

Vstupní písemka

1. Pro která a platí $\sqrt[5]{\left(\frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-1}}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-3}} = \sqrt{a}$?

2. a) Utvořte negaci výroku

Nebude-li pršet, nezmoknem (jestliže nebude pršet, potom nezmoknem).

b) Je dán výrok

Pro všechna reálná čísla x platí: je-li $|x| < -1$, potom je $x^2 > 1$

$$(\forall x \in \mathbb{R} : |x| < -1 \Rightarrow x^2 > 1)$$

Určete pravdivostní hodnotu tohoto výroku a utvořte jeho negaci.

3. a) Vypočítejte $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot \dots \cdot i^{100}$

b) Komplexní čísla $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ vyjádřete v goniometrickém tvaru, v tomto tvaru vypočítejte jejich součin a výsledek převedte do algebraického tvaru.

4. Řešte

a) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} > 0$ b) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = x - 3$.

5. Zjistěte, pro která a platí $a^x > a^{x+1}$.

6. Řešte nerovnici $\log_4(2x - 1) < 1$.

7. Pomocí grafu funkce $f(x) = x^3$ nakreslete postupně grafy funkcí

$$f_1(x) = (x-1)^3 - 1, f_2(x) = |(x-1)^3 - 1| \text{ a } g(x) = \left(|x| - 1\right)^3 + 1.$$

V každém kroku napište, pomocí jaké transformace předchozího grafu ten následující vznikl.

8. Zjistěte, zda pro funkci $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ platí $f(f(f(x))) = g(x)$, kde $g(x) = x$.

9. Najděte rovnici přímky, která prochází bodem $A = [1, 2, 3]$ a

a) bodem $[0, 0, 0]$ b) je rovnoběžná s osou o_x , b) je rovnoběžná s osou o_y .

10. Určete druh kuželosečky $9x^2 + 4y^2 + 18x + 8y - 23 = 0$. Jestliže se jedná o parabolu, najděte její osu a vrchol, je-li to elipsa, najděte její střed a poloosy, v případě hyperboly najděte její střed, poloosy a asymptoty. Kuželosečku nakreslete.