních úprav zjednodušíme výrok $\neg\left[(p \wedge q \Rightarrow \neg q) \wedge (p \Rightarrow q)\right]$:

$$\begin{array}{rccr}
 & \neg\left[(p \wedge q \Rightarrow \neg q) \wedge (p \Rightarrow q)\right] & \Leftrightarrow & \text{(De Morganův vzorec)} \\
\Leftrightarrow & \neg(p \wedge q \Rightarrow \neg q) \vee \neg(p \Rightarrow q) & \Leftrightarrow & \text{(negace implikace)} \\
\Leftrightarrow & [(p \wedge q) \wedge \neg\neg q] \vee (p \wedge \neg q) & \Leftrightarrow & \text{(dvojí negace)} \\
\Leftrightarrow & (p \wedge q \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) & \Leftrightarrow & \\
\Leftrightarrow & (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) & \Leftrightarrow & \text{(distributivita)} \\
\Leftrightarrow & p \wedge (q \vee \neg q) & \Leftrightarrow & \\
\Leftrightarrow & p & &
\end{array}$$

Výrokové funkce – predikáty

Představme si, že pro $x \in \mathbb{R}$ zkoumáme výraz $x > 3$. Tento výraz není výrok; stane se jím, až za x dosadíme některé konkrétní reálné číslo, a v závislosti na tom, které číslo zvolíme, bude pravdivý nebo nepravdivý. Takový výraz se nazývá ***výroková funkce*** (***forma***), také ***predikát***. Výroková funkce obsahuje proměnné; ***proměnná*** se dá chápat jako prázdné místo, kam lze dosazovat libovolné prvky z určité množiny, např $\mathbb{R}, \mathbb{C}$, která se nazývá ***přípustný obor*** dané proměnné. Po dosazení za všechny proměnné se predikát stane výrokem – buď pravdivým nebo nepravdivým. Prvky množiny, pro něž je výrok pravdivý, tvoří ***obor pravdivosti*** výrokové formy.

Příklad 0.3. $\frac{x}{2} \in \mathbb{N}$ je predikát s přípustným oborem (například) $\mathbb{R}$;

dosadíme-li za x například π, 8, $-\frac{3}{2}$, dostaneme výroky $\frac{\pi}{2} \in \mathbb{N},\ 4 \in \mathbb{N},\ -\frac{3}{4} \in \mathbb{N}$, z nichž druhý je pravdivý a první a třetí nepravdivý. Obor pravdivosti tvoří všechna kladná sudá čísla.

Kvantifikátory

Je-li V predikát obsahující proměnnou x (event. i další), pak výraz

$\exists x\,(V)$	nebo	$\exists x : V$	chápeme jako tvrzení	existuje x tak, že platí V
$\forall x\,(V)$	nebo	$\forall x : V$		pro každé x platí V

Přitom $\exists$ se nazývá ***existenční kvantifikátor***, $\forall$ se nazývá ***všeobecný kvantifikátor***.

Poznamenejme, že ve výrazech s kvantifikátory často uvádíme přímo přípustný obor pro proměnnou; píšeme $\forall x \in M : V(x)$, $\exists x \in M : V(x)$.

Jestliže predikát V obsahuje jedinou proměnnou x, je $\exists x\,(V)$ resp. $\forall x\,(V)$ výrok; říkáme, že proměnná x je ***vázaná*** kvantifikátorem. V opačném případě jde zase o predikát s tzv. ***volnou proměnnou*** a můžeme utvořit nové výrazy (predikáty, výroky) $\forall y\,\exists x\,(V)$, $\exists y\,\exists x\,(V)$ a podobně.

