Vstupní písemka - řešení

1. Pro která a platí $\sqrt[5]{\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-1}}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-3}}=\sqrt{a}$?

Řešení:

$$\sqrt[5]{\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-1}}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-3}}=\left(\frac{a^{\frac{1}{2}-1}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^{-\frac{3}{5}}=\left(a^{-\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{3}{5}}=\left(a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}=a^{\frac{2+3}{6}\cdot\frac{3}{5}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$$

Zadaný výraz je definován pouze pro $a>0$, výsledek je definován pro $a\geq 0$. Rovnost tedy platí pro $a\neq 0$. (Tam, kde výrazy současně nejsou definovány, tam se sobě rovnají!)

2. a) Utvořte negaci výroku
Nebude-li pršet, nezmoknem (jestliže nebude pršet, potom nezmoknem).

Řešení:
Označíme-li jako p výrok ***nebude pršet*** a jako q výrok ***mezmoknem***, má zadaný složený výrok tvar implikace $p\Rightarrow q$ a pro negaci implikace platí $\overline{p\Rightarrow q}\Leftrightarrow p\wedge\overline{q}$.
Takže hledaná negace má slovní vyjádření: Nebude pršet a zároveň zmoknem (nebo lépe: Sice nebude pršet, ale přesto zmoknem).

b) Je dán výrok
Pro všechna reálná čísla x platí: je-li $|x|<-1$, potom je $x^2>1$ $\quad\left(\forall x\in\mathbb{R}:|x|<-1\Rightarrow x^2>1\right)$
Určete pravdivostní hodnotu tohoto výroku a utvořte jeho negaci.

Řešení:
Pro všechna reálná čísla je výrok $|x|<-1$ nepravdivý; implikace $p\Rightarrow q$ má pro p nepravdivé vždy pravdivostní hodnotu 1. Odtud plyne, že zadaný výrok je pravdivý.
Negace daného výroku má tvar $\exists x\in\mathbb{R}:|x|<-1\wedge x^2\leq 1$ (a je pochopitelně nepravdivá).

3. a) Vypočítejte $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot\ldots\cdot i^{100}$

Řešení:

$i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4\cdot\ldots\cdot i^{100}=i^{(1+2+3+\cdots+100)}$;

$1+2+3+\cdots+100=\frac{1}{2}100\cdot(100+1)=5050=5048+2=(1262\cdot 4)+2;$

$i^{(1262\cdot 4)+2}=\left(i^4\right)^{1262}\cdot i^2=1^{1262}\cdot(-1)=\underline{\underline{-1}}$

b) Komplexní čísla $z_1=1+i\sqrt{3},\quad z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ vyjádřete v goniometrickém tvaru, v tomto tvaru vypočítejte jejich součin a výsledek převeďte do algebraického tvaru.

Řešení:

$z_1=1+i\sqrt{3}\quad |z_1|=\sqrt{1+3}=2,\ z_1=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Hledám φ_1 tak, aby platilo $\cos\varphi_1=\frac{1}{2},\ \sin\varphi_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

zřejmě platí $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{3} (= 60^o)$ a $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

$z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \quad |z_2| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$

Pro φ_2 má platit $\cos\varphi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi_2 = \frac{1}{2}$, tedy $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{6} (= 30^o)$ a

$z_2 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$.

Tedy $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right) = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{2i}}$

4. Řešte

a) $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x-1}{x+1} > 0$

Řešení:

$\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x-1}{x+1} > 0$

$\dfrac{(x-1)^2 + (x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2(x^2+1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2(x^2+1)}{x^2-1}$

$\dfrac{2(x^2+1)}{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{|x| > 1}} \qquad \underline{\underline{x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)}}$

b) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = x - 3$

Řešení:

$x^2 + 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 \geq 0$ platí vždy, navíc musí platit $x - 3 \geq 0$ (levá strana je vždy nezáporná)

$\sqrt{x^2 + 4x + 4} = x - 3 \quad \Big|^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = x^2 + 6x + 9 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{5}{2}$ a to nevyhovuje podmínce $x \geq 3$.

