

Cvičení 6 - Elementární funkce 2

Logaritmické funkce

1) Pro která x platí

a) $-1 \leq \log_3 x \leq 2$ b) $\log_2(2x-3) < 3$

Řešte rovnice

2) $2\ln(x-2) = \ln(14-x)$

3) $\log(x+1) + \log(x-1) = \log x + \log(x+2)$

4) $\log(x^3+1) - \log 7x = \log(x+1) - \log 6$

5) $\frac{1}{2}\log x^2 + \log 4 = 2 - \log(x+10)$

6) $\frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$

7) $3 \cdot \log_x 32 + 5 \log_{32} x = 8$

Řešte následující nerovnice:

8) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{x-3} \geq 0$ 9) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x + \log_{\frac{1}{3}} x \geq 2$ 10) $\log_5(x+1) + 1 \geq \log_5(x^2-1)$

Goniometrické funkce

1) Určete a) $\sin(-\frac{5}{6}\pi)$ b) $\cotg(-\frac{49}{6}\pi)$

2) Určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin x \geq 0 \wedge \cos x < 0$

3) Pro $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ platí $\sin x = -\frac{\sqrt{63}}{8}$. Vypočtěte $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\cotg x$.

Řešte v \mathbb{R} rovnice

4) $\sin x = \sin 2x$ 5) $\sqrt{2\sin x} = -\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x$ 6) $\operatorname{tg} 3x - \cotg 3x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

7) Řešte v \mathbb{R} nerovnici $\sin x + \sin^2 x \geq \cos^2 x$

8) Najděte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

a) $\sin |x| = 1$ b) $|\sin x| = 1$.

9) Zjednodušte:

a) $\frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$ b) $\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\cotg x - \operatorname{tg} x}$

10) Dokažte, že pro všechny přípustné hodnoty x platí $\frac{\cos x}{1 + \cos x} \cdot \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

Základní vlastnosti funkcí

1. Rozhodněte, zda jsou následující funkce rostoucí nebo klesající:

$$f(x) = x^2 \quad f(x) = x^3 \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad f(x) = e^{-x}$$

2. Ukažte, že pro libovolnou funkci f definovanou na intervalu $(-a, a)$, $a > 0$ platí, že

$$f(x) + f(-x) \text{ je sudá a } f(x) - f(-x) \text{ je lichá funkce.}$$

3. Zjistěte, které z uvedených funkcí jsou sudé resp. liché:

a) $f(x) = 2$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ d) $f(x) = x - x^2$

e) $f(x) = x^3 - x$ f) $f(x) = \frac{1}{2x}$ g) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ h) $f(x) = \frac{x^2}{1+4x^4}$

i) $f(x) = \frac{x}{|x|}$ j) $f(x) = x^4 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ k) $f(x) = x^2 + \sin x^2$ m) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

n) $f(x) = \frac{1}{4 + \cotg^2 x}$ o) $f(x) = \sin x - \cos x$ p) $f(x) = \frac{x + \operatorname{tg} x}{2 + 3 \cos x}$ r) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

s) $f(x) = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$ t) $f(x) = x \ln |x|$

4. Zjistěte, které z následujících funkcí jsou periodické, a najděte jejich periodu.

a) $f(x) = x \sin x$ b) $f(x) = 2 + \cos x + \cos^2 x$ c) $f(x) = \cos 3x$

d) $f(x) = 1 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ e) $f(x) = 2^{3+2\sin x}$ f) $f(x) = 3 \cos 3x - 5 \sin 2x$

5. Zjistěte, které z následujících funkcí jsou prosté, a k těm, které jsou prosté, najděte inverzní funkce:

a) $f(x) = (x-2)(x+2)$ b) $f(x) = \frac{3-\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}$ c) $f(x) = \frac{x^3}{x^3+1} = 1 - \frac{1}{x^3+1}$

d) $f(x) = 2^{1+\ln\sqrt{x-2}}$ e) $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$

6. Ve druhém sloupci najděte funkce inverzní k funkcím v prvním sloupci; nejdříve se pokuste výsledek „uhodnout“ a potom se přesvědčte o správnosti.

$$f_1(x) = \frac{1}{x+2}$$

$$g_1(x) = \frac{x}{1-x}$$

$$f_2(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$g_2(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$f_3(x) = 3 + \frac{1}{x}$$

$$g_3(x) = \frac{1}{x} - 2$$

$$f_4(x) = \frac{x}{2} - 2$$

$$g_4(x) = \frac{1}{x-3}$$

$$f_5(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$g_5(x) = 2x + 4$$