Příklad 0.4. Máme zjistit, který z následujících predikátů s proměnnou $x \in \mathbb{R}$ je pravdivý výrok:

a) $x \leq 2$ b) $\forall x\,(x \leq 2)$ c) $\exists x\,(x \leq 2)$

d) $\forall x\,(x \in (-\infty, 2\rangle \Leftrightarrow x \leq 2)$

Řešení.

a) není výrok (proměnná x je volná);

b) je nepravdivý výrok; lze najít číslo $a \in \mathbb{R}$ (např. $a = 3$) tak, že výrok $a \leq 2$ je nepravdivý;

c) je pravdivý výrok; stačí najít jedno konkrétní číslo $a \in \mathbb{R}$ (např. $a = 0$) tak, že výrok $a \leq 2$ je pravdivý;

d) jedná se o pravdivý výrok, kterým definujeme interval.

□

Kvantifikátory tedy můžeme řadit za sebou, přičemž na jejich pořadí záleží. Např.

$\forall x \in \mathbb{R}\,\exists y \in \mathbb{R}\,(x^2 = y)$ je jiný výrok než $\exists y \in \mathbb{R}\,\forall x \in \mathbb{R}\,(x^2 = y)$

(první je pravdivý, druhý nepravdivý).

Příklad 0.5. Máme vyšetřit pravdivost následujících výroků pro reálné proměnné x a y:

a) $\forall x\,\exists y\,(x < y)$ b) $\exists y\,\forall x\,(x < y)$

Řešení.

a) Výrok je pravdivý; stačí pro libovolné pevně zvolené x položit $y = x + 1$ – výrok $x < x + 1$ je pravdivý pro každé reálné x.

b) Výrok je nepravdivý; jeho pravdivost by znamenala, že existuje největší reálné číslo. (∞ není reálné číslo!)

□

Při vyšetřování reálných čísel se osvědčilo zavést symbol $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Použijeme-li toto označení, můžeme formulovat pravdivý výrok $\exists y \in \overline{\mathbb{R}}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (x < y)$.

Často potřebujeme utvořit negaci výroku s kvantifikátory. Užíváme přitom tyto ekvivalence:

$$\neg\,(\forall x \in M:\ V(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M: \neg V(x), \qquad \neg\,(\exists x \in M:\ V(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M: \neg V(x).$$

Příklad 0.6.

$$\neg\,[\forall x \in M:\ (P(x) \Rightarrow Q(x))] \Leftrightarrow \exists x \in M: \neg[P(x) \Rightarrow Q(x)] \Leftrightarrow \exists x \in M:\ (P(x) \wedge \neg Q(x)).$$

Shrnutí

V tomto odstavci jsme připomněli následující pojmy:

- výrok: jazykové spojení, o kterém lze říci, zda je pravdivé nebo nepravdivé,
- výrokové spojky, pomocí nichž sestavujeme složitější výroky: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;
- ohodnocení výroků pomocí pravdivostních hodnot,
- tautologie a kontradikce: výrok vždy pravdivý resp. vždy nepravdivý,
- výroková funkce (predikát): tvrzení, které obsahuje proměnnou a které se stane výrokem, jestliže za tuto proměnnou dosadíme prvek z přípustné množiny,
- kvantifikátory: $\forall$ – všeobecný a $\exists$ – existenční.

Cvičení

1. Formulujte, co rozumíme výrokem a uveďte příklady.
2. Nechť p znamená „je chladno“ a q „prší“. Vyjádřete slovně následující složené výroky:

   a) $\neg p$ b) $p \wedge q$ c) $p \vee q$ d) $q \vee \neg p$

3. Nechť p znamená „je vysoká“ a q „je hezká“. Zapište symbolicky následující výroky:

   a) Je vysoká a hezká.

   b) Je vysoká, ale není hezká.

   c) Není pravda, že je nevysoká a hezká.

   d) Není ani vysoká, ani hezká.

   e) Je vysoká, nebo je nevysoká a hezká.

   f) Není pravda, že je nevysoká nebo nehezká.