Rovnice tedy nemá řešení, $\underline{\underline{x \in \varnothing}}$

Ke stejnému výsledku dojdeme, provedeme-li zkoušku - jestliže obě strany rovnice umocníme, provádíme úpravu, která není ekvivalemtní, je to úprava, které říkáme implikační a při takové úpravě musíme provést zkoušku (mohli jsme přidat "řešení").

Zkouška: $L.S. \quad \sqrt{\left(-\frac{5}{2} + 2\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \quad , P.S. \quad -\frac{5}{2} - 3 = -\frac{11}{2} \quad L.S. \neq P.S.$

5. Zjistěte, pro která a platí $a^x > a^{x+1}$.

Řešení:

Exponenciální funkce je definovaná pouze pro $a > 0$ a dále platí, že je rostoucí pro $a > 1$ a klesající pro $0 < a < 1$. Tedy $\underline{\underline{a \in (0,1)}}$.

Jestliže zadanou nerovnost obvyklým způsobem upravíme, dostaneme

$a^x > a^x \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad \left| a^x > 0 \ \forall x \right| \quad \Leftrightarrow \quad 1 > a$, ale navíc z definice musí být $a > 0$.

6. Řešte nerovnici $\log_4(2x-1) < 1$.

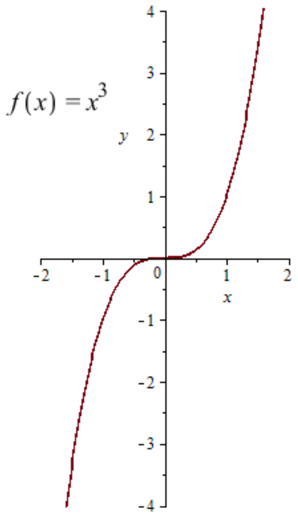
Řešení:

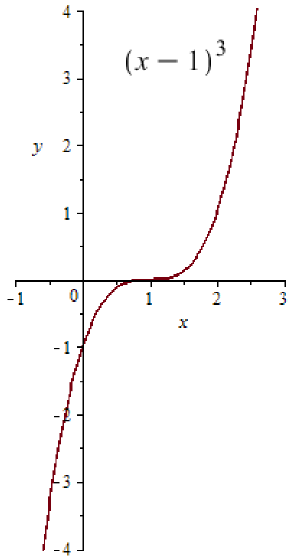
$\log_4(2x-1) < 1 \Leftrightarrow 2x - 1 < 4 \wedge 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow 0 < 2x - 1 < 4 \Leftrightarrow 1 < 2x < 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2} \quad \underline{\underline{x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)}}$

7. Pomocí grafu funkce $f(x)=x^3$ nakreslete postupně grafy funkcí $f_1(x)=(x-1)^3-1$, $f_2(x)=\left|(x-1)^3-1\right|$ a $g(x)=\left|\left(|x|-1\right)^3-1\right|$.

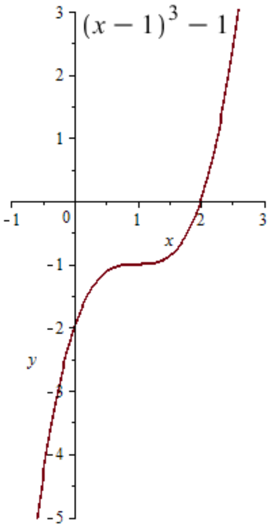
V každém kroku napište, pomocí jaké transformace předchozího grafu ten následující vznikl.

Řešení:

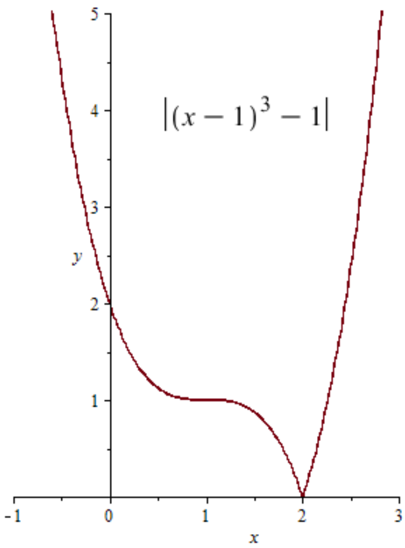




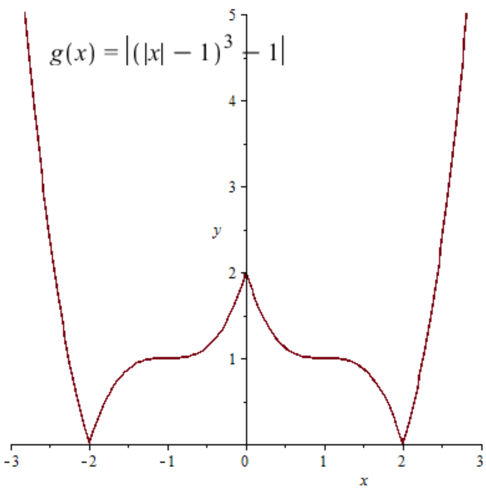
posunutí o 1 doprava



posunutí o 1 dolů



překlopení podle osy *x* do kladných hodnot



symetrie podle osy *y*

8. Zjistěte, zda pro funkci $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ platí $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=g(x)$., kde $g(x)=x$

Řešení:

Funkce f a g se sobě nerovnají, protože nemají stejný definiční obor - $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}-\{0\}$, $\mathcal{D}_g=\mathbb{R}$.

Ověříme, jestli rovnost platí pro $x\neq 0$:

$$f\left(f(x)\right)=1-\frac{1}{f(x)}=1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{\frac{x-1}{x}}=1-\frac{x}{x-1}=\frac{x-1-x}{x-1}=\frac{1}{1-x}\qquad \mathcal{D}_{f\circ f}=\mathbb{R}-\{0,1\}$$

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right)=\frac{1}{1-f(x)}=\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x \quad \wedge \quad x\neq 0, x\neq 1$$

Rovnost $f\left(f\left(f(x)\right)\right)=g(x)$ platí na množině $\mathbb{R}-\{0,1\}$.

9. Najděte rovnici přímky, která prochází bodem $A=[1,2,3]$ a

a) bodem $[0,0,0]$ b) je rovnoběžná s osou o_x, b) je rovnoběžná s osou o_y.

Řešení:

a) rovnice přímky procházející body $A=[1,2,3]$, $B=[0,0,0]$ má parametrickou rovnici

$$X=B+(A-B)t, t\in\mathbb{R} \text{ tedy } \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}t, t\in\mathbb{R}, \text{ v souřadnicích } \begin{aligned}x&=t\\ y&=2t \quad t\in\mathbb{R}\\ z&=3t\end{aligned}$$

b) přímka rovnoběžná s osou o_x má směrový vektor $\mathbf{s}=(1,0,0)$, a prochází-li bodem A mají její parametrické rovnice tvar

$$\begin{aligned}x&=1+t\\ y&=2 \quad t\in\mathbb{R}\\ z&=3\end{aligned} \text{ , nebo jednodušeji } \begin{aligned}x&=t\\ y&=2 \quad t\in\mathbb{R}\\ z&=3\end{aligned}$$

c) analogicky jako v b):

$$\begin{aligned}x&=1\\ y&=2+t \quad t\in\mathbb{R}\\ z&=3\end{aligned} \text{ , nebo jednodušeji } \begin{aligned}x&=1\\ y&=t \quad t\in\mathbb{R}\\ z&=3\end{aligned}$$

10. Určete druh kuželosečky $9x^2+4y^2+18x+8y-23=0$. Jestliže se jedná o parabolu, najděte její osu a vrchol, je-li to elipsa, najděte její střed a poloosy, v případě hyperboly najděte její střed, poloosy a asymptoty. Kuželosečku nakreslete.

Řešení:

elipsa

$$9\left(x^2+2x\right)+4\left(y^2+2y\right)-23=0$$

$$9(x+1)^2-9+4(y+1)^2-4-23=0$$

$$9(x+1)^2+4(y+1)^2=36$$

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

střed $[-1,-1]$

poloosy $a=2$

$b=3$