Výroky, výrokové funkce

1. Nechť p znamená „je chladno“ a q „prší“. Vyjádřete slovně následující složené výroky:

   a) $\neg p$ b) $p \wedge q$ c) $p \vee q$ d) $q \vee \neg p$

2. Nechť p znamená „je vysoká“ a q „je hezká“. Zapište symbolicky následující výroky:

   a) Je vysoká a hezká.
   b) Je vysoká, ale není hezká.
   c) Není pravda, že je nevysoká a hezká.
   d) Není ani vysoká, ani hezká.
   e) Je vysoká, nebo je nevysoká a hezká.
   f) Není pravda, že je nevysoká nebo nehezká.

3. Najděte pravdivostní hodnoty následujících složených výroků:

   a) Paříž je ve Francii a zároveň $2 + 2 = 4$.
   b) Paříž je v Anglii a zároveň $2 + 2 = 4$.
   c) Paříž je ve Francii a zároveň $2 + 2 = 5$.
   d) Paříž je v Anglii a zároveň $2 + 2 = 5$.

4. Najděte pravdivostní hodnoty následujících složených výroků („nebo“ je zde ve smyslu nevylučovacím):

   a) $1 + 1 = 5$ nebo $2 + 2 = 4$ b) $2 + 5 = 9$ nebo $3 + 7 = 8$
   c) $1 + 1 = 5$ nebo $3 + 3 = 4$ d) $2 + 5 = 9$ nebo $1 + 7 = 8$

5. Najděte pravdivostní hodnoty následujících složených výroků:

   a) Kodaň je v Dánsku, a $1 + 1 = 5$ nebo $2 + 2 = 4$.
   b) Paříž je v Anglii, nebo $1 + 1 = 2$ a $3 + 3 = 7$.
   c) Kodaň je v Dánsku, nebo $1 + 5 = 8$ a $3 + 3 = 6$.
   d) Paříž je v Anglii, a $3 + 4 = 7$ nebo $2 + 6 = 8$.

6. Pomocí tabulky pradivostních hodnot ohodnoťte výroky:

   a) $p \wedge (q \vee r)$ b) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

7. Ověřte, že:

a) $p \vee \neg(p \wedge q)$ je tautologie,

b) $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$ je kontradikce,

c) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ je tautologie,

d) $p \Rightarrow (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ je tautologie.

8. Ověřte ekvivalenci $p \underline{\vee} q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$.

9. Nechť $p(x)$ je výraz „$x + 2 > 5$“. Rozhodněte, zda je to výroková funkce; v kladném případě zjistěte, zda následující množiny jsou její přípustné obory:

   a) $\mathbb{N}$, b) $M = \{-1, -2, -3, \dots\}$, c) $\mathbb{C}$.

10. Určete pravdivostní hodnoty následujících výroků: (Přípustná množina je $\mathbb{R}$)

   a) $\forall x : |x| = x$, b) $\exists x : x^2 = x$, c) $\forall x : x + 1 > x$, d) $\exists x : x + 2 = x$.

11. Utvořte negace výroků z cv.10 a vzniklé výroky co nejvíce zjednodušte.

12. Nechť $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Určete pravdivostní hodnoty následujících výroků. Utvořte a co nejvíce zjednodušte jejich negace:

   a) $(\exists x \in A)(x + 3 = 10)$, b) $(\forall x \in A)(x + 3 < 10)$,

   c) $(\exists x \in A)(x + 3 < 5)$, d) $(\forall x \in A)(x + 3 \leq 7)$.

13. Utvořte negace výroků:

   a) $\forall x\, p(x) \wedge \exists y\, q(y)$, b) $\exists x\, p(x) \vee \forall y\, q(y)$.

14. Určete pravdivostní hodnoty následujících výroků s přípustnou množinou $\{1, 2, 3\}$:

   a) $\exists x \forall y : x^2 < y + 1$, b) $\forall x \exists y : x^2 + y^2 < 12$,

   c) $\forall x \forall y : x^2 + y^2 < 12$,

   d) $\exists x \forall y \exists z : x^2 + y^2 < 2z^2$, e) $\exists x \exists y \forall z : x^2 + y^2 < 2z^2$.

15. Nechť $A = \{1, 2, \dots, 9, 10\}$ je přípustná množina pro následující predikáty. Jde-li o výroky, určete pravdivostní hodnotu. Jde-li o výrokové funkce, najděte obor pravdivosti:

   a) $\forall x \exists y : x + y < 14$, b) $\forall x \forall y : x + y < 14$,

   c) $\forall y : x + y < 14$, d) $\exists y : x + y < 14$.

16. Utvořte negace následujících výroků:

   a) $\exists x \forall y : p(x, y)$, b) $\forall x \forall y : p(x, y)$,

   c) $\exists y \exists x \forall z : p(x, y, z)$, d) $\forall x \exists y : (p(x) \vee q(y))$,

   e) $\exists x \forall y : (p(x, y) \Rightarrow q(x, y))$, f) $\exists y \exists x : (p(x) \wedge \neg q(y))$.

Množiny

1. Nechť $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Najděte množiny $A \cup A$, $A \cap A$, $A \setminus A$. Dají se výsledky zobecnit?

2. Nechť A je množina všech celých čísel dělitelných dvěma, B množina všech celých čísel dělitelných třemi, C množina všech celých čísel dělitelných šesti. Zjistěte, které z následujících vztahů jsou správné:

$$\begin{array}{llllll} a) & A \subset B, & b) & A \subset C, & c) & B \subset C, \\ d) & B \subset A, & e) & C \subset A, & f) & C \subset B, \\ g) & A \cup B = C, & h) & A \setminus B = C, & i) & A \cap B = C. \end{array}$$

3. Nechť M je množina všech přirozených čísel menších než 16, M_1 je její podmnožina, která obsahuje všechna sudá čísla, M_2 podmnožina, která obsahuje všechna čísla dělitelné třemi a M_3 podmnožina, která obsahuje všechna čísla dělitelná pěti. Najděte množiny:

$$\begin{array}{llll} a) & M_1 \cup M_2, & b) & M_1 \cup M_2 \cup M_3, \\ c) & M_2 \cap M_3, & d) & M_1 \cap M_2 \cap M_3, \\ e) & (M_1 \cup M_2) \cap M_3, & f) & (M_1 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_3), \\ g) & M_2 \setminus M_1, & h) & M_1 \setminus M_2, \\ i) & (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1), & j) & (M_1 \cup M_2) \setminus (M_1 \cap M_2), \\ k) & (M_1 \cap M_2) \cup M_3, & l) & (M_1 \cup M_2) \cap (M_2 \cup M_3). \end{array}$$

4. Znázorněte množiny a)– l) z předchozího příkladu, jestliže pod M_1, M_2, M_3 rozumíme čtverce se stranou stejné délky, přičemž středy čtverců S_1, S_2, S_3 leží na přímce procházející protilehlými vrcholy uvedených čtverců a S_3 je střed úsečky S_1S_2.

5. Nechť A, B, C jsou soustředné kruhy s poloměry r_1, r_2, r_3, kde $0 < r_1 < r_2 < r_3$.
   a) Znázorněte množiny $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $B \setminus C$, $C \setminus B$.
   b) Znázorněte doplňky $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ vzhledem k C.