4. Najděte pravdivostní hodnoty následujících složených výroků:

   a) Paříž je ve Francii a zároveň $2 + 2 = 4$.

   b) Paříž je v Anglii a zároveň $2 + 2 = 4$.

   c) Paříž je ve Francii a zároveň $2 + 2 = 5$.

   d) Paříž je v Anglii a zároveň $2 + 2 = 5$.

5. Najděte pravdivostní hodnoty následujících složených výroků („nebo“ je zde ve smyslu nevylučovacím):

   a) $1 + 1 = 5$ nebo $2 + 2 = 4$ b) $2 + 5 = 9$ nebo $3 + 7 = 8$

   c) $1 + 1 = 5$ nebo $3 + 3 = 4$ d) $2 + 5 = 9$ nebo $1 + 7 = 8$

6. Najděte pravdivostní hodnoty následujících složených výroků:

   a) Kodaň je v Dánsku, a $1 + 1 = 5$ nebo $2 + 2 = 4$.

   b) Paříž je v Anglii, nebo $1 + 1 = 2$ a $3 + 3 = 7$.

   c) Kodaň je v Dánsku, nebo $1 + 5 = 8$ a $3 + 3 = 6$.

   d) Paříž je v Anglii, a $3 + 4 = 7$ nebo $2 + 6 = 8$.

7. Pomocí tabulky pradivostních hodnot ohodnoťte výroky:

   a) $p \wedge (q \vee r)$ b) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

8. Definujte tautologii a kontradikci a uveďte příklady.

9. Ověřte, že:

   a) $p \vee \neg(p \wedge q)$ je tautologie,

   b) $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$ je kontradikce,

   c) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ je tautologie,

   d) $p \Rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ je tautologie.

10. Sestavte tabulku pravdivostních hodnot pro logickou spojku ∇ – „vylučovací nebo“: $p\nabla q$ znamená „platí p nebo q, ale ne současně“.

11. Ověřte ekvivalenci $p\vee q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.

12. Nechť $p(x)$ je výraz „$x + 2 > 5$“. Rozhodněte, zda je to výroková funkce; v kladném případě zjistěte, zda následující množiny jsou její připustné obory:

    a) $\mathbb{N}$, b) $M = \{-1, -2, -3, \dots\}$, c) $\mathbb{C}$.

13. Určete pravdivostní hodnoty následujících výroků: (Připustná množina je $\mathbb{R}$)

    a) $\forall x : |x| = x$, b) $\exists x : x^2 = x$, c) $\forall x : x + 1 > x$, d) $\exists x : x + 2 = x$.

14. Utvořte negace výroků z cv. 13 a vzniklé výroky co nejvíce zjednodušte.

15. Nechť $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Určete pravdivostní hodnoty následujících výroků. Utvořte a co nejvíce zjednodušte jejich negace:

    a) $(\exists x \in A)(x + 3 = 10)$, b) $(\forall x \in A)(x + 3 < 10)$,

    c) $(\exists x \in A)(x + 3 < 5)$, d) $(\forall x \in A)(x + 3 \leq 7)$.

16. Utvořte negace výroků:

    a) $\forall x\, p(x) \wedge \exists y\, q(y)$, b) $\exists x\, p(x) \vee \forall y\, q(y)$.

17. Určete pravdivostní hodnoty následujících výroků s připustnou množinou $\{1, 2, 3\}$:
    a) $\exists x \forall y : x^2 < y + 1$, b) $\forall x \exists y : x^2 + y^2 < 12$,

    c) $\forall x \forall y : x^2 + y^2 < 12$,

    d) $\exists x \forall y \exists z : x^2 + y^2 < 2z^2$, e) $\exists x \exists y \forall z : x^2 + y^2 < 2z^2$.

18. Nechť $A = \{1, 2, \dots, 9, 10\}$ je připustná množina pro následující predikáty. Jde-li o výroky, určete pravdivostní hodnotu. Jde-li o výrokové funkce, najděte obor pravdivosti:

    a) $\forall x \exists y : x + y < 14$, b) $\forall x \forall y : x + y < 14$,

    c) $\forall y : x + y < 14$, d) $\exists y : x + y < 14$.

19. Utvořte negace následujících výroků:

    a) $\exists x \forall y : p(x, y)$, b) $\forall x \forall y : p(x, y)$,

    c) $\exists y \exists x \forall z : p(x, y, z)$, d) $\forall x \exists y : (p(x) \vee q(y))$,

    e) $\exists x \forall y : (p(x, y) \Rightarrow q(x, y))$, f) $\exists y \exists x : (p(x) \wedge \neg q(y))$.

0.2 Množiny

Ze střední školy resp. z Matematického semináře je vám známo, že v matematice nazýváme jakýkoliv soubor či systém objektů ***množinou***. Množiny vymezujeme výčtem prvků nebo predikátem – charakterizací:

Je-li $V(x)$ predikát, potom symbol $\{x \,|\, V(x)\}$ označuje množinu všech prvků a, pro které je $V(a)$ pravdivý výrok; někdy uvádíme obor přípustný pro proměnnou x a píšeme např.: $\{x \in \mathbb{R} \,|\, V(x)\}$.

Příklad 0.7. $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 2\} = (-\infty, 2\rangle$.

Značí-li A množinu jistých objektů a x je jeden z nich, říkáme, že x ***je prvkem*** množiny A (x patří do A) a píšeme $x \in A$. Není-li y prvkem množiny A, píšeme $y \notin A$.

Jestliže $\mathcal{S}$ je množina, jejíž prvky jsou opět množiny, nazýváme ji zpravidla ***systémem množin***.
Dvě množiny mají stejné prvky (tedy jsou si rovny), jestliže jsou charakterizovány ekvivalentními výroky:

$$\{x \,|\, U(x)\} = \{x \,|\, V(x)\} \Leftrightarrow \forall x \,(U(x) \Leftrightarrow V(x)).$$

Operace s množinami

Nechť A, B jsou množiny. Potom definujeme vztahy mezi množinami a operace s množinami pomocí následujících výroků:

rovnost množin	$A = B \;\Leftrightarrow\; \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
podmnožina	$A \subset B \;\Leftrightarrow\; \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$
průnik množin	$\forall x(x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B)$
sjednocení množin	$\forall x(x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B)$
rozdíl množin	$\forall x(x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B)$

Je-li $A \subset B$, označujeme množinu $B \setminus A$ symbolem $\overline{A}$ a nazýváme ji ***doplňkem (komplementem)*** množiny A v množině B. Tuto symboliku používáme především tehdy, zkoumáme-li komplementy více množin k jedné pevné množině.

Příklad 0.8. Nechť

$$A = \{1, 2, 3, 4\},\; B = \{2, 4, 6\},\; C = \{1, 2, 4, 8\} \text{ a } X = \{1, 2, \ldots, 10\}.$$

Máme popsat výčtem prvků množiny (doplňky se rozumí vzhledem k X):

$A \cup B,\; B \cap C,\; A \setminus B,\; B \setminus A,\; A \cup (B \cap C),\; (A \cup B) \cap C,\; \overline{A \cup B},\; \overline{A} \cup \overline{B}.$

Řešení. $A \cup B = \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$B \cap C = \{x \,|\, x \in B \wedge x \in C\} = \{2, 4\}$

$A \setminus B = \{x \,|\, x \in A \wedge x \notin B\} = \{1, 3\}$

$B \setminus A = \{x \,|\, x \in B \wedge x \notin A\} = \{6\}$

$A \cup (B \cap C) = \{x \,|\, x \in A \wedge x \in B \cap C\} = \{1, 2, 3, 4\}$

$(A \cup B) \cap C = \{x \,|\, x \in A \cup B \wedge x \in C\} = \{1, 2, 4, \}$

$\overline{A \cup B} = \{x \,|\, x \in X \wedge x \notin A \cup B\} = \{5, 7, 8, 9, 10\}$

$\overline{A} = \{x \,|\, x \in X \wedge x \notin A\} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $\overline{B} = \{x \,|\, x \in X \wedge x \notin B\} = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$

$\overline{A} \cup \overline{B} = \{x \,|\, x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\} = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ □

Množina neobsahující žádné prvky se nazývá ***prázdná množina***. Tuto množinu značíme symbolem $\emptyset$, výrok $\exists x\ (x \in \emptyset)$ je tedy nepravdivý. Prázdnou množinu můžeme definovat libovolnou kontradikcí, například $\emptyset = \{x \,|\, x \in A \wedge x \notin A\}$.

Prázdná množina má mnoho překvapivých vlastností, se kterými se setkáme později; některé jsou ověřeny v následujícím příkladu:

Příklad 0.9.

1. Ukažme, že pro libovolnou množinu A platí $\emptyset \subset A$.
2. Prověřme pravdivost následujících výroků:
   a) $\emptyset \notin \emptyset$ b) $\emptyset \subset \emptyset$ c) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ d) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$

Řešení.

1. Použijeme výrok definující podmnožinu:

   $$\emptyset \subset A \Leftrightarrow \forall x(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$$

   $x \in \emptyset$ je *nepravda*, tedy implikace ve zkoumaném výroku je vždy pravdivá (*nepravda* $\Rightarrow$ *cokoliv*).
2. Prázdná množina nemá žádné prvky, tedy ani samu sebe.
3. viz 1. pro $A = \emptyset$.
4. $\{\emptyset\}$ je množina zadaná výčtem prvků, jediný její prvek je $\emptyset$; tedy $\emptyset \in \{\emptyset\}$.
5. viz 1. pro $A = \{\emptyset\}$.

□

Množinu všech podmnožin dané množiny A nazýváme ***potenční množinou*** a označujeme $\mathcal{P}(A)$. Tedy $\mathcal{P}(A) = \{X \,|\, X \subset A\}$.

Příklad 0.10. Zřejmě platí $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.

Ukážeme,že je-li A konečná množina o n prvcích, má její potenční množina 2^n prvků: Podmnožinu o k prvcích (v množině A) můžeme utvořit $\binom{n}{k}$ různými způsoby (je to počet kombinací k-té třídy z n prvků). Máme tedy

$\binom{n}{0}$ podmnožin o 0 prvcích (což je $\emptyset$)
$\binom{n}{1}$ jednoprvkových podmnožin
$\binom{n}{2}$ dvouprvkových podmnožin
$\binom{n}{k}$ k-prvkových podmnožin
$\vdots$
$\binom{n}{n}$ n-prvkových podmnožin

Celkem

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n.$$

Proto se také někdy množina všech podmnožin dané množiny A označuje symbolem 2^A.

Příklad 0.11. Pro množiny z příkladu 0.8 máme určit

$$\mathcal{P}(A \cap C),\ \mathcal{P}(B),\ \mathcal{P}(A \cap C) \cap \mathcal{P}(B) \quad \text{a} \quad \mathcal{P}(A \cap B \cap C).$$

Řešení.

$A \cap C = \{1,2,4\}$

$\mathcal{P}(A \cap C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{1,2,4\}\}$,

$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}, \{2,4,6\}\}$,

$\mathcal{P}(A \cap C) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{2,4\}\}$;

$A \cap B \cap C = \{2,4\}$,

$\mathcal{P}(A \cap B \cap C) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{2,4\}\}$. □

Kartézským součinem $A \times B$ množin A, B (v tomto pořadí) nazýváme množinu

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Přitom (a,b) znamená ***uspořádanou dvojici*** prvků a, b.
Je-li speciálně $A = B$, pak $A \times A$ značíme A^2. Například $\mathbb{R}^2$ bude značit množinu všech uspořádaných dvojic (x,y) reálných čísel.

Jsou-li $A, B, A \neq B$ neprázdné množiny, pak $A \times B \neq B \times A$:

Příklad 0.12. Nechť $A = \{1,2\}$, $B = \{3\}$. Potom $A \times B = \{(1,3), (2,3)\}$,
a $B \times A = \{(3,1), (3,2)\}$.

Číselné množiny

Číselné obory se obvykle konstruují postupně tak, že se vychází od oboru ***přirozených čísel*** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Součet a součin přirozených čísel je přirozené číslo. $\mathbb{N}$ se rozšíří na obor celých čísel $\mathbb{Z}$ – ***celým číslem*** nazýváme každé číslo, které lze vyjádřit jako rozdíl přirozených čísel. Součet, součin a rozdíl celých čísel je celé číslo.

Každé číslo, které můžeme vyjádřit jako podíl celého čísla a celého čísla různého od nuly, nazýváme ***racionálním číslem***. Obor racionálních čísel značíme písmenem $\mathbb{Q}$. Součet, rozdíl, součin a podíl dvou racionálních čísel (kromě dělení nulou) je racionální číslo. Všechna racionální čísla můžeme vyjádřit ve tvaru konečných nebo nekonečných periodických desetinných zlomků. Číslo, které lze vyjádřit ve tvaru nekonečného neperiodického desetinného zlomku, nazýváme ***iracionálním číslem***. Takovými čísly jsou např. čísla $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$, π atd. Množina všech racionálních a iracionálních čísel se nazývá obor ***reálných čísel*** $\mathbb{R}$.

Množina reálných čísel není uzavřená k opperaci tvoření odmocnin – sudé odmocniny ze záporných čísel nejsou reálná čísla; např. rovnice

$$x^2 + 1 = 0, \qquad x^2 + 2x + 2 = 0 \quad \big(\text{tj. } (x+1)^2 + 1 = 0\big)$$

nejsou v $\mathbb{R}$ řešitelné.

Při hledání kořenů algebraických rovnic je však vhodné se sudými odmocninami ze záporných čísel (především s druhou odmocninou z čísla -1) počítat:

Cardanův vzorec pro rovnici $x^3 = ax + b$ má tvar

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

a má smysl pouze pro

$$c = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 \geq 0.$$

Ale například rovnice

$$x^3 = 15x + 4 \quad \text{má řešení} \quad x = 4, \quad \text{přičemž} \quad c = 2^2 - 5^3 = -121.$$

Podívejme se, co dostaneme, jestliže formálně dosadíme do Cardanova vzorce:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = (*)$$

$$= 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4,$$

přičemž rovnost označenou $(*)$ získáme následujícím způsobem:

$$\big(2 \pm \sqrt{-1}\big)^3 = 2^3 \pm 3 \cdot 2^2 \cdot \big(\sqrt{-1}\big) + 3 \cdot 2 \cdot \big(\sqrt{-1}\big)^2 \pm \big(\sqrt{-1}\big)^3 =$$

$$= 8 \pm 12\sqrt{-1} - 6 \pm (-1) \cdot \sqrt{-1} = 2 \pm 11\sqrt{-1}.$$

Tedy při formálně správném výpočtu s použitím „imaginární“ odmocniny z čísla -1 dostaneme správný (a přitom reálný) výsledek $x = 4$.

Podobné úvahy vedly k zavedení oboru ***komplexních čísel*** $\mathbb{C}$. Komplexním číslem rozumíme číslo z tvaru $z = x + j\,y$, kde $x, y \in \mathbb{R}$ a j je tzv. imaginární jednotka, pro kterou platí $j^2 = -1$.

Reálná čísla

Množinu M, jejíž všechny prvky jsou čísla, nazýváme ***číselnou množinou***. Pokud neřekneme výslovně nic jiného, budeme v dalším hovořit o číselných množinách reálných čísel.

Nejčastěji užívanými množinami reálných čísel jsou ***intervaly***; připomeňme jejich definici:

Definice 0.13. Nechť platí $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Množina

1. $(a, b) = \{x | a < x < b\}$ se nazývá ***otevřený interval***,
2. $\langle a, b\rangle = \{x | a \leq x \leq b\}$ se nazývá ***uzavřený interval***,
3. $\langle a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ se nazývá ***zleva uzavřený a zprava otevřený interval***,
4. $(a, b\rangle = \{x | a < x \leq b\}$ se nazývá ***zleva otevřený a zprava uzavřený interval***.

Vzhledem k uspořádání reálných čísel je vhodné zavést symboly $-\infty$ a ∞ předpisem

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad (-\infty < x) \wedge (x < \infty).$$

Body $-\infty$ a ∞ se nazývají ***nevlastní body*** reálné osy.

Zavedeme označení: $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} = \overline{\mathbb{R}}$.

Dále definujeme následující intervaly:

1. $(a, \infty) = \{x | a < x\}$,
2. $\langle a, \infty) = \{x | a \leq x\}$,
3. $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$,
4. $(-\infty, b\rangle = \{x | x \leq b\}$.

Podobně píšeme $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Shrnutí

V tomto odstavci jsme zopakovali základní pojmy, které se týkají množin:

- dva hlavní způsoby zadání množiny: výčtem prvků resp. výrokovou funkcí,
- operace s množinami: rovnost, průnik, sjednocení a rozdíl množin, pojem podmnožiny a doplňku vzhledem k dané množině,
- prázdná množina, potenční množina a kartézský součin množin,
- množina reálných čísel $\mathbb{R}$ a její podmnožiny: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, intervaly.

Cvičení

1. Nechť $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Najděte množiny $A \cup A$, $A \cap A$, $A \setminus A$. Dají se výsledky zobecnit?

2. Nechť A je množina všech celých čísel dělitelných dvěma, B množina všech celých čísel dělitelných třemi, C množina všech celých čísel dělitelných šesti. Zjistěte, které z následujících vztahů jsou správné:

$$\begin{array}{llllll} a) & A \subset B, & b) & A \subset C, & c) & B \subset C, \\ d) & B \subset A, & e) & C \subset A, & f) & C \subset B, \\ g) & A \cup B = C, & h) & A \setminus B = C, & i) & A \cap B = C. \end{array}$$

3. Nechť M je množina všech přirozených čísel menších než 16, M_1 je její podmnožina, která obsahuje všechna sudá čísla, M_2 podmnožina, která obsahuje všechna čísla dělitelné třemi a M_3 podmnožina, která obsahuje všechna čísla dělitelná pěti. Najděte množiny:

$$\begin{array}{llll} a) & M_1 \cup M_2, & b) & M_1 \cup M_2 \cup M_3, \\ c) & M_2 \cap M_3, & d) & M_1 \cap M_2 \cap M_3, \\ e) & (M_1 \cup M_2) \cap M_3, & f) & (M_1 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_3), \\ g) & M_2 \setminus M_1, & h) & M_1 \setminus M_2, \\ i) & (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1), & j) & (M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2), \\ k) & (M_1 \cap M_2) \cup M_3, & l) & (M_1 \cup M_2) \cap (M_2 \cup M_3). \end{array}$$

4. Znázorněte množiny *a)*– *l)* z předchozího příkladu, jestliže pod M_1, M_2, M_3 rozumíme čtverce se stranou stejné délky, přičemž středy čtverců S_1, S_2, S_3 leží na přímce procházející protilehlými vrcholy uvedených čtverců a S_3 je střed úsečky S_1S_2.

5. Nechť A, B, C jsou soustředné kruhy s poloměry r_1, r_2, r_3, kde $0 < r_1 < r_2 < r_3$.
a) Znázorněte množiny $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $B \setminus C$, $C \setminus B$.
b) Znázorněte doplňky $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ vzhledem k